

Übungen zum Kurs Gewöhnliche Differentialgleichungen

7. Übung – Stabilitätstheorie, Rand- und Eigenwertprobleme

1. Man zeige, dass für das System

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -x_1 \\ \dot{x}_2 &= -x_2 + x_3^2 \\ \dot{x}_3 &= x_3\end{aligned}$$

und das entsprechende im Nullpunkt linearisierte System die Abbildung

$$H(x_1, x_2, x_3) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 - \frac{x_3^2}{3} \\ x_3 \end{bmatrix}$$

eine Realisierung des Theorems von Hartman-Grobman darstellt, d.h., für den Fluss $\Phi(t, x)$ des nichtlinearen Systems gilt $H(\Phi(t, x)) = e^{tA}H(x)$, wobei A die Matrix des linearisierten Systems ist.

2. Diskutieren Sie das Stabilitätsverhalten der Gleichgewichtspunkte des Systems $\dot{x} = v(x)$. Hinweis: Benutzen Sie das Hartman-Grobman-Theorem.

$$\begin{aligned}\text{(a)} \quad v(x) &= \begin{bmatrix} x_1^2 - x_2^2 - 1 \\ 2x_2 \end{bmatrix}, \\ \text{(b)} \quad v(x) &= \begin{bmatrix} x_2 - x_1^2 + 2 \\ 2x_2^2 - 2x_1x_2 \end{bmatrix}, \\ \text{(c)} \quad v(x) &= \begin{bmatrix} -4x_1 - 2x_2 + 4 \\ x_1x_2 \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

3. Zeigen Sie mit Hilfe einer Ljapunov-Funktion der Gestalt

$$L(x_1, x_2) = c_1(x_1 - x_1^0)^2 + c_2(x_2 - x_2^0)^2,$$

wobei $x^0 = (x_1^0, x_2^0)$ der zu untersuchende Gleichgewichtspunkt ist, dass der Nullpunkt für das System

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x + F(x)$$

im Falle

$$\begin{aligned}\text{(a)} \quad F(x) &= \begin{bmatrix} -x_1^3 - x_1x_2^2 \\ -x_2^3 - x_1^2x_2 \end{bmatrix} \text{ asymptotisch stabil,} \\ \text{(b)} \quad F(x) &= \begin{bmatrix} x_1^3 + x_1x_2^2 \\ x_2^3 + x_1^2x_2 \end{bmatrix} \text{ instabil,} \\ \text{(c)} \quad F(x) &= \begin{bmatrix} -x_1x_2 \\ x_1^2 \end{bmatrix} \text{ stabil, aber nicht asymptotisch stabil ist.}\end{aligned}$$

4. Bestimmen Sie in Abhängigkeit vom reellen Parameter $\lambda \neq 0$ alle Lösungen des Randwertproblems

$$y'' + \lambda^2 y = 0,$$

die die Bedingungen

$$(a) \ y(0) = 0, \ y(\pi) = 1, \qquad (b) \ y(0) = y(\pi) = 1,$$

erfüllen.

5. Für welche reellen Zahlen λ hat das Randwertproblem

$$y''(x) - 2y'(x) + \lambda y(x) = 0, \ y(0) = y(1) = 0$$

nichttriviale Lösungen?