Lineare Algebra II

15. Übung – Polynome

Sei $\mathcal{P}_n$ der lineare Raum (über $\mathbb{R}$) aller reellen Polynome vom Grad $\leq n$.

1. Geben Sie für folgenden Differentialoperator $A : \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_2$ die Matrixdarstellung in den kanonischen Basen an:

   $$(Af)(x) = x^2 f''(x) + (x-1)f'(x) - 2f(x)\,.$$

   Lösen Sie die Differentialgleichung

   $$(Af)(x) = 2x^2 - 3x - 3\,.$$

2. (a) Geben Sie alle Polynome $p(x) \in \mathcal{P}_4$ an, für die gilt

   $$p(1) = p(-2) = -p(-1) = \frac{p(2)}{9} = -3p(0) = 3\,. \tag{1}$$

   (b) Gibt es ein Polynom dritten Grades, welches diese Bedingungen (1) erfüllt?

   (c) Man bestimme alle Polynome fünften Grades, die diese Bedingungen (1) erfüllen.

   (d) Verallgemeinern Sie Ihre Resultate zu (a), (b) und (c)!

3. Es seien n verschiedene reelle Zahlen $t_1, \ldots, t_n$ sowie weitere reelle Zahlen $b_1, \ldots, b_n$ gegeben.

   (a) Zeigen Sie, dass es genau ein Polynom $p(x) \in \mathcal{P}_{n-1}$ gibt, so dass gilt

   $$p(t_i) = b_i \;\text{ für }\; i = 1, 2, \ldots, n\,. \tag{2}$$

   (b) Bildet das Mengensystem $\{\ell_j(x)\}_{j=1}^n$ mit

   $$\ell_j(x) = \prod_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n} \frac{x - t_i}{t_j - t_i}$$

   eine Basis in $\mathcal{P}_{n-1}$?

   (c) Zeigen Sie, dass das Polynom

   $$p(x) = \sum_{j=1}^{n} b_j \ell_j(x)$$

   die Interpolationsbedingungen (2) erfüllt!

(d) Geben Sie einen rekursiven Algorithmus zur Bestimmung von $p(x)$ an. Verwenden Sie dabei die Darstellung

$$p(x) = a_0 + \sum_{i=1}^{n-1} a_i \prod_{j=1}^{i} (x - t_j)\,.$$

4. Lösen Sie die Aufgabe 2(a) mit Hilfe der Resultate von 3(c) und 3(d).

Zusatz: Es seien $f_1(x), \ldots, f_n(x)$ Polynome aus $\mathcal{P}_{n-2}$ und $a_1, \ldots, a_n$ beliebige reelle Zahlen. Man zeige

$$\text{rang } \left[f_j(a_i)\right]_{i,j=1}^{n} < n\,.$$

---

15. Hausaufgabe

1. Lösen Sie die Differentialgleichung $(Bf)(x) = x^2 - 5$, wenn

$$B : \mathcal{P}_3 \to \mathcal{P}_3,\ (Bf)(x) = xf'''(x) + (Af)(x)$$

mit $A : \mathcal{P}_3 \to \mathcal{P}_3$ analog zu Aufgabe 1 der 15. Übung definiert.

2. Gibt es in $\mathcal{P}_2$ ein Polynom, welches an den Stellen $x_i = i$ $(i = 1, 2, 4)$ die gleichen Funktionswerte annimmt wie die Funktion $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$?
Wenn ja, geben Sie die Koordinaten dieses Polynoms in der kanonischen Basis und in der Basis $\{(x-1)^k\}_{k=0}^{2}$ an!

3. Lösen Sie die Aufgabe 2(a), (b), (c) der 15. Übung unter den (gegenüber (1)) geänderten Bedingungen

   (a) $p(1) = p(-1) = 1,\ p(0) = p(2) = 0,\ p(-2) = 4,$

   (b) $p(0) = 1,\ p(1) = 4,\ p(-1) = 0,\ p(-2) = -5,\ p(-3) = -20,$

   (c) $p(1) = \frac{1}{2}p'(1) = 3,\ p(-1) = -\frac{1}{2}p'(-1) = 3,\ p''(-1) = 14,$

   (d) $p(1) = p'(1) = p(-1) = p'(-1) = 0,\ p(0) = 4.$

4. Zeigen Sie, dass es nur ein Polynom $p(x) \in \mathcal{P}_{2n-1}$ gibt, dass folgende Bedingungen erfüllt

$$p(t_i) = b_i,\ p'(t_i) = b_i' \quad (i = 1, \ldots, n)\,,$$

wobei $t_1, \ldots, t_n$ paarweise verschiedene reelle Zahlen und $b_i, b_i' \in \mathbb{R}$ beliebig sind.