Mathematik für Physiker und Computational Science Studenten

13. Übung – Funktionen mehrerer Veränderlicher: Grenzwerte, Ableitungen

---

1. Man zeige, dass $\lim\limits_{x_1\to 0}\lim\limits_{x_2\to 0} f(x_1,x_2)$ und $\lim\limits_{x_2\to 0}\lim\limits_{x_1\to 0} f(x_1,x_2)$ existieren, $\lim\limits_{x\to(0,0)} f(x)$ aber nicht:

   (a) $f(x_1,x_2) = \dfrac{x_1-x_2}{x_1+x_2}$, (b) **(HA)** $f(x_1,x_2) = \dfrac{x_1^2x_2^2}{x_1^2x_2^2+(x_1-x_2)^2}$.

2. Man zeige: dass für $f(x_1,x_2) = (x_1+x_2)\sin\frac{1}{x_1}\sin\frac{1}{x_2}$ die Grenzwerte $\lim\limits_{x_1\to 0}\lim\limits_{x_2\to 0} f(x_1,x_2)$ und $\lim\limits_{x_2\to 0}\lim\limits_{x_1\to 0} f(x_1,x_2)$ nicht existieren, aber $\lim\limits_{x\to(0,0)} f(x) = 0$ gilt.

3. Seien $\Omega = \{(r,\varphi,z)\in\mathbb{R}^3 : 0<r, 0\le\varphi<2\pi, z\in\mathbb{R}\}$ und

   $$f:\Omega \longrightarrow \mathbb{R}^3\setminus(0,0,0),\quad (r,\varphi,z)\mapsto (r\cos\varphi, r\sin\varphi, z)\,.$$

   Man bestimme die Ableitung dieser Funktion und deren Determinante.

   (Z) Bestimmen Sie Umkehrabbildung f^{-1} und deren Ableitung.

4. **(HA)** Man bestimme die Ableitung und deren Determinante der Funktion

   $$f:\Omega\longrightarrow\mathbb{R}^3,\ \ (r,\varphi,\theta)\mapsto(r\cos\varphi\sin\theta, r\sin\varphi\cos\theta, r\cos\theta)\,,$$

   wobei $\Omega = \{(r,\varphi,\theta) : 0<r, 0\le\varphi<2\pi, 0<\theta<\pi\}$.

5. Man untersuche folgende Funktionen auf Extremwerte

   (a) $f(x_1,x_2) = x_1^3+3x_1x_2^2-15x_1-12x_2$, (b) **(HA)** $f(x_1,x_2) = e^{x_1-x_2}(x_1^2-2x_2^2)$.

6. Bestimmen Sie die Extremstellen von $f(x_1,x_2)$ unter den angegebenen Nebenbedingungen

   (a) $f(x_1,x_2) = 6-4x_1-3x_2$, wobei $x_1^2+x_2^2=1$,

   (b) $f(x_1,x_2) = \cos^2 x_1+\cos^2 x_2$, wobei $x_2-x_1=\frac{\pi}{4}$.

7. Bestimmen Sie den größten und kleinsten Wert von $f(x_1,x_2)$ im angegebenen Gebiet:

   (a) $f(x_1,x_2) = x_1^2+x_2^2-x_1x_2+x_1+x_2$, $x_1\le 0, x_2\le 0, x_1+x_2\ge -3$,

   (b) **(HA)** $f(x_1,x_2) = \sin x_1+\sin x_2+\sin(x_1+x_2)$, $0\le x_1\le\frac{\pi}{2}, 0\le x_2\le\frac{\pi}{2}$.

8. Durch

   $$\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{x_2^2}{b^2}+\frac{x_3^2}{c^2}=1,\quad a,b,c>0$$

   sei eine implizite Funktion $x_3 = f(x_1,x_2)$ gegeben. Man bestimme ihre partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung!

9. Man bestimme von folgenden, implizit gegebenen Funktionen

   (a) $x_2 = f(x_1)$ bzw. (b) $x_3 = f(x_1, x_2)$ die Extremstellen:

   (a) $x_1^3 + x_2^3 - 3ax_1x_2 = 0 \ (a > 0)$,
   (b) **(HA)** $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2x_1 + 4x_2 - 6x_3 - 11 = 0$.

10. Man zerlege die Zahl $a > 0$ in drei nichtnegative Summanden, so dass deren Produkt möglichst groß wird. Man beweise mit dem gewonnenen Resultat, dass das arithmetische Mittel dreier Zahlen $x_1, x_2, x_3 \geq 0$ nicht kleiner ist als ihr geometrisches Mittel, d.h.

$$\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} \geq \sqrt[3]{x_1x_2x_3}\,.$$

11. **(HA)** Unter allen in eine Kugel einbeschriebenen Zylindern ist der Zylinder maximalen Volumens zu finden!

---

13. Hausaufgabe

1. Lösen Sie alle mit **(HA)** gekennzeichneten Aufaben der 13. Übung!