Analysis II

15. Übung - Bestimmte Integration

---

1. Berechnen Sie die Fläche, die von den Graphen der Funktionen $f(x) = 2 - x^2$ und $g(x) = x^2 - 2x + \frac{3}{2}$ eingeschlossen wird.

2. Sei f über $[-a, a]$ integrierbar. Zeigen Sie:

   (a) Wenn f ungerade Funktion ist, dann gilt $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0.$

   (b) **(HA)** Wenn f gerade Funktion ist, dann gilt $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx.$

3. Berechnen Sie

   (a) $\displaystyle\int_{-1}^{1} x|x|\,dx\,,$ (b) $\displaystyle\int_{2}^{3,5} \frac{dx}{\sqrt{5+4x-x^2}}\,,$

   (c) $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{x\,dx}{a+bx}\,,$ (d) $\displaystyle\int_{0}^{\pi} \frac{x\,\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx\,,$

   (e) $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x\,dx\,,$ (f) $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{dx}{(x^2+1)^2}\,.$

   (Z) Ermitteln Sie eine Rekursionsformel für $J_n(x) = \displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+1)^n}\,,\ n \in \mathbb{N}.$

4. Zeigen Sie, dass für eine stetige Funktion $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ gilt

   (a) $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\,dx = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)\,dx\,,$

   (b) $\displaystyle\int_{0}^{\pi} x f(\sin x)\,dx = \frac{\pi}{2}\int_{0}^{\pi} f(\sin x)\,dx\,.$

5. Beweisen Sie folgende Abschätzungen:

   (a) $\displaystyle\frac{1}{2} < \int_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{4-x^2+x^3}} < \frac{\pi}{6},$

   (b) $\displaystyle\frac{1}{2} < \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x}\,dx < \frac{\sqrt{2}}{2}.$

   (c) **(HA)** $\frac{2\pi}{13} < \displaystyle\int_{0}^{2\pi} \frac{dx}{10+3\cos x} < \frac{2\pi}{7}\,.$

   (Z) $0 < \displaystyle\int_{100\,\pi}^{200\,\pi} \frac{\cos x}{x}\,dx < \frac{1}{100\,\pi}.$

6. Bestimmen Sie

   (a) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}\int_{a}^{x} \arctan y\,dy\,,$

   (b) **(HA)** $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \int_{0}^{x} \frac{\sqrt{1+t^4}\,dt}{x^3}\,,$

(c) $\lim_{x\to 0} x \int_x^1 \frac{\cos t}{t^2}\, dt\,.$

7. Sei $f : [0,\infty) \longrightarrow (0,\infty)$ stetig. Man zeige, dass die Funktion

$$\varphi : (0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}\,, \quad x \mapsto \frac{\displaystyle\int_0^x t\, f(t)\, dt}{\displaystyle\int_0^x f(t) dt}$$

monoton wachsend ist.

8. Seien $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ die Thomaesche Funktion (siehe Wikipedia) und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Signum Funktion $g(x) = \operatorname{sgn} x$. Zeigen Sie, dass f und g Riemann integrierbar über $[0,1]$ sind, $g \circ f$ aber nicht.

Zusatz: Es sei $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig und konkav. Man zeige, dass dann

$$(b-a)\,\frac{f(a)+f(b)}{2} \le \int_a^b f(x)\, dx \le (b-a)\, f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

gilt.

15. Hausaufgabe

---

1. Berechnen Sie den Flächeninhalt der Fläche, die von der Geraden $x = 0$ und den Graphen der Funktionen $y = \cos^2 x$ und $y = \sin^2 x$ begrenzt wird.

2. Für welche $x \in \mathbb{R}$ gilt $\displaystyle\int_x^1 \frac{dt}{1+t^2} = \int_1^{\frac{1}{x}} \frac{dt}{1+t^2}$?

3. Seien $f(x), g(x)$ stetig in $[a,b]$ und es gelte $f(x) \ge g(x)\, \forall x \in [a,b]$, wobei für ein $x_0 \in [a,b]$ $f(x_0) > g(x_0)$ ist. Dann gilt:
$$\int_a^b f(x)dx > \int_a^b g(x)dx\,.$$

4. Zeigen Sie, dass für stetiges f und $a > 0$ gilt:

   (a) $\displaystyle\int_0^a f(x)dx = \int_0^a f(a-x)dx\,,$ (b) $\displaystyle\int_0^a x^3 f(x^2)dx = \frac{1}{2}\int_0^{a^2} x f(x)dx\,.$

5. Welche Vorzeichen haben $\displaystyle\int_0^{2\pi} x \sin x\, dx$ und $\displaystyle\int_{-2}^{2} x^3 2^x\, dx$?

6. Seien $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, $f([a,b]) \subset [c,d]$ Riemann integrierbar über $[a,b]$ und $h : [c,d] \to \mathbb{R}$ stetig. Zeigen Sie, dass $h \circ f$ auch Riemann integrierbar über $[a,b]$ ist.

7. Lösen Sie die mit **(HA)** gekennzeichneten Aufgaben der 15. Übung.