

Lineare Algebra I

6. Übung – Mächtigkeit von Mengen

1. Man zeige: Sind A überabzählbar und $B \subset A$ höchstens abzählbar, so ist $A \setminus B$ überabzählbar.
2. Sind folgende Mengen abzählbar
 - (a) $M = \{x \in \mathbb{R} : x = \sqrt[n]{m}, m, n \in \mathbb{N}\}$,
 - (b) die Menge aller komplexen Lösungen von Gleichungen der Form $x^2 + px + q = 0$ mit $p, q \in \mathbb{Z}$,
 - (c) die Menge aller Funktionen $f : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$,
 - (Z) die Menge der algebraischen Zahlen.
3. Geben Sie eine Bijektion zwischen folgenden gleichmächtigen Mengen an !
 - (a) $(-\infty, \infty)$, $(0, \infty)$,
 - (b) $(-\infty, \infty)$, $(0, 1)$,
 - (c) $[0, 1]$, $(0, 1]$.
4. Gilt $[0, 1) \times [0, 1) \sim [0, 1)$? (Begründung)
5. Auf dem Mars steht ein Hotel mit unendlich vielen durchnummerierten Zimmern, welches voll belegt ist. (Der Einfachheit halber nehmen wir an, dass jeder Gast sein eigenes Zimmer hat.)
 - (a) Es kommen noch zwei Herren, die ebenfalls in diesem Hotel wohnen möchten. Ist dies möglich?
 - (b) 1100 Gäste reisen ab. Wie ist die Belegung des Hotels?
 - (c) Abzählbar unendlich viele Gäste reisen an. Können diese noch untergebracht werden? Wenn ja, wie?
 - (d) Derartige Hotels stehen auf allen Sternen. Aufgrund einer Havarie im Kosmos müssen (abzählbar) unendlich viele geschlossen werden. Kann unser Hotel den dadurch entstandenen Zimmerbedarf decken?
 - (e) Der Hotelchef wird vom gastronomischen Zentrum gebeten, alle möglichen Zimmerbelegungen aufzuschreiben. Er schreibt unendlich viele durchnummerierte Varianten auf. Das gastronomische Zentrum ist jedoch nicht zufrieden. Warum?
6. Es seien M eine beliebige nichtleere Menge und $P(M)$ die Potenzmenge von M . Gibt es eine Bijektion zwischen M und $P(M)$?
7. Zeigen Sie, dass eine Menge genau dann unendlich ist, wenn sie zu einer ihrer echten Teilmengen gleichmächtig ist.

6. Hausaufgabe

1. Zeigen Sie, dass für beliebige $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ die Menge $\{q \in \mathbb{Q} : a < q < b\}$ abzählbar ist.
2. Sind folgende Mengen abzählbar
 - (a) $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$,
 - (b) $\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$,
 - (c) die Menge der irrationalen Zahlen,
 - (d) Menge der Primzahlen,
 - (e) Menge aller Funktionen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$ wobei $a, b \in \mathbb{Q}$,
 - (f) Menge aller Funktionen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$ wobei $a \in \{0, 1\}$, $b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$?
3. Geben Sie eine Bijektion zwischen folgenden gleichmächtigen Mengen an!
 - (a) $[0, 1)$, $(0, 1]$,
 - (b) $(0, 1)$, $[0, 2]$,
 - (c) $[0, 1]$, $(-\infty, \infty)$.
4. Seien A, B Mengen. Zeigen Sie: Aus $A \sim C$ und $B \sim D$ folgt $A \times B \sim C \times D$. ($A \sim B$ bedeutet A gleichmächtig zu B .)
Hinweis: Konstruieren Sie eine Bijektion!

Zusatz: Die Mengen A, B aus einem Mengensystem \mathcal{M} haben die Kardinalzahlen a, b . Folgt aus $a \leq b$ und $b \leq a$ die Gleichmächtigkeit von A und B ?