

18. Übung – Systeme 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

1. Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems $y' = Ay, y(0) = y_0$ für

$$(a) \quad A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad y_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(mit Hilfe der Eigenwerte und Eigenvektoren)

$$(b) \quad A = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad y_0 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(mit Ansatzmethode)

$$(c) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad y_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

(mit Eigenwerten und Eigenvektoren)

$$(d) \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad y_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

(mit Eliminationsmethode und mit matrixwertiger e -Funktion)

$$(e) \quad A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad y_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(f) \quad (\mathbf{HA}) \quad A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad y_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

2. Diskutieren Sie für die Matrizen A der Aufgaben 1 (a) - 1 (d) die Phasenportraits in der Umgebung des Nullpunktes! (Vgl. Vorlesung, Abschnitt 7.7.2!)

3. Bestimmen Sie die Lösung $(x(t), y(t), z(t))$ des Systems

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 4x - y \\ \dot{y} &= 3x + y - z \\ \dot{z} &= x + z. \end{aligned}$$

4. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung folgender inhomogener Systeme

$$(a) \quad \begin{aligned} \dot{x} &= 4x + y - 36t \\ \dot{y} &= -2x + y - 2e^t \end{aligned} \quad (b) \quad \begin{aligned} \dot{x} &= 5x - 3y + 2e^{3t} \\ \dot{y} &= x + y + 5e^{-t} \end{aligned}$$

$$(c) \quad (\mathbf{HA}) \quad \begin{aligned} \dot{x} &= y + \tan^2 t - 1 \\ \dot{y} &= -x + \tan t \end{aligned}$$

5. (HA) Lösen Sie folgende Systeme mit den angegebenen Methoden

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} & \dot{x} = 2x + y \\ & \dot{y} = 3x + 4y \\ \text{(c)} & \dot{x} = 2x + y \\ & \dot{y} = 4y - x \end{array} \quad \begin{array}{ll} \text{(b)} & \dot{x} = x + y \\ & \dot{y} = 3y - 2x, \text{ wobei } x(0) = 0, y(0) = 1 \\ \text{(d)} & \dot{x} = -x + y \\ & \dot{y} = -y \end{array}$$

Lösungsmethoden:

- (a) mit Eigenwerten und Eigenvektoren,
- (b) mit Eigenwerten und Eigenvektoren und mit matrixwertiger e -Funktion,
- (c) mit Ansatzmethode,
- (d) mit matrixwertiger e -Funktion und mit Eliminationsmethode.

6. (HA) Diskutieren Sie für die Systeme aus 5 (a) – 5 (d) die Phasenportraits in der Umgebung des Nullpunktes!