Lineare Algebra II

19. Übung – Operatoren in Räumen mit Skalarprodukt

---

1. Seien $A_j \in \mathbb{C}^{n_j \times n_j}$ unitäre Matrizen, $j = 1, 2, \ldots k$. Ist dann $B = \operatorname{diag}(A_j)_{j=1}^k$ unitär?

2. Seien X unitärer Raum, $A \in \mathcal{L}(X)$. Untersuchen Sie, ob A normaler Operator ist, wenn A als
   (a) selbstadjungiert, (b) unitär, (c) schiefhermitesch, d.h. $A^* = -A$
   vorausgesetzt wird.

3. Seien X unitärer, endlichdimensionaler Raum, $A \in \mathcal{L}(X)$.
   (a) Zeigen Sie: A ist normal genau dann, wenn $\|Ax\| = \|A^*x\| \ \forall x \in X$ gilt.
   (b) Seien $f(t)$ ein Polynom, A normaler Operator. Zeigen Sie, dass $f(A)$ normaler Operator ist.

4. Finden Sie zu folgender Basis des $\mathbb{R}^3$ eine biorthogonale Basis $\{b_j\}_{j=1}^3$

   (a) $a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad a_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad a_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix},$

   (b) $a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad a_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad a_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$

5. Für welche $\varphi \in \mathbb{R}$ sind folgende reelle Matrizen positiv definit:

   (a) $A = \begin{bmatrix} \sin\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & 1 \end{bmatrix},$ (b) $B = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \varphi & 1 \\ \varphi & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$?

6. Sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Man zeige: Die Matrix $A^T A$ ist positiv definit genau dann, wenn $\operatorname{rang} A = n$ gilt.

7. Sie g Bilinearform auf $\mathbb{R}^n (\mathbb{C}^n)$. Zeigen Sie, dass g genau dann symmetrisch (hermitesch) ist, wenn die zugehörige Gramsche Matrix symmetrisch (hermitesch) ist.

8. Seien g_a, g_b Bilinearformen auf $\mathbb{R}^2, \mathbb{C}^3$ gegeben durch

   $$g_a\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}\right) = \det \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{bmatrix}, \quad g_b\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}\right) = x_1\overline{y}_1 + x_3\overline{y}_3 .$$

   Geben Sie die entsprechenden Gramschen Matrizen G_a, G_b bezüglich der Standardbasen an! Untersuchen Sie, ob die Bilinearformen symmetrisch bzw. hermitesch, positiv definit oder indefinit sind!

9. Klassifizieren Sie mittels Hauptachsentransformation (und Koordinatenverschiebung) folgende Kurven (Aufgaben (a) und (b)) bzw. Flächen (Aufgabe (c) und (Z)) 2. Ordnung:
   (a) $x_1x_2 - 4x_1 + 2x_2 - 4 = 0,$
   (b) $x_1^2 - 4x_1x_2 + 4x_2^2 + x_1 - 2x_2 - \frac{1}{4} = 0,$
   (c) $2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) = 0,$
   (Z) $2x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 - 6x_1x_3 + 4x_2x_3 - 2x_1 + 10x_3 + 5 = 0.$