Analysis II

16. Übung – Anwendungen, uneigentliche Integrale, Riemann-Stieltjes Integrale

---

1. Wir betrachten die Funktion $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln x$.
   (a) Bestimmen Sie die Krümmung des Graphen dieser Funktion im Punkt $(1, 0)$!
   (b) Beweisen Sie, dass $(\cosh x)^2 - (\sinh x)^2 = 1$ ist!
   (c) Bestimmen Sie die Länge des Graphen dieser Funktion für $\sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{8}$. (Hinweis: Verwenden Sie (b).)
   (d) Berechnen Sie das Volumen V des Körpers, der bei Rotation des Graphen dieser Funktion für $1 \leq x \leq 2$ um die x-Achse entsteht!

2. Berechnen Sie die Mantelfläche F und das Volumen V des Rotationskörpers, der bei Rotation des Graphen der Funktion $f : (0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}\,,\ x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$ um die x-Achse entsteht.

3. (a) Machen Sie sich mit dem Begriff „Zykloide“ vertraut, und zeigen Sie, dass der Flächeninhalt unter einem Bogen der Zykloide gleich dreimal der des rollenden Kreises ist.
   (b) **(HA)** Machen Sie sich mit dem Begriff „Kardioide“ vertraut, und berechnen Sie, den durch diese Kurve eingeschlossenen Flächeninhalt. (Verwenden Sie die Polardarstellung!)

4. Berechnen Sie die folgenden uneigentlichen Integrale bzw. zeigen Sie deren Divergenz:
   (a) $\displaystyle\int_0^2 \frac{dx}{(x-1)^2}$ (b) $\displaystyle\int_2^6 \frac{dx}{\sqrt[3]{(4-x)^2}}$ (c) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-\alpha x}\,dx \quad (\alpha > 0)$
   (d) **(HA)** $\displaystyle\int_0^\infty e^{\alpha x}\sin(\beta x)\,dx \quad (\alpha < 0,\ \beta \in \mathbb{R})$ (e) **(HA)** $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{x \ln x}$
   (f) **(HA)** $\displaystyle\int_{\frac{2}{\pi}}^\infty \frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}\,dx$ (g) $\displaystyle\int_0^8 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$ (h) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\arctan x}{1+x^2}\,dx$ (i) **(HA)** $\displaystyle\int_0^\infty x e^{-x^2}\,dx$
   (j) **(HA)** $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{x^2+4x+9}$ (k) **(HA)** $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{x^3+1}$ **(Z)** $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}\,dx$

5. Berechnen Sie die folgenden Cauchyschen Hauptwerte:
   (a) v.p. $\displaystyle\int_{-1}^e \frac{dx}{x}$ (b) v.p. $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{dx}{x\ln x}$ (c) v.p. $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{\arctan x}{1+x^2}\,dx$
   (d) **(HA)** v.p. $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{1+x}{1+x^2}\,dx$ (e) **(HA)** v.p. $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \sin x\,dx$

6. Untersuchen Sie folgende Integrale auf Konvergenz:
   (a) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\arctan x}{x}\,dx$ (b) **(HA)** $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^3+1}}$ (c) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\ln x}$
   (d) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cot x\,dx$ (e) **(HA)** $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{e^x-1}}$ **(Z)** $\displaystyle\int_0^\infty x^\mu e^{-\alpha x}\,dx \quad (\alpha, \mu \in \mathbb{R})$

7. Berechnen Sie folgende Riemann-Stieltjes Integrale:

   (a) $\displaystyle\int_{-1}^3 x\,d\mu(x)\,,$ wobei $\mu(x) = \begin{cases} -1 & : \quad x = -1 \\ 0 & : \quad -1 < x < 2 \\ 1 & : \quad 2 \leq x \leq 3 \end{cases}$

(b) **(HA)** $\displaystyle\int_0^2 x\,d\mu(x)\,,$ wobei $\mu(x) = \begin{cases} -1 & : \quad 0 \le x < \frac{1}{2} \\ 0 & : \quad \frac{1}{2} \le x < \frac{3}{2} \\ 1 & : \quad x = \frac{3}{2} \\ 2 & : \quad \frac{3}{2} < x \le 2 \end{cases}$

(c) $\displaystyle\int_{-2}^2 x^2\,d\mu(x)\,,$ wobei $\mu(x) = \begin{cases} x+2 & : \quad -2 \le x \le -1 \\ 2 & : \quad -1 < x < 0 \\ x^2+3 & : \quad 0 \le x \le 2 \end{cases}$

16. Hausaufgabe

---

1. Der Graph der Funktion $y = x^{3/2}$ für $0 \le x \le 4$ ist ein Stück der *Neilschen Parabel* $y^2 = x^3$. Berechnen Sie die Länge dieses Bogens! Skizzieren Sie die Neilsche Parabel, und kennzeichnen Sie den berechneten Bogen.

2. Wir betrachten die Funktion $f(x) = \cosh x$ über dem Intervall $[-1, 1]$.

   (a) Bestimmen Sie die Krümmung des Graphen dieser Funktion im Punkt $(0, 1)$.

   (b) Bestimmen Sie das Volumen und die Mantelfläche des Rotationskörpers, der bei Rotation des Graphen dieser Funktion um die x-Achse entsteht! (Skizzieren Sie den Körper!)

3. Sei durch $F(x, y) = 0$ implizit eine Funktion $y = f(x)$, $x \in (a, b)$, gegeben. Bestimmen Sie die Krümmung dieser Funktion in $(x, f(x))$ unter ausschließlicher Verwendung partieller Ableitungen von F!

4. Berechnen Sie folgende Integrale:

   (a) $\displaystyle\int_0^\pi \frac{\tan\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx\,,$ (b) v.p. $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty x\cos x\,dx\,,$

   (c) $\displaystyle\int_{-a}^b (x+1)\,d\mu(x)$ mit $a, b > 0$ und $\mu(x) = \begin{cases} x & : \quad x < 0\,, \\ x+2 & : \quad x \ge 0\,. \end{cases}$

5. Berechnen Sie für $n \in \mathbb{N}$ und $[x] \in \mathbb{Z}$ mit $[x] \le x < [x] + 1$

   (a) $\displaystyle\int_0^n x\,d[x]\,,$ (b) $\displaystyle\int_0^n [x]\,dx\,.$

6. Lösen Sie die mit **(HA)** gekennzeichneten Aufgaben der 16. Übung.

Zusatz: Berechnen Sie $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_n^{n+p} \frac{\sin x}{x}\,dx\,,\ p = \text{const} > 0\,.$