

# Lineare Algebra I

## 2. Übung – Analytische Geometrie in der Ebene

---

1. Formulieren und beweisen Sie den Satz des Thales!
2. Sei  $A = (0, 0)$ ,  $B = (0, 4)$ . Was ist der geometrische Ort aller Punkte  $P$ , die
  - (a)  $|AP| + |PB| = 8$ ,
  - (b)  $|AP| + |PB| = 4$ ,
  - (c)  $|AP| + |PB| = 2$ .erfüllen?
3. Finden Sie alle Schnittpunkte der beiden Kurven
  - (a)  $9x^2 + 25y^2 = 225$ ,  $x + y = 3$ ,
  - (b)  $x^2 + 4y^2 = 4$ ,  $4x^2 + y^2 = 4$ ,
  - (c) **(HA)**  $x^2 + 2y^2 = 3$ ,  $2x^2 - y^2 = 3$ ,und skizzieren Sie die jeweilige Konstellation!
4. Finden Sie die Koordinaten der Brennpunkte der Hyperbel mit der Gleichung  $x^2 = a^2 + y^2$  und den Winkel zwischen ihren beiden Asymptoten.
5. Machen Sie sich klar, dass der Graph der Funktion  $y = \frac{1}{x}$  eine Hyperbel ist. Geben Sie dazu eine Hyperbel in Normallage
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$
an, die zur obigen Kurve kongruent ist. Wo liegen die jeweiligen Brennpunkte und Asymptoten?
6. Seien  $F_1$  und  $F_2$  die Brennpunkte einer Ellipse  $E$ . Zeigen Sie, dass jeder Strahl, der vom Brennpunkt  $F_1$  ausgeht, an der Ellipse so gespiegelt wird, dass er im Brennpunkt  $F_2$  einfällt!
7. Untersuchen Sie, welche Art von Kegelschnitt sich hinter folgender Gleichung verbirgt:
  - (a)  $x^2 - 4xy + 3y^2 + 2x - 8y - 4 = 0$ ,
  - (b)  $3xy + 4x - 2y - \frac{8}{3} = 0$ ,
  - (c) **(HA)**  $xy - 4x + 2y - 4 = 0$ ,
  - (d)  $x^2 - 2xy + 2y^2 + 2x - 6y + 1 = 0$ ,
  - (e) **(HA)**  $x^2 - 2xy + y^2 + 4x + 4y - 20 = 0$ ,
  - (f) **(HA)**  $4x^2 - 4xy + 3y^2 + 8x - 4y + 3 = 0$ .

**Zusatz 1:** Seien folgende Geraden des  $\mathbb{R}^2$  gegeben

$$g_1 : 2x + y - 1 = 0, \quad g_2 : x - 3y = 0, \quad g_3 : y + 1 = 0.$$

Man ermittle die Gleichung der Hyperbel mit dem Asymptoten  $g_1, g_2$ , die die Gerade  $g_3$  berührt!

**Zusatz 2:** Beweisen Sie, dass jede Tangente an eine Hyperbel mit dieser nur einen Punkt gemeinsam hat!

**Zusatz 3:** Formulieren und beweisen Sie eine zu Aufgabe 6 dieser Übung analoge Aussage für die Hyperbel.

## 2. Hausaufgabe

---

1. Im Parallelogramm  $ABCD$  seien die drei Eckpunkte  $A = (x_a, y_a)$ ,  $B = (x_b, y_b)$  und  $C = (x_c, y_c)$  gegeben. Berechnen sie die Koordinaten von  $D$  und den Flächeninhalt des Parallelogramms!
2. Auf der Parabel  $y^2 = 6x$  ist ein Punkt  $P$  zu bestimmen, dessen Abstand zum Brennpunkt der Parabel gleich  $\frac{9}{2}$  ist.
3. Bestimmen Sie die Exzentrizität und die Koordinaten der Brennpunkte folgender Ellipsen bzw. Hyperbeln
  - (a)  $x^2 + 4y^2 = 1$ ,
  - (b)  $2x^2 + y^2 = 8$ ,
  - (c)  $x^2 - 4y^2 = 1$ ,
  - (d)  $4x^2 - y^2 = 8$ .

Wenn Hyperbeln vorliegen, geben Sie auch die Gleichungen der Asymptoten sowie den Cosinus des von ihnen eingeschlossenen (kleineren) Winkels an!

4. Für welche Werte von  $a$  haben die Parabel  $y^2 = x$  und der Kreis  $(x - a)^2 + y^2 = 1$  genau 4, 3, 2, 1 bzw. keine gemeinsame(n) Punkt(e)?
5. Lösen Sie alle mit **(HA)** gekennzeichneten Aufgaben der 2. Übung!