Mathematik für Physiker und Computational Science Studenten

15. Übung – Kurvenintegrale

---

1. Berechnen Sie die Länge
   (a) eines Bogens der Zykloide $(x = a(t - \sin t),\ y = a(1 - \cos t)\ , 0 \leq t \leq 2\pi)$,
   (b) der Kardioide $(r = a(1 + \cos\varphi),\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi)$.
2. **(HA)** Berechnen Sie folgende Kurvenintegrale:
   (a) $\int\limits_\Gamma xyds, \quad \Gamma : \left\{(x,y) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,\ x \geq 0, y \geq 0\right\}$,
   (b) $\int\limits_\Gamma \sin 2xds, \quad \Gamma$: Cosinuskurve von $x = 0$ bis $x = t$,
   (c) $\int\limits_\Gamma xyz\ ds, \quad \Gamma$ geg. durch $x = t, y = \frac{1}{3}\sqrt{8t^3}, z = \frac{1}{2}t^2,\ 0 \leq t \leq 1$
   (Ergebnis $\frac{16\sqrt{2}}{143}$).
3. Berechnen Sie folgende Kurvenintegrale 2. Art
   (a) $\int\limits_\Gamma (x + y)dx + (x - y)dy$ mit $\Gamma : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ positiv orientiert,
   (b) $\int\limits_\Gamma (-ydx + xdy)$ mit Γ Streckenzug von (0,0) über (1,0) nach (1,1).
4. Man bestimme den Wert des Kurvenintegrals $I = \int\limits_\Gamma (2xydx + x^2dy)$ über einen Weg Γ, der die Punkte (0,0) und (1,1) durch
   (a) die Gerade $y = x$,
   (b) die Parabel $y = x^2$,
   (c) die Parabel $y^2 = x$,
   (d) die kubische Parabel $y = x^3$

   verbindet!
5. **(HA)** Man berechne $I = \int\limits_\Gamma xydx + (y - x)dy$ über die Integrationswege (a) - (d) aus Aufgabe 4.
6. Berechnen Sie:

$$\int\limits_\Gamma [(y + 3z)dx + (2z + x)dy + (3x + 2y)dz]\,,$$

   wenn Γ gegeben ist durch $x = a\cos\varphi,\ y = a\sin\varphi,\ z = \dfrac{2a\varphi}{\pi}$ von $(a, 0, 0)$ bis $(0, a, a)$.

7. Berechnen Sie

$$\oint_\Gamma \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2 + 1}$$

mit Γ Rand des kleinen Segmentes, das durch $x + y = 1$ und $x^2 + y^2 = 1$ definiert und im mathematisch positiven Sinn durchlaufen wird.

8. **(HA)** Unter Wirkung des Kraftfeldes $f(x, y) := \begin{pmatrix} 2xy \\ x^2 + y^2 \end{pmatrix}$ bewege sich ein Massepunkt auf der Parabel $y = x^2$ vom Punkte $(1, 1)$ zu dem Punkte $(2, 4)$. Welche Arbeit wird hierbei geleistet?

9. **(HA)** In einem Kraftfeld wirke auf eine Masse im Punkt (x, y) der Kraftvektor $\vec{F} = (x+y, 2x)$. Berechnen Sie die Arbeit bei der Verschiebung des Massepunktes längs der Einheitskreislinie $x^2 + y^2 = 1$

   (a) mit Parametrisierung, (b) mit Greenscher Formel.

10. Lösen Sie Aufgabe 9 für das Kraftfeld $\vec{F} = (x + y, x)$! Wie kann man hier die Arbeit längs einer beliebigen Kurve berechnen?

11. Verwenden Sie die Greensche Formel zur Berechnung von

    (a) **(HA)** $\oint\limits_\Gamma ((\cos x \sinh y - xy^2)dx + (\sin x \cos hy + x^2y)dy)$,
    $\Gamma :$ Kreis $x^2 + y^2 = a^2$, (Ergebnis 0).

    (b) $\oint\limits_\Gamma [(xe^x + \sin y)dx + (\sin^2 y + x \cos y)dy]$,
    $\Gamma :$ $x = a\cos^3 t, y = a \sin^3 t (0 \leq t \leq 2\pi)$, (Ergebnis 0).

    (c) $\displaystyle\iint\limits_B \frac{x^4 - y^4}{x^2y^2}\, d(x, y)$
    B ist die Fläche, die von den Kurven $x^2 + y^2 = 10$, $y = 3/x, y = x$ begrenzt wird und die Eckpunkte $P_1(3, 1), P_2(\sqrt{5}, \sqrt{5}), P_3(\sqrt{3}, \sqrt{3})$ hat, (Ergebnis 4/3).