

## Analysis II

### 17. Übung – Funktionenfolgen, Funktionenreihen

1. Man untersuche die Funktionenfolgen  $(f_n)$  auf gleichmäßige bzw. punktweise Konvergenz:

(a)  $f_n(x) = \frac{\sin nx}{n}$ ,  $-\infty < x < \infty$ ,    (b)  $f_n(x) = \sin \frac{x}{n}$ ,  $-\infty < x < \infty$ ,

(c)  $f_n(x) = \frac{1}{1+nx}$ ,  $x \in [0, 1]$ ,    (d) **(HA)**  $f_n(x) = x^n$ ,  $x \in [0, 1 - \varepsilon]$  ( $\varepsilon > 0$ ),

(e) **(HA)**  $f_n(x) = \frac{x}{1+n^2x}$ ,  $x \in [0, 1]$ .

2. Man untersuche folgende Reihen auf gleichmäßige Konvergenz:

(a)  $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ ,  $x \in (-q, q)$ ,  $0 < q < 1$ ,    (b)  $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ ,  $x \in (-1, 1)$ ,

(c) **(HA)**  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}$ ,  $x \in [-1, 1]$ ,    (d) **(HA)**  $\sum_{n=1}^{\infty} (x^n - x^{n-1})$ ,  $x \in [0, 1]$ ,

(e)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ ,  $x \in [a, b]$ ,  $-\infty < a < b < \infty$ , bzw. **(Z)**  $x \in \mathbb{R}$ ,

(f) **(HA)**  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n^2}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

3. **(HA)** Zeigen Sie, dass für eine  $2\pi$ -periodische, auf  $[-\pi, \pi]$  Riemann-integrierbare Funktion  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  und beliebiges  $\alpha \in \mathbb{R}$  gilt

$$\int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} f(x) dx = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx.$$

4. Zeigen Sie: Bei einer  $\pi$ -periodischen Funktion verschwinden die Fourier-Koeffizienten mit ungeraden Indizes.

5. Entwickeln Sie folgende Funktionen in eine Fourier-Reihe und geben Sie die Summe dieser Fourier-Reihe an:

(a)  $f(x) = \sin ax$  ( $a \neq 0$ ),  $x \in [-\pi, \pi]$ ,    (b)  $f(x) = |\cos x|$ ,

(c) **(HA)**  $f(x) = \begin{cases} \pi + x & : -\pi \leq x \leq 0, \\ \pi - x & : 0 < x \leq \pi, \end{cases}$

(d)  $f(x) = x \cos x$ ,  $-\pi \leq x \leq \pi$ ,    (e) **(HA)**  $f(x) = x \sin x$ ,  $-\pi \leq x \leq \pi$ .

6. Geben Sie, ausgehend von dem trigonometrischen System  $(e^{inx})_{-\infty}^{\infty}$  ein Orthonormalsystem (ONS) zur Entwicklung von Funktionen der Periode  $2\ell \neq 2\pi$  an, d.h. ein ONS bezüglich des Skalarprodukts

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\ell}^{\ell} f(x) \overline{g(x)} dx.$$

Wie berechnen sich die entsprechenden Fourier-Koeffizienten?

7. Seien  $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$   $2\pi$ -periodische Funktionen. In welchem Zusammenhang stehen die Fourier-Koeffizienten von  $f$  und  $g$ , wenn

(a)  $g(x) = f(-x)$ ,    (b)  $g(x) = f(x+h)$  ( $h = \text{const} \in \mathbb{R}$ )?