Mathematik für Physiker und Computational Science Studenten

19. Übung – Lineare Differentialgleichungen höherer Ordnung, Eulersche Differentialgleichungen, Rand- und Eigenwertprobleme

---

1. Lösen Sie folgende homogene lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten

   (a) $y'' - y' - 6y = 0\,,$

   (b) $y'' + 5y' + 4y = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 1\,,$

   (c) $y'' - a^2 y = 0 \quad (a \in \mathbb{R})\,,$

   (d) $y'' - 4y' + 13y = 0\,,$

   (e) $y'' + a^2 y = 0 \quad (a \in \mathbb{R})\,,$

   (f) $y'' + 2y' + y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0\,,$

   (HA) (g) $y^{(4)} - 2y'' = 0\,,$

   (HA) (h) $y''' + y'' + y' + y = 0, \quad y(0) = y'(0) = 0, \quad y''(0) = 2\,,$

   (i) $y^{(4)} + y = 0\,.$

2. Lösen Sie folgende lineare inhomogene Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten (mit der Ansatzmethode)

   (HA) (a) $y^{(4)} + y = x\,,$

   (b) $y'' + 2y' + y = x\,,$

   (HA) (c) $y''' + 2y'' + y' = 2e^{3x}\,,$

   (d) $y''' - y = 6e^{-x}\,,$

   (e) $y'' + 4y = x^2 + \cos x\,,$

   (f) $y'' - 3y' + 2y = e^{3x}(x^2 + x)\,,$

   (g) $y'' - 6y' + 8y = e^{2x}\,,$

   (HA) (h) $y'' - y = e^x\,,$

   (HA) (i) $y^{(4)} - 2y'' = x^2 + x - 1\,.$

Zusatz 1: Lösen Sie mit einem komplexen Ansatz

(a) $y'' + y = e^{2x} \cos 3x\,,$

(b) $y'' + y' + y = e^{-\frac{x}{2}} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} x\,.$

3. Lösen Sie mit Variation der Konstanten

   (a) $y''' + 2y'' + y' = 2e^{3x}\,,$

   (HA) (b) $y'' + 4y = \cos x\,,$

   (c) $y'' + 4y = \frac{1}{\sin 2x}\,.$

4. **(HA)** Bestimmen Sie die Lösung der Differentialgleichung

   $$\ddot{u}(t) + 4\dot{u}(t) + 4u(t) = 25 \sin t\,,$$

   die den Anfangsbedingungen $u(0) = 0$, $\dot{u}(0) = 1$ genügt!

   Überprüfen Sie Ihr Ergebnis !

Zusatz 2: Lösen Sie folgende Eulersche Differentialgleichung

(a) $x^2y'' + xy' + 2y = 0\,,$
(b) $x^2y'' - 3xy' + 4y = \ln x\,.$

5. Bestimmen Sie in Abhängigkeit vom reellen Parameter $\lambda \neq 0$ alle Lösungen des Randwertproblems

$$y'' + \lambda^2 y = 0\,,$$

die die Bedingungen

(a) $y(0) = 0, y(\pi) = 1,$ (b) $y(0) = y(\pi) = 1\,,$

erfüllen.

6. Für welche reellen Zahlen λ hat das Randwertproblem

$$y''(x) - 2y'(x) + \lambda y(x) = 0,\ y(0) = y(1) = 0$$

nichttriviale Lösungen?

Zusatz 3: Lösen Sie folgende Differentialgleichung

(a) $x^2y'' + xy' - y = x^3\,,$
(b) $x(x+1)y'' + (x+2)y' - y = x + \frac{1}{x}\,.$