Mathematik für Physiker und Computational Science Studenten

10. Übung – Gruppen, Ringe, Körper

---

1. Zeigen Sie, dass die 4. Einheitswurzeln (d.h. die (komplexen) Lösungen von $z^4 = 1$) eine zyklische Gruppe der Ordnung 4 bezüglich der Multiplikation bilden!
   (a) Geben Sie alle erzeugenden Elemente an!
   (b) Geben Sie alle Untergruppen und Normalteiler an sowie deren erzeugende Elemente!

2. (a) Geben Sie die Gruppentafel der symmetrischen Gruppe S_3 an!
   (b) Geben Sie die Gruppentafel der Diedergruppe D_3 des gleichseitigen Dreiecks an, und zeigen Sie, dass diese isomorph zur symmetrischen Gruppe S_3 ist!
   (c) Geben Sie alle Normalteiler der S_3 an!

3. Es seien die Gruppen $G_1 = (\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ und $G_2 = (\mathbb{R}_+, \cdot)$ gegeben, $\mathbb{R}_+ = (0, \infty)$. Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\varphi : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}_+\,,\ x \to |x|$$

   ein surjektiver Homomorphismus ist.

4. Sei $\mathbb{R}_1[x]$ die Menge aller Polynome maximal 1. Grades in x mit reellen Koeffizienten versehen mit der binären Operation $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ (Komposition).
   (a) Ist $(\mathbb{R}_1[x], \circ)$ eine Gruppe? Wenn nicht, welche (nichttriviale) Teilmenge $\mathbb{P}_0$ bildet eine Gruppe?
   (b) **(HA)** Ist $(\mathbb{P}_0, \circ)$ kommutativ?
   (c) Ist $(\mathbb{P}_1, \circ)$ mit $\mathbb{P}_1 = \{f \in \mathbb{P}_0 : f(1) = 1\}$ eine Untergruppe von $(\mathbb{P}_0, \circ)$?

5. Zeigen Sie, dass die primen Restklassen

   (a) modulo 8, (b) modulo 12, (c) **(HA)** modulo 5, (d) **(HA)** modulo 10

   abelsche Gruppen bezüglich der Multiplikation bilden, und geben Sie isomorphe Strukturen an!

6. Sei $\mathbb{R}[x]$ die Menge aller Polynome in x mit reellen Koeffizienten, versehen mit der punktweisen Addition und Multiplikation

$$(p + q)(x) = p(x) + q(x),\ (p \cdot q)(x) = p(x) \cdot q(x)\,.$$

   (a) **(HA)** Ist $\mathbb{R}[x]$ ein Ring mit Einselement?
   (b) Ist $\mathbb{R}[x]$ ein Integritätsbereich?
   (c) Ist $\mathbb{R}[x]$ ein Körper?

7. Zeigen Sie, dass die Restklassen $\bmod n$ versehen mit den üblichen Operationen „+“ und „·“ einen kommutativen Ring R mit Einselement bilden! Ist R Integritätsbereich? Für welche n ist R ein Körper?

Zusatz: Sie kaufen ein Schiebepuzzle, welches sich im Idealzustand I befindet. Können Sie den Zustand J herstellen (ohne Zerstörung des Spielzeugs)?

Zustand I :

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	

Zustand J :

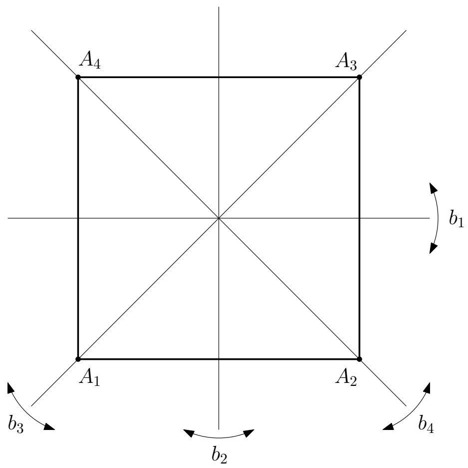
1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	15	14	

Wenn ja, wie? Wenn nein, warum nicht?

---

10. Hausaufgabe

1. Geben Sie die Gruppentafel der Diedergruppe D_4 des Quadrates an und zeigen Sie, dass D_4 isomorph zu einer Permutationsgruppe der S_4 ist. Verwenden Sie die Bezeichnungen:



   b_0 identische Abbildung
   b_1, b_2, b_3, b_4 Spiegelung an den entsprechenden Geraden
   b_5, b_6, b_7 Drehungen entgegen dem Uhrzeigersinn:
   b_5 um $\frac{\pi}{2}$, b_6 um π, b_7 um $\frac{3\pi}{2}$

2. Geben Sie alle abelschen Untergruppen der D_3 und D_4 an.

3. Geben Sie je einen nichttrivialen Normalteiler der D_3 und D_4 an!

4. Sei $S[0,1]$ die Menge aller bijektiven Abbildungen des Intervalls $[0,1]$ auf sich. Ist $S[0,1]$ versehen mit der Hintereinanderausführung einer Gruppe? Ist diese abelsch?

5. Zeigen Sie, dass die Menge M von Funktionen $f_i : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, gegeben durch $f_1 = t$, $f_2 = \frac{1}{t}$, $f_3 = -t$, $f_4 = -\frac{1}{t}$ bezüglich der Komposition eine abelsche Gruppe der Ordnung 4 bildet (Gruppentafel). Ist diese isomorph zur $\mathbb{Z}_4$ oder V_4?

6. Lösen Sie alle mit **(HA)** gekennzeichneten Aufgaben der 10. Übung!