Mathematik für Physiker und Computational Science Studenten

1. Übung – Wiederholung

---

1. Beweisen Sie folgende Aussagen:
   (a) Es gilt $|x| \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.
   (b) Es gilt $|x| = 0$ dann und nur dann, wenn $x = 0$.
   (c) $|x \cdot y| = |x| \cdot |y| \, \forall x, y \in \mathbb{R}$.
   (d) Es gilt die Dreiecksgleichung $|x + y| \leq |x| + |y| \;\; \forall x, y \in \mathbb{R}$.
   (e) $||x| - |y|| \leq |x - y| \;\; \forall x, y \in \mathbb{R}$.
   (f) **(HA)** $||y - x| - |z - y|| \leq |x - z| \;\; \forall x, y, z \in \mathbb{R}$.
2. Sei $a \geq 0$ fixiert und $x \in \mathbb{R}$. Dann gilt $|x| \leq a$ genau dann, wenn $-a \leq x \leq a$ gilt.
3. Welche $x \in \mathbb{R}$ erfüllen die Ungleichungen bzw. Gleichungen
   (a) $|x - 2| \geq 10$, (b) **(HA)** $|x| > |x + 1|$, (c) $|x + 2| + |x - 2| \leq 12$,
   (d) **(HA)** $|x+2|-|x| > 1$, (e) $|x-1| \cdot |x-2| = 2$, (f) **(HA)** $|x|+|x+1|+|x-1| = 3$?
4. Veranschaulichen Sie in der xy-Ebene die Lösungsmengen folgender Ungleichungen:
   (a) $|x| + |y| \leq 1$, (b) $|x + y| \leq 1$, (c) $1 \leq |x - y| \leq 2$.
5. Verwenden Sie die Beziehungen

   $$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1, \;\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}, \;\tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1, \;\cos \frac{\pi}{2} = 0, \;\sin \frac{\pi}{2} = 1\,,$$

   und

   $$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta\,,$$

   zum Nachweis der Richtigkeit folgender Formeln:
   (a) $\sin\left(\alpha \pm \frac{\pi}{2}\right) = \pm \cos \alpha$,
   (b) $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$,
   (c) $\tan(\alpha \pm \beta) = \dfrac{\tan \alpha \pm \tan \beta}{1 \mp \tan \alpha \tan \beta}$,
   (d) **(HA)** $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$,
   (e) $\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha+\beta}{2} \cos \frac{\alpha-\beta}{2}$,
   (f) **(HA)** $2 \sin \alpha \sin \beta = \cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)$.
6. Lösen Sie folgende Gleichungen bzw. Gleichungssysteme:
   (a) $\sqrt{x} + \sqrt[4]{x} = 12$,
   (b) **(HA)** $\dfrac{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}} = 5$,
   (c) $\sqrt{x+y} + \sqrt{x-y} = a, \sqrt{x+y} - \sqrt{x-y} = b \quad (a, b \in \mathbb{R}$ fixiert),
   (d) **(HA)** $\left(\frac{3}{7}\right)^{3x-7} = \left(\frac{7}{3}\right)^{7x-3}$.

7. Man löse folgende Ungleichungen:

   (a) $3^{4x^2-7x-14} \geq 9^{x^2-3x-4}$, (b) **(HA)** $2^{x+2} - 2^{x+3} - 2^{x+4} > 5^{x+1} - 5^{x+2}$,
   (c) $\sqrt{x+3} > \sqrt{x-9} + \sqrt{5-x}$, (d) $\sqrt{2+x-x^2} > x-4$.

8. Dividieren sie:

   (a) $(21a^3 - 34a^2b + 25b^3) : (7a + 5b)$, (b) **(HA)** $(9x^3 + 2y^3 - 7xy^2) : (3x - 2y)$.

9. Geben Sie zu folgenden Ausdrücken die quadratische Ergänzung an:

   (a) $x^2 + 6x$, (b) $z^2 - \frac{1}{7}z$, (c) **(HA)** $\frac{16}{49}t^2 - \frac{16}{21}t$.

10. Seien m, n, k natürliche Zahlen. Sind folgende Aussagen wahr:

    (a) Wenn k die Zahl m teilt ($k|m$) und m die Zahl n teilt ($m|n$) dann gilt $k|n$.
    (b) Wenn $k|m$ und $k|n$ gilt, dann folgt $k|m+n$.
    (c) Wenn k das Produkt $m \cdot n$ teilt, dann teilt k die Zahl m oder die Zahl n.
    (d) Wenn m und n den Rest r bei Division durch k lassen, dann lässt $m+n$ auch den Rest r.
    (e) **(HA)** Gelten die Aussagen (b) und (d) für das Produkt $m \cdot n$?

    Falls die Aussagen im allgemeinen nicht gelten, geben Sie Bedingungen für deren Gültigkeit an!

11. Gibt es unendlich viele Primzahlen? Beweisen Sie Ihre Antwort!

12. Zeigen Sie, dass folgende Zahlen irrational sind:

    (a) $\sqrt{2}$, (b) **(HA)** $\sqrt{5}$.

Zusatz: Beweisen Sie: Seien $a_1, a_2, \ldots, a_n$ von Null verschiedene natürliche Zahlen. Dann existiert genau ein positiver größter gemeinsamer Teiler $d = ggT(a_1 \ldots a_n)$ dieser Zahlen. Dieser läßt sich in der Form

$$d = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n \text{ mit } x_i \in \mathbb{Z}$$

darstellen. (Literatur: z.B. Kochendörffer: Einführung in die Algebra)

1. Hausaufgabe

---

1. Zeigen Sie, dass für beliebige $x \in \mathbb{R}$ gilt

   (a) $\pm x \leq |x|$, (b) $|x| = |-x|$.

2. Machen Sie den Nenner rational:

   (a) $\frac{1}{\sqrt{5}}$, (b) $\frac{1}{\sqrt{3}+2}$, (c) $\frac{1}{2\sqrt{7}+\sqrt{5}}$.

3. Lösen sie alle mit HA gekennzeichneten Aufgaben der 1. Übung!

4. Bestimmen Sie den größten gemeinsamen Teiler (ggT) und das kleinste gemeinschaftliche Vielfache der Zahlen (kgV) der Zahlen a_1, a_2:

   (a) $a_1 = 240, a_2 = 500$, (b) $a_1 = 36, a_2 = 25$,
   (c) $a_1 = 81, a_2 = 9$, (d) $a_1 = 306, a_2 = 205$.