Lineare Algebra II

17. Übung – Eigenwerte, Eigenvektoren

---

1. Geben Sie für folgende Matrizen $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ das charakteristische Polynom, das Spektrum, die Eigenwerte, deren algebraische und geometrische Vielfachheit sowie ein System zugehöriger Eigenvektoren an:

   (a) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$, (b) $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, (c) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$,

   (d) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1+\mathbf{i} \\ 1-\mathbf{i} & 1 \end{bmatrix}$, (e) $A = \begin{bmatrix} 1+\mathbf{i} & -\mathbf{i} \\ \mathbf{i} & 1-\mathbf{i} \end{bmatrix}$,

   (f) $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$, (g) $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 5 \end{bmatrix}$, (h) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

   Geben Sie für jede der Matrizen jeweils einen nichttrivialen invarianten Teilraum an! Welche Matrizen A sind diagonalisierbar? Geben Sie in diesem Fall eine entsprechende Transformationsmatrix T an, so dass $T^{-1}AT$ Diagonalgestalt hat.

2. Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ symmetrisch, reell. Zeigen Sie: Das Spektrum von A ist reell, alle Eigenvektoren können reell gewählt werden, und Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten sind orthogonal!

3. Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Zeigen Sie:

   (a) A hat genau dann den Eigenwert $\lambda_0 = 0$, wenn A nicht invertierbar ist. In diesem Fall ist $n-$ rank A die geometrische Vielfachheit von $\lambda_0 = 0$.

   (b) Wenn A invertierbar ist und λ ist Eigenwert von A, dann ist λ^{-1} Eigenwert von A^{-1}.

4. Eine reelle, reguläre Matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ heißt *orthogonale Matrix* wenn $A^{-1} = A^T$ gilt. Überprüfen Sie, ob folgende Aussagen für orthogonale Matrizen A gelten:

   (a) A hat mindestens einen reellen Eigenwert!

   (b) Alle Eigenwerte von A liegen auf dem Einheitskreis!

   (c) Wenn λ Eigenwert von A ist, dann ist auch λ^{-1} Eigenwert von A!

5. Untersuchen Sie, welche der folgenden Matrizen mit Hilfe einer unitären (orthogonalen) Matrix B auf Diagonalgestalt transformiert werden können, d.h. es gilt $\overline{B}^T AB = D$ mit D Diagonalmatrix. Geben Sie die Matrix B an:

   (a) Alle Matrizen aus Aufgabe 1 dieser Übung,

   (b) $A = J_n = [\delta_{i,n-j+1}]_{i,j=1}^n$,

   (c) $A = [a_{ij}]_{i,j=1}^n$ mit $a_{ij} = 1 \ \forall_{i,j}$,

   (d) $A = [\delta_{i,n-j+2}]_{i,j=1}^n$.

6. Seien $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ die Eigenwerte der Matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ und $g(x)$ ein Polynom, $g(x) \in \mathbb{C}_m[x]$. Dann sind $g(\lambda_1), g(\lambda_2), \ldots, g(\lambda_n)$ die Eigenwerte von $g(A)$. Wie sehen zugehörige Eigenvektoren aus?

7. Seien $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ ähnliche Matrizen. In welchen Zusammenhängen stehen Eigenwerte und Eigenvektoren von A und B?

8. Sei $\phi(x) = x^n - a_{n-1}x^{n-1} - a_{n-2}x^{n-2} - \cdots - a_1 x - a_0$ ein Polynom n-ten Grades mit komplexen Koeffizienten. Die $n \times n$ Matrix

$$C_\phi = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} \end{bmatrix}$$

heißt die Begleitmatrix von $\phi(x)$.

   (a) Zeigen Sie, dass die Eigenwerte von C_ϕ die Nullstellen von $\phi(x)$ sind!

   (b) Seien alle Nullstellen $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}$ von $\phi(x)$ einfach. Zeigen Sie, dass dann C_ϕ folgende Diagonalisierung gestattet

   $$\mathcal{V}_n^{-1} C_\phi \mathcal{V}_n = \operatorname{diag}(\lambda_0, \dots, \lambda_{n-1})$$

   mit $\mathcal{V}_n = \left[\lambda_j^i\right]_{i,j=0}^{n-1}$ (transponierte Vandermonde Matrix).
   (Was ändert sich, wenn die Nullstellen $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}$ nicht einfach sind?)

   (c) Betrachten Sie den Spezialfall $\phi(x) = x^n - 1$, und zeigen Sie, dass in diesem Fall C_ϕ durch eine unitäre Transformation F_n (Fouriermatrix) auf Diagonalgestalt gebracht werden kann.

   (d) Zeigen Sie, dass Toeplitzmatrizen der Gestalt

   $$Z_n = \begin{bmatrix} c_0 & c_1 & \dots & \dots & c_{n-1} \\ c_{n-1} & c_0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ c_{n-2} & c_{n-1} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & c_0 & c_1 \\ c_1 & \dots & \dots & c_{n-1} & c_0 \end{bmatrix} \quad \text{(Zirkulante)}$$

   in einer orthogonalen Basis von Diagonalgestalt D_n sind. Geben Sie D_n und die orthogonale Basis an!

9. Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der tridiagonalen $n \times n$ Matrix $A = \text{tridiag}(1, 0, 1)$!

10. Man ermittle alle Eigenwerte von A, A^2, A^3, A^4 sowie die Matrix A^4, wenn $A \in \mathbb{C}^{4\times 4}$ wie folgt gegeben ist:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \beta & 0 & \alpha \\ \beta & 0 & \alpha & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & \beta \\ \alpha & 0 & \beta & 0 \end{bmatrix} \quad \text{mit } \alpha = \frac{1}{2}(1-i),\ \beta = -\frac{1}{2}(1+i)\,.$$

11. Die n-te Fibonaccizahl F_n ist rekursiv gegeben durch $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, $n \geq 2$, mit $F_0 = 0, F_1 = 1$. Bestimmen Sie mithilfe von Eigenwerten und Eigenvektoren eine explizite Darstellung von F_n!

17. Hausaufgabe

---

1. Bestimmen Sie für folgende symmetrische Matrizen $A_i \in \mathbb{C}^{n\times n}$ $(i = 1, 2, 3)$ das charakteristische Polynom, die Eigenwerte, deren algebraische Vielfachheit sowie ein dazugehöriges System von Eigenvektoren. Geben Sie die geometrische Vielfachheit der Eigenwerte sowie eine orthogonale Matrix B an, so dass $B^T AB$ Diagonalgestalt hat

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & -1 \\ 3 & 3 & 7 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \qquad A_3 = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 2 & 8 & 6 \\ 3 & 6 & 13 \end{bmatrix}.$$

   Geben Sie für jede der Matrizen einen nichttrivialen, zweidimensionalen, invarianten Unterraum an! (Kurze Begründung.)

2. Geben Sie alle Eigenwerte und Eigenvektoren folgender Vandermondematrizen $V_n(c) \in \mathbb{C}^{n\times n}$ an!

   (a) $n = 3,\ c = (1, \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{3}\mathbf{i}), \frac{1}{2}(-1 - \sqrt{3}\mathbf{i}))$, (b) $n = 4,\ c = (1, \mathbf{i}, -1, -\mathbf{i})$.

   Gibt es für diese beiden Matrizen Konstanten b_n so, dass $b_n V_n(c)$ unitär wird, wenn ja, ermitteln Sie diese Konstanten!

3. Sei A reguläre $n \times n$ Matrix, f das charakteristische Polynom von A. Zeige, dass $g(t) = (-t)^n \frac{1}{\det A} f(\frac{1}{t})$ das charakteristische Polynom von A^{-1} ist!

4. Man zeige, dass 6 kein Eigenwert von $A^{10} - 7A^3 + A^2 + 7I$ mit $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ ist!

5. Gibt es eine $n \times n$ Matrix für die jeder Vektor des $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ Eigenvektor zum Eigenwert 1 ist?

6. Sei $A \in \mathcal{L}(L)$, $\dim L < \infty$. Zeigen Sie, dass $U :=\ \ker\,(A - \lambda I)^k$ für beliebig $k \in \mathbb{N}$, ein invarianter Teilraum für A ist.

7. Sei A_1 die Matrix aus Aufgabe 1 dieser Hausaufgabe.

   (a) Wie sieht A_1^n aus (Beweis)?

   (b) Ist A_1^n in einer orthogonalen Basis von Diagonalgestalt? Wenn ja, geben Sie diese Basis und die Diagonalmatrix an!

8. Zeigen Sie: Eine reelle, symmetrische, orthogonale Matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ hat nur die Eigenwerte $+1$ oder -1.

Zusatz: Seien U_n die Shift-Matrix aus Aufgabe 7 der 12. Übung und e_1, e_n der erste und letzte Vektor der kanonischen Basis in $\mathbb{R}^n$. Begründen Sie, dass die Matrix

$$C_n = U_n + U_n^T + e_1 e_n^T + e_n e_1^T \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

diagonalisierbar ist und geben Sie ihre Eigenwerte und Eigenvektoren an!