Analysis I

3. Übung – Relationen

---

1. In der Menge $M = \{1, 2, 3, 4\}$ seien folgende Relationen R_1 bis R_6 erklärt:

$$\begin{aligned} R_1 &= \{(1,1),(2,2),(3,3)\}, \quad R_2 = \{(4,4)\} \cup R_1, \quad \textbf{(HA)}\ R_3 = R_2 \cup \{(1,3)\}\,, \\ R_4 &= R_3 \cup \{(3,1)\}, \quad \textbf{(HA)}\ R_5 = R_4 \cup \{(1,2),(2,1),(3,2),(2,3)\}\,, \\ R_6 &= R_2 \cup \{(2,3),(3,2),(1,2),(2,1)\}\,. \end{aligned}$$

   (a) Welche Relationen sind Äquivalenzrelationen?

   (b) Man ergänze die Relationen, die keine Äquivalenzrelationen sind, durch Hinzufügen möglichst weniger weiterer Elemente aus $M \times M$ zu einer Äquivalenzrelation.

   (c) Man bestimme jeweils alle Äquivalenzklassen.

   (d) Bestimmen Sie alle Äquivalenzrelationen, die als Faktormenge $\{\{1,2\},\{3,4\}\}$ haben.

2. Welche der folgenden Relationen auf der Menge X sind reflexiv, symmetrisch, transitiv, antisymmetrisch

   (a) $X = \mathbb{N},\ mR_an :\Leftrightarrow m + n$ gerade,
   (b) **(HA)** $X = \mathbb{N},\ mR_bn :\Leftrightarrow m + n$ ungerade,
   (c) $X = \mathbb{N},\ mR_cn :\Leftrightarrow |m - n| \leq 2$,
   (d) $X = \mathbb{N},\ mR_dn :\Leftrightarrow \frac{m}{n}$ Potenz von 2 mit ganzzahligen Exponenten,
   (e) $X = \mathbb{N},\ mR_en :\Leftrightarrow m|n$,
   (f) $X = \mathbb{R},\ xR_fy :\Leftrightarrow e^x = e^y$,
   (g) $X = \mathbb{R},\ xR_gy :\Leftrightarrow x^2 = y^2$,
   (h) $X = \mathbb{R},\ xR_hy :\Leftrightarrow x \geq y$,
   (i) $X = \mathbb{N},\ aR_ib :\Leftrightarrow a$ hat die gleichen Primteiler wie b,
   (j) $X =$ Menge der Menschen, $\widehat{☺}\ R_j\ \widetilde{☹} :\Leftrightarrow \widehat{☺}$ liebt $\widetilde{☹}$.

3. Welche der Relationen aus Aufgabe 2 sind Äquivalenzrelationen?
   Wie sieht die Faktormenge aus?

4. Welche der Relationen aus Aufgabe 2 sind Ordnungsrelationen?

5. Ist $\{X_n\}_{n \in I}$ eine Klasseneinteilung von $\mathbb{R}$? Wenn ja, dann geben Sie die dazugehörige Äquivalenzrelation an!

   (a) $X_n = (n-1, n),\ I = \mathbb{Z}$,

   (b) **(HA)** $X_n = [n-1, n],\ I = \mathbb{Z}$,

   (c) $X_n = [n-1, n),\ I = \mathbb{Z}$,

   (d) $X_n = \{x \in \mathbb{R} : |x| \in [n-1, n)\},\ I = \mathbb{N}$,

   (e) **(HA)** $X_n = \{x \in \mathbb{R} : |x| \in (n-1, n]\},\ I = \mathbb{N}$.

6. Folgt aus der Symmetrie und Transitivität einer Relation deren Reflexivität?
   (Begründung!)

7. Sei M eine (endliche) Menge mit vier Elementen.

   (a) Wieviel Relationen kann man auf M definieren?

   (b) Wieviel Äquivalenzrelationen kann man auf M definieren?

   (Z) Wie sehen die Resultate für eine beliebige endliche Menge aus?

3. Hausaufgabe

---

1. Lösen Sie alle mit **(HA)** gekennzeichneten Aufgaben der 3. Übung.

2. Untersuchen Sie, ob folgende Relationen auf X Äquivalenzrelationen sind:

(a)	$X = \mathbb{R}$,	$xRy :\Leftrightarrow |\cos x| = |\cos y|$
(b)	$X = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}\setminus\{0\}$,	$(a,b)R(c,d) :\Leftrightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$
(c)	$X = \mathbb{R}^n$,	$(x_j)_{j=1}^n R(y_j)_{j=1}^n :\Leftrightarrow x_j \leq y_j \ (j = 1, 2, \ldots, n)$
(d)	$X =$ Potenzmenge von Menge M,	$xRy :\Leftrightarrow x \subset y$,
(e)	$X = \mathbb{R}$	$xRy :\Leftrightarrow 5|(x - y)$.

   Geben Sie gegebenenfalls die Faktormenge an!

3. Man untersuche, ob folgende Relationen Äquivalenzrelationen sind:

   (a) $R \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \quad R = \{(a,b) : a - b \text{ ist rational}\}$,

   (b) $R \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \quad R = \{(a,b) : a + b \text{ ist rational}\}$,

   (c) $R \subset (\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \times (\mathbb{N} \times \mathbb{N}), \ R = \{((a,b),(c,d)) : a + d = b + c\}$.

Zusatz: Unter der Komposition $R_1 \circ R_2$ zweier Relationen R_1 und R_2 auf der Menge M versteht man alle Paare $(x,y) \in M^2$ für die ein $z \in M$ existiert, so dass $(x,z) \in R_1$ und $(z,y) \in R_2$ gilt. (Man schreibt $(x,y) \in R_1 \circ R_2$.)

(a) Geben Sie zwei symmetrische Relationen an, deren Komposition nicht symmetrisch ist!

(b) Seien auf $\mathbb{R}$ die Relationen

$$\begin{aligned} xR_1y \quad &:\Leftrightarrow \quad x \geq y - 1 \\ xR_2y \quad &:\Leftrightarrow \quad x \leq y + 1 \end{aligned}$$

gegeben. Wie kann $R_1 \circ R_2$ beschrieben werden? Ist $R_1 \circ R_2$ reflexiv, symmetrisch, transitiv, antisymmetrisch?

(c) Beantworten Sie diese Fragen, wenn statt R_2 die Relation $xR_2y :\Leftrightarrow x \geq y+1$ betrachtet wird.