

Übungen zum Kurs
Gewöhnliche Differentialgleichungen

**5. Übung – Lineare Differentialgleichungen höherer Ordnung,
Eulersche Differentialgleichungen**

1. Lösen Sie folgende homogene lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten

- (a) $y'' - y' - 6y = 0$,
- (b) $y'' + 5y' + 4y = 0$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 1$,
- (c) $y'' - a^2y = 0$ ($a \in \mathbb{R}$),
- (d) $y'' - 4y' + 13y = 0$,
- (e) $y'' + a^2y = 0$ ($a \in \mathbb{R}$),
- (f) $y'' + 2y' + y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$,
- (HA) (g) $y^{(4)} - 2y'' = 0$,
- (HA) (h) $y''' + y'' + y' + y = 0$, $y(0) = y'(0) = 0$, $y''(0) = 2$,
- (i) $y^{(4)} + y = 0$.

2. Lösen Sie folgende lineare inhomogene Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten mit der Ansatzmethode

- (HA) (a) $y^{(4)} + y = x$,
- (b) $y'' + 2y' + y = x$,
- (HA) (c) $y''' + 2y'' + y' = 2e^{3x}$,
- (d) $y''' - y = 6e^{-x}$,
- (e) $y'' + 4y = x^2 + \cos x$,
- (f) $y'' - 3y' + 2y = e^{3x}(x^2 + x)$,
- (g) $y'' - 6y' + 8y = e^{2x}$,
- (HA) (h) $y'' - y = e^x$,
- (HA) (i) $y^{(4)} - 2y'' = x^2 + x - 1$.

3. Lösen Sie mit einem komplexen Ansatz

- (a) $y'' + y = e^{2x} \cos 3x$,
- (HA) (b) $y'' + y' + y = e^{-\frac{x}{2}} \sin \frac{\sqrt{3}}{2}x$.

4. Lösen Sie mit Variation der Konstanten

- (a) $y''' + 2y'' + y' = 2e^{3x}$,
- (HA) (b) $y'' + 4y = \cos x$,
- (c) $y'' + 4y = \frac{1}{\sin 2x}$.

5. (HA) Bestimmen Sie die Lösung der Differentialgleichung

$$\ddot{u}(t) + 4\dot{u}(t) + 4u(t) = 25 \sin t,$$

die den Anfangsbedingungen $u(0) = 0$, $\dot{u}(0) = 1$ genügt!

Überprüfen Sie Ihr Ergebnis !

6. Lösen Sie mit Hilfe der Laplace-Transformation folgende Anfangswertprobleme

- (a) $y'' - 6y' + 9y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$,
- (b) $y'' + 4y' = \cos 2t$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$,
- (HA) (c) $y'' - 9y = e^t$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$,
- (HA) (d) $y'' + 2y' + y = te^{-t}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

7. Lösen Sie folgende Eulersche Differentialgleichungen

(a) $x^2 y'' + xy' + 2y = 0$,

(b) $x^2 y'' - 3xy' + 4y = \ln x$.

5. Hausaufgabe

Lösen Sie folgende Aufgaben der 5. Übung

1 (g), 1 (h), 2 (a), 2 (c), 2 (h), 2 (i), 3 (b), 4 (b), 5, 6 (c) und 6 (d).

Zusatz: Lösen Sie folgende Differentialgleichungen

(a) $x^2 y'' + xy' - y = x^3$,

(b) $x(x+1)y'' + (x+2)y' - y = x + \frac{1}{x}$.