Analysis II

14. Übung – Gleichmäßige Stetigkeit

---

1. Sei I ein beliebiges Intervall. Wann heißt eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ nicht gleichmäßig stetig auf I?

2. Zeigen Sie, dass die Funktion $f : \left(0, \frac{2}{\pi}\right] \to \mathbb{R},\ f(x) = \cos \frac{1}{x}$, nicht gleichmäßig stetig auf $\left(0, \frac{2}{\pi}\right]$ ist.

   (Vgl. Fichtenholz, Band I, Nr. 86 oder Beispiel 7.2 (2) im Skript.)

3. Untersuchen Sie die Funktionen aus Aufgabe 6 der 8. Übung auf gleichmäßige Stetigkeit!

   (HA) 6 (f), (g) und (h)

4. Sei $f : [A, \infty) \to \mathbb{R}$ stetig und $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = a$ mit a endlich! Zeigen Sie, dass dann f auf $[A, \infty)$ gleichmäßig stetig ist!

   (HA) Ist die Bedingung $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = a$ (a endlich) notwendig?

5. Sei I ein offenes Intervall. Beweisen Sie: Sei $f : I \to \mathbb{R}$ differenzierbar und die Ableitung f' auf I beschränkt. Dann ist f auf I gleichmäßig stetig.

   (HA) Gilt auch die Umkehrung: Wenn f differenzierbar und gleichmäßig stetig auf I ist, dann ist f' dort beschränkt?

6. Zeigen Sie: Jede Hölder-stetige Funktion ist auch gleichmäßig stetig.
   Gilt auch die Umkehrung? (Vgl. Wikipedia.)

---

14. Hausaufgabe

1. Sei $f : [-2, 2] \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} (x-1)^2 & : \ x \in [0, 2] \\ ax + b & : \ x \in [-2, 0) \end{cases} \qquad a, b \in \mathbb{R}\,.$$

   (a) Bestimmen Sie alle $a, b \in \mathbb{R}$ so, dass f eine stetige Funktion auf $[-2, 2]$ wird!

   (b) Untersuchen Sie die stetigen Funktionen aus (a) auf gleichmäßige Stetigkeit.

   (c) Bestimmen Sie alle $a, b \in \mathbb{R}$ so, dass f eine auf $(-2, 2)$ differenzierbare Funktion wird.

   (d) Untersuchen Sie die differenzierbaren Funktionen aus (c) auf gleichmäßige Stetigkeit.

2. Lösen Sie alle mit **(HA)** gekennzeichneten Aufgaben der 14. Übung!