Mathematik für Physiker und Computational Science Studenten

11. Übung – Basen, Matrixdarstellung, Determinante, Rang, inverse Matrix

---

1. (a) Man zeige, dass die Elemente $a = [2,1,0]^T$ und $b = [1,2,0]^T$ linear unabhängige Elemente des $\mathbb{R}^3$ sind.
   (b) Man bestimme alle $c \in \mathbb{R}^3$ mit der Eigenschaft, dass $\{a, b, c\}$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$ bildet.
   (c) Bestimmen Sie die Koordinaten des Vektors $e = [1,1,1]^T$ in der Basis $\{a, b, e_3\}$.

2. Es sei $\{a_1, a_2, a_3\}$ Basis eines linearen Vektorraumes V. Bilden dann die Vektoren $b_1 = a_1 + a_2, \quad b_2 = a_1 + a_3, \quad b_3 = a_2 + a_3$ auch eine Basis von V?

3. Zeigen Sie, dass die linearen Räume $\mathbb{R}_n[t]$ und $\mathbb{R}^{n+1}$ isomorph sind!

4. Seien $p_\pm(t) = 1 \pm t^2 \in \mathbb{R}_2[t]$. Bestimmen Sie die Dimension von

$$U = \operatorname{lin}\{p_+(t), p_-(t)\} \subset \mathbb{R}_2[t]$$

   sowie eine Basis von U.

5. **(HA)** Überprüfen Sie die Linearität folgender Operatoren!
   Geben Sie die Matrixdarstellung $[A]$ bezüglich der kanonischen Basen an:
   (a) $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^1;\ A(x,y,z) = x + 2y + 3z$,
   (b) $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2;\ A(x,y) = (x+y, x-y)$,
   (c) $A : \mathbb{R}_n[t] \to \mathbb{R}_{2n}[t];\ (Af)(t) = f(t^2)$,
   (d) $A : \mathbb{R}_n[t] \to \mathbb{R}_{n+1}[t], (Af)(t) = tf(t)$,
   (e) **(HA)** $A : \mathbb{R}_n[t] \to \mathbb{R}_{n-1}[t], (Af)(t) = f'(t)$,
   (f) **(HA)** $A : \mathbb{R}_n[t] \to \mathbb{R}_n[t], (Af)(t) = f(2t+4)$,
   (g) **(HA)** $A : \mathbb{R}_n[t] \to \mathbb{R}_n[t], (Af)(t) = f(0)$,
   (h) **(HA)** $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, A(x_i)_{i=1}^n = c(x_i)_{i=1}^n$ ($c \in \mathbb{R}$ fixiert),

6. Berechnen Sie die Determinante folgender reeller $n \times n$ Matrizen

   (a) $A(x,y) = \begin{bmatrix} x & y & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & y & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & y \\ y & 0 & 0 & \cdots & \cdots & x \end{bmatrix}$
   (b) $S_\alpha = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \alpha \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots & \\ \vdots & & & 1 & 0 & 0 \\ 0 & & \dots & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

   (c) $\operatorname{tridiag}(1,-2,1) = \begin{bmatrix} -2 & 1 & & & 0 \\ 1 & -2 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & & & 1 & -2 \end{bmatrix}$
   (Z) $V(\lambda_{i-1})_1^n = \left[\lambda_i^j\right]_{i,j=0}^{n-1}$

7. Gesucht sei die Lösung $x \in \mathbb{C}^n$ eines komplexen Gleichungssystems $Ax = b$. Wie kann man diese durch Übergang zu einem äquivalenten reellen Gleichungssystem finden?

8. Berechnen Sie die inverse Matrix A^{-1}, **(HA)** B^{-1} von

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{bzw. } B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 6 \\ -1 & 3 & -2 \end{bmatrix} \text{ mit Hilfe}$$

   (a) der **Adjunkten**,

   (b) des **Gauß-Jordan-Verfahrens**,

   (c) der Cramerschen Regel.

   (d) Bestimmen Sie die Lösungen x, **(HA)** y der Gleichungssysteme

$$Ax = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad By = \begin{bmatrix} 0 \\ 8 \\ 8 \end{bmatrix}.$$

9. Man bestimme den Rang folgender (reeller) Matrizen

$$\text{a)} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 9 & 5 \\ -1 & -3 & 3 & 0 \end{bmatrix} \text{b)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \text{c)} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \text{d)} \begin{bmatrix} 0 & 4 & 10 & 1 \\ 4 & 8 & 18 & 7 \\ 10 & 18 & 40 & 17 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \end{bmatrix}$$

10. Zeigen Sie, dass $\text{rank } A \cdot B \leq \min\{ \text{ rank } A, \text{ rank } B\}$ gilt.

11. Klassifizieren Sie die Lage dreier Ebenen des $\mathbb{R}^3$,

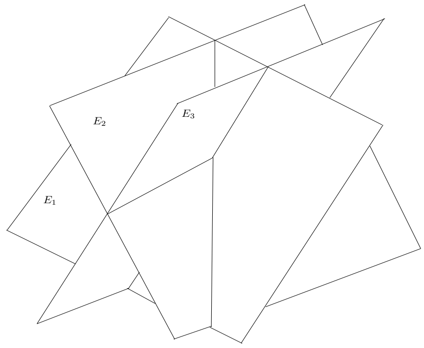
$$E_i : a_i x + b_i y + c_i z = d_i \quad (a_i^2 + b_i^2 + c_i^2 > 0), \; i = 1, 2, 3$$

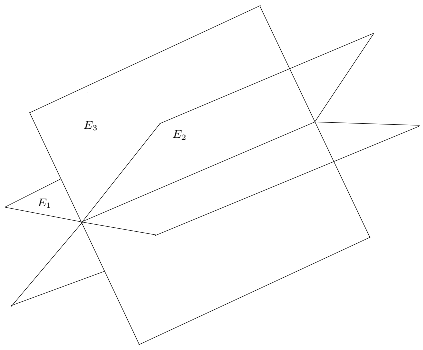
   mit Hilfe der Ränge $r = \text{rang } A$, $r' = \text{rang } A'$, wobei

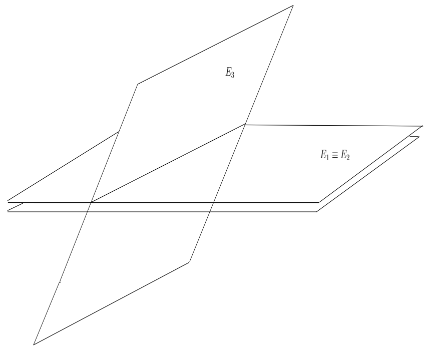
$$A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}, \; d = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix}, \; A' = [\, A|d \,] \,.$$

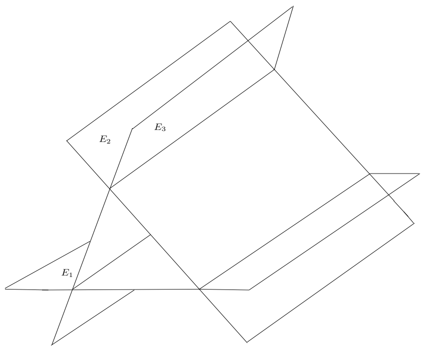
   Verwenden Sie gegebenenfalls auch

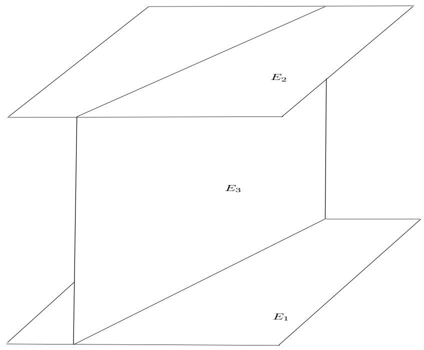
$$r_{ij} = \text{ rang } \begin{bmatrix} a_i & b_i & c_i \\ a_j & b_j & c_j \end{bmatrix}, \; r'_{ij} = \text{ rang } \begin{bmatrix} a_i & b_i & c_i & d_i \\ a_j & b_j & c_j & d_j \end{bmatrix} \quad i \neq j, i, j \in \{1, 2, 3\} \,.$$

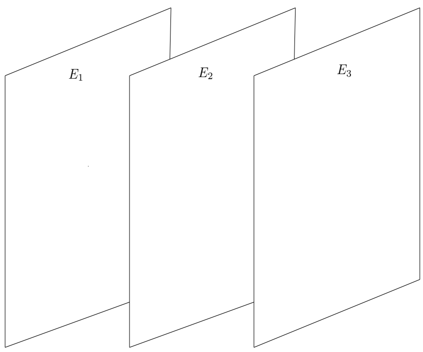

E_2
E_3
E_1

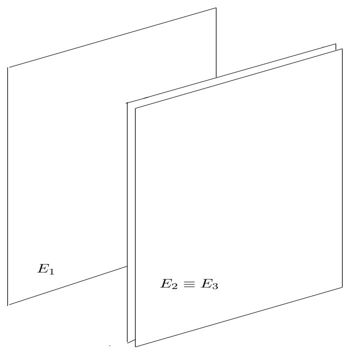

E_3
E_2
E_1

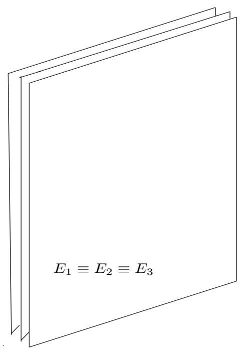

E_3
$E_1 \equiv E_2$


E_2
E_3
E_1


E_2
E_3
E_1


E_1
E_2
E_3


E_1
$E_2 \equiv E_3$


$E_1 \equiv E_2 \equiv E_3$

11. Hausaufgabe

---

1. Es seien $g_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ und $g_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ sowie $e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.
   (a) Man zeige, dass jedes Element von $\mathbb{R}^2$ eine Linearkombination von g_1 und g_2 ist.
   (b) Stellen Sie die Vektoren $e_1 + 2e_2$ und $e_1 - 2e_2$ in der Basis $\{g_1, g_2\}$ dar.
2. Man finde eine Basis des Unterraumes $U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\}$.
3. Man bestimme alle $\alpha \in \mathbb{R}$ so, dass
   (a) $[1+\alpha, 2]^T, [1, 2+\alpha]^T$ eine Basis in $\mathbb{R}^2$ ist,
   (b) $[\alpha^2, 4, 9]^T, [\alpha, 2, 3]^T, [1, 1, 1]^T$ eine Basis im $\mathbb{R}^3$ ist.
4. Gegeben sei die folgende tridiagonale Matrix der Ordnung n:

$$A_n = \begin{bmatrix} \cos\rho & 1 & & & & \\ 1 & 2\cos\rho & 1 & & & \\ & 1 & 2\cos\rho & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & & 1 & 2\cos\rho \end{bmatrix}.$$

   (a) Man zeige mit Hilfe des Entwicklungssatzes die Rekursionsformel

$$\det A_n = 2\cos\rho \cdot \det A_{n-1} - \det A_{n-2}\,, \ \ n > 2\,.$$

   (b) Man zeige mittels vollständiger Induktion $\det A_n = \cos(n\rho)$.
5. Lösen Sie folgendes (komplexes) Gleichungssystem

$$\begin{bmatrix} 1+\mathbf{i} & \mathbf{i} \\ -(1+\mathbf{i}) & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1-\mathbf{i} \\ 2+\mathbf{i} \end{bmatrix}$$

   (a) mit dem Gauß Algorithmus (b) mit Cramerscher Regel,
   (c) mit der inversen Koeffizientenmatrix, (d) mit der Aufgabe 7 der 11. Übung.
6. Man bestimme den Rang und die k-te Potenz folgender Matrizen ($k \in \mathbb{N}$)
   (a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, (b) $\operatorname{diag}\,(\lambda_i)_{i=0}^{n-1}$, (c) $J_n = (\delta_{i,n-j+1})_{i,j=1}^n$,
   (d) $U_n = (\delta_{i,j+1})_{i,j=1}^n$, (e) $\begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}$.
7. Bestimmen Sie den Rang folgender (reeller) Matrizen
   (a) $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 5 & 0 \\ 3 & -8 & -7 & 4 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & -5 & 2 & 7 \\ 2 & 3 & -1 & 3 & 6 \\ 1 & 1 & -4 & -1 & 1 \end{bmatrix}$
8. Lösen Sie alle mit **(HA)** gekennzeichneten Aufgaben der 11. Übung!