Mathematik für Physiker und Computational Science Studenten

16. Übung – Oberflächenintegrale, Integralsätze

---

1. Berechne den Flächeninhalt des Teils des Zylinders $2z = x^2$, der von den Ebenen $y = x/2, y = 2x, x = 2\sqrt{2}$ begrenzt wird ! (Ergebnis 13)

2. Berechne den Flächeninhalt des Teils der Fläche $z^2 = 2xy(z > 0)$, der von den Ebenen $x = 0, x = a, y = 0, y = b$ $(a, b > 0)$ begrenzt wird! (Ergebnis $\frac{2}{3}\sqrt{2ab}(a + b)$)

3. Berechne den Flächeninhalt des Teils des Paraboloids $2z = \frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b}$ $(a, b > 0)$, der vom Zylinder $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ausgeschnitten wird. (Ergebnis $\frac{2\pi}{3}ab(2\sqrt{2} - 1)$)

4. Zeige
$$\oint_C f(x^2 + y^2)(xdx + ydy) = 0\,,$$
wenn $f(u)$ stetig und C stückweise glatt und geschlossen ist.

5. **(HA)** Die Vektorfelder F, G und das Skalarfeld φ seien auf einer offenen Teilmenge M des $\mathbb{R}^3$ differenzierbar. Zeigen Sie, dass auf M gilt:
   (a) $\mathrm{rot}(\varphi F) = \varphi\,\mathrm{rot}F + \mathrm{grad}\varphi \times F$,
   (b) $\mathrm{div}(\varphi F) = \varphi\,\mathrm{div}F + \mathrm{grad}\varphi \cdot F$,
   (c) $\mathrm{div}(F \times G) = G\,\mathrm{rot}F - F\,\mathrm{rot}G$.

6. Berechne das Oberflächenintegral 2. Art $\int_S \vec{v}d\vec{S}$, wenn
(Bez. $\vec{r} = (x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ Ortsvektor zum Punkt $P(x, y, z)$,
$\vec{v} = v(\vec{r})$ Vektorfeld)
   (a) $v(\vec{r}) = \vec{r},\ S : x + y + z = a\ (a > 0), x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0.$
   (Normale zeige nach oben) (Ergebnis $\frac{1}{2}\ a^3$)
   (b) $v(\vec{r}) = \vec{r},\ S : x^2 + y^2 + z^2 = a^2.$
   (Normalenvektor zeige nach außen) (Ergebnis $4\pi a^3$)
   (c) $v(\vec{r}) = (x, y, (z - 1)),\ S : z = x^2 + y^2,\ 0 \leq z \leq 4.$
   (Normalenvektor zeige nach unten) (Ergebnis 12π)
   (d) **(HA)** $v(\vec{r}) = (x^3, y^3, z^3),\ S : x^2 + y^2 + z^2 = a^2.$
   (Normalenvektor zeige nach außen) (Ergebnis $\frac{12\pi}{5}a^5$)
   (e) **(HA)** $v(\vec{r}) = (x, y, yz^2),\ S$: Oberfläche eines achsenparallelen Würfels mit Mittelpunkt im Ursprung und Kantenlänge 2.
   (Normale zeige nach außen) (Ergebnis 16)

7. Berechne für das Vektorfeld
$$v(\vec{r}) = (xe^y, xe^z, ze^x)$$
den Fluß durch die Fläche $y^2 + z^2 = a^2, -1 \leq x \leq 1$.
(Normalenvektor zeige nach außen) (Ergebnis $2\pi a^2 \sinh 1$).

8. Berechne für das Vektorfeld $v(\vec{r}) = (y, -x, z)$ den Fluß durch eine Windung der Schraubenfläche

$$\vec{r} = (\varrho\cos\varphi, \varrho\sin\varphi, \frac{h}{2\pi}\varphi) \quad (0 \le \varrho \le a,\ 0 \le \varphi \le 2\pi)$$

(der Normalenvektor zeige nach oben) (Ergebnis $\frac{a^2}{2}h(1+\pi)$).

9. Löse die Aufgaben 6(b), (c), **(HA)**(d) mit Hilfe des Satzes von Gauß.

10. Sei

$$v(\vec{r}) = (x^2 + xy, \frac{x^2}{2} + y + az, by)\,.$$

Bestimme b als Funktion von a so, dass v ein Gradientenfeld ist, und berechne dann eine Stammfunktion (Potentialfunktion) φ von v!

11. Ein Vektorfeld v sei in $K = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \le 100, z \ge 5\}$ mit Hilfe der Vektorfunktion $v(x, y, z) = (xz, -10, y^2)$ definiert. Berechne den Fluß durch die Oberfläche von K

    (a) ohne Benutzung des Integralsatzes von Gauß,

    (b) mit Benutzung des Integralsatzes von Gauß (Ergebnis $9 \cdot 10^4\pi/64$).

12. **(HA)** Zeige mit Hilfe des Stokeschen Satzes, dass das Kurvenintegral

$$\int_\Gamma (yzdx + xzdy + xydz)$$

vom Weg unabhängig ist.

13. Berechne

$$\oint_\Gamma [x(z-y)dx + y(x-z)dy + z(y-x)dz]\,,$$

wobei Γ das Dreieck mit den Eckpunkten $A(a,0,0)$ $B(0,a,0)$, $C(0,0,a)$ (durchlaufen von A über B nach C zurück nach A)

    (a) unter Benutzung einer Parameterdarstellung des Integrationsweges,

    (b) unter Verwendung des Stokeschen Satzes (Ergebnis a^3).

14. **(HA)** Berechne $\int_S \vec{v}d\vec{S}$, wenn S die Oberfläche des gesamten Zylinders $x^2 + y^2 = 1, 0 \le z \le h$ und $v(\vec{r}) = \vec{r}$ ist (Normale nach außen).

    (a) mit Gauß, (b) ohne Gauß, (Ergebnis $3\pi h$).

15. **(HA)** Überprüfen Sie die Richtigkeit des Stokesschen Satzes für die Fläche

$$\{z = x^2 - y^2 : x^2 + y^2 \le a^2\}$$

und die dazugehörige Randkurve $\{z = x^2 - y^2 : x^2 + y^2 = a^2\}$ sowie das Vektorfeld $v(\vec{r}) = \vec{r}$!