

## Analysis II

### 12. Übung – Funktionen mehrerer Veränderlicher

Bezeichnungen:  $\Theta$  ist der Nullpunkt des  $\mathbb{R}^n$  ( $n = 2, 3$ );

$$x = (x_j)_{j=1}^n \in \mathbb{R}^n : \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) = \partial_j f(a) = f_{x_j}(a)$$

1. Man zeige, dass  $\lim_{x_1 \rightarrow 0} \lim_{x_2 \rightarrow 0} f(x_1, x_2)$  und  $\lim_{x_2 \rightarrow 0} \lim_{x_1 \rightarrow 0} f(x_1, x_2)$  existieren,  $\lim_{x \rightarrow \Theta} f(x)$  aber nicht:

$$(a) f(x_1, x_2) = \frac{x_1 - x_2}{x_1 + x_2} \quad (b) \text{ (HA) } f(x_1, x_2) = \frac{x_1^2 x_2^2}{x_1^2 x_2^2 + (x_1 - x_2)^2}$$

2. Man zeige, dass für  $f(x_1, x_2) = (x_1 + x_2) \sin \frac{1}{x_1} \sin \frac{1}{x_2}$  die Grenzwerte  $\lim_{x_1 \rightarrow 0} \lim_{x_2 \rightarrow 0} f(x_1, x_2)$  und  $\lim_{x_2 \rightarrow 0} \lim_{x_1 \rightarrow 0} f(x_1, x_2)$  nicht existieren, aber  $\lim_{x \rightarrow \Theta} f(x) = 0$  gilt.

3. Berechnen Sie

$$(a) \text{ (HA) } \lim_{x \rightarrow \Theta} \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1^4 + x_2^4}, \quad (b) \lim_{x \rightarrow (0,a)} \frac{\sin(x_1 x_2)}{x_1} \quad (a \in \mathbb{R}), \quad (c) \text{ (HA) } \lim_{x \rightarrow (\infty, a)} \left(1 + \frac{1}{x_1}\right)^{\frac{x_1^2}{x_1 + x_2}}$$

4. Man zeige, dass  $f(x) = \begin{cases} \frac{x_1^2 x_2}{x_1^4 + x_2^2} & : x \neq \Theta \\ 0 & : x = \Theta \end{cases}$  in  $x_0 = \Theta$  nicht stetig ist, obwohl  $f$  in  $x_0 = \Theta$  längs jeder Halbgeraden  $\{(t \cos \alpha, t \sin \alpha) : 0 \leq t < \infty\}$  stetig ist.

5. (a) Man bestimme  $\partial_1 f(x_1, 1)$  für  $f(x_1, x_2) = x_1 + (x_2 - 1) \arcsin \sqrt{\frac{x_1}{x_2}}$ .

- (b) Sei  $f(x_1, x_2) = \operatorname{sgn}(x_1 x_2) \sqrt[3]{|x_1 x_2|}$ . Berechnen Sie  $\partial_k f(\Theta)$  für  $k = 1, 2$ . Ist  $f$  in  $x_0 = \Theta$  differenzierbar?

6. (HA) Man zeige, dass für  $f(x) = \begin{cases} \frac{x_1 x_2 (x_1^2 - x_2^2)}{x_1^2 + x_2^2} & : x \neq \Theta \\ 0 & : x = \Theta \end{cases}$  die partiellen Ableitungen  $\partial_2 \partial_1 f(\Theta)$  und  $\partial_1 \partial_2 f(\Theta)$  existieren, aber nicht übereinstimmen.

7. Man leite  $f(x_1, x_2) = \sqrt{x_1^2 + 2x_2^2}$  in Richtung der Geraden

$$(a) x_2 = x_1, \quad (b) x_2 = 2x_1 + 1, \quad (c) \text{ (HA) } x_2 = 0, \quad (d) \text{ (HA) } x_1 = 0$$

ab. Man gebe die Richtung der Geraden so vor, dass die Richtungsableitung im Punkt

$$(a) (1, 1), \quad (b) (1, 3), \quad (c) (1, 0), \quad (d) (0, 1)$$

positiv wird.

8. (HA) Es sei  $f : \{x \in \mathbb{R}^3 : x_k > 0, k = 1, 2, 3\} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \sqrt[2]{x_1 x_2 x_3}$ . Man bestimme die Richtungsableitungen von  $f$  in die Richtungen, die durch die Vektoren  $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}^T$  bzw.  $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}^T$  gegeben sind.

9. Es sei  $f(x_1, x_2) = x_1^2 - x_1 x_2 + x_2^2$ . In welche Richtung ist die Ableitung im Punkt  $x_0 = (1, 1)$

$$(a) \text{ gleich Null, } \quad (b) \text{ am größten, } \quad (c) \text{ am kleinsten?}$$

10. Seien  $\Omega = \{(r, \varphi, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 < r, 0 \leq \varphi < 2\pi, z \in \mathbb{R}\}$  und

$$f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^3 \setminus \Theta, \quad (r, \varphi, z) \mapsto (r \cos \varphi, r \sin \varphi, z).$$

Man zeige die Differenzierbarkeit und bestimme die Ableitung dieser Funktion sowie deren Determinante.

(Z) Bestimmen Sie Umkehrabbildung  $f^{-1}$  und deren Ableitung.

11. (HA) Man begründe die Differenzierbarkeit und bestimme die Ableitung und deren Determinante der Funktion

$$f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad (r, \varphi, \theta) \mapsto (r \cos \varphi \sin \theta, r \sin \varphi \sin \theta, r \cos \theta),$$

wobei  $\Omega = \{(r, \varphi, \theta) : 0 < r, 0 \leq \varphi < 2\pi, 0 < \theta < \pi\}$ .

(Z) Bestimmen Sie Umkehrabbildung  $f^{-1}$  und deren Ableitung.

12. Man untersuche folgende Funktionen  $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$  auf lokale und globale Extremwerte

(a)  $f(x_1, x_2) = x_1^3 + 3x_1x_2^2 - 15x_1 - 12x_2$     (b) (HA)  $f(x_1, x_2) = e^{x_1 - x_2}(x_1^2 - 2x_2^2)$

13. Bestimmen Sie die Extremstellen von  $f(x_1, x_2)$  unter den angegebenen Nebenbedingungen

(a)  $f(x_1, x_2) = 6 - 4x_1 - 3x_2$ , wobei  $x_1^2 + x_2^2 = 1$ ,

(b)  $f(x_1, x_2) = \cos^2 x_1 + \cos^2 x_2$ , wobei  $x_2 - x_1 = \frac{\pi}{4}$ .

Lösen Sie die Aufgaben auch mit Hilfe der Lagrange Multiplikatoren! Untersuchen Sie die Hesse-Matrix der Lagrangefunktion auf Definitheit. Diskutieren Sie das Resultat!

14. Bestimmen Sie den größten und kleinsten Wert von  $f(x_1, x_2)$  im angegebenen Gebiet:

(a)  $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2 + x_1 + x_2$ ,  $x_1 \leq 0, x_2 \leq 0, x_1 + x_2 \geq -3$

(b) (HA)  $f(x_1, x_2) = \sin x_1 + \sin x_2 + \sin(x_1 + x_2)$ ,  $0 \leq x_1 \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq x_2 \leq \frac{\pi}{2}$

15. Unter welcher Bedingung ist durch  $F(x, y) = \ln \sqrt{x^2 + y^2} - \arctan \frac{y}{x} = 0$  ( $x \neq 0$ ) eine Funktion  $y(x)$  gegeben? Berechnen Sie unter dieser Bedingung  $\frac{dy}{dx}$  und  $\frac{d^2y}{dx^2}$ .

16. Durch

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad a, b, c > 0,$$

sei eine implizite Funktion  $z = f(x, y)$  gegeben. Man bestimme ihre partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung!

17. Man bestimme von folgenden, implizit gegebenen Funktionen (a)  $y = f(x)$  bzw. (b)  $z = f(x, y)$  die Extremstellen:

(a)  $x^3 + y^3 - 3axy = 0$  ( $a > 0$ )

(b) (HA)  $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z - 11 = 0$

18. Man zerlege die Zahl  $a > 0$  in drei nichtnegative Summanden, so dass deren Produkt möglichst groß wird. Man beweise mit dem gewonnenen Resultat, dass das arithmetische Mittel dreier Zahlen  $x_1, x_2, x_3 \geq 0$  nicht kleiner ist als ihr geometrisches Mittel, d.h.

$$\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} \geq \sqrt[3]{x_1x_2x_3}.$$

19. **(HA)** Unter allen in eine Kugel eingeschriebenen Zylindern ist der Zylinder maximalen Volumens zu finden!
20. Entwickeln Sie die Funktion  $f(x, y) = x^y$  im Punkt  $(1, 0)$  nach Taylor bis zu Anteilen 2. Ordnung!

**Zusatz:** Durch Einführung von Polarkoordinaten  $x = r \cos \varphi$ ,  $y = r \sin \varphi$  werde aus der Funktion  $U(x, y)$  die Funktion  $u(r, \varphi) := U(r \cos \varphi, r \sin \varphi)$ . Zeigen Sie, dass der Differentialausdruck

$$x \frac{\partial U}{\partial y} - y \frac{\partial U}{\partial x} \text{ übergeht in } \frac{\partial u}{\partial \varphi}.$$

(Hinweis: Heuser: Analysis, Teil 2, Nummer 165.)

## 12. Hausaufgabe

---

1. Lösen Sie alle mit **(HA)** gekennzeichneten Aufgaben der 12. Übung.
2. Zeigen Sie folgende Behauptungen:

(a) Sei  $f(x, y) := \ln \sqrt{x^2 + y^2}$  für  $(x, y) \neq \Theta$ . Dann ist  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$ .

(b) Sei  $f(x, y, z) := \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$  für  $(x, y, z) \neq \Theta$ . Dann ist  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0$ .

3. Sind die Funktionen

$$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^1, f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 x_2 + \cos(x_1 x_3) \text{ bzw. } g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, g(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} x_1 e^{x_2} \\ x_2 x_1^5 \end{bmatrix}$$

- (a) stetig auf  $\mathbb{R}^3$  bzw.  $\mathbb{R}^2$ ,      (b) differenzierbar auf  $\mathbb{R}^3$  bzw.  $\mathbb{R}^2$ ?

Geben Sie gegebenenfalls die Ableitungen an!

4. Bestimmen Sie die lokalen und globalen Extrema der Funktionen  $f(x, y) = xy^2$  unter der Nebenbedingung  $x^2 + y^2 = 1$
- (a) ohne Lagrange Multiplikatoren,      (b) mit Lagrange Multiplikatoren.

(Vgl. Heuser: Analysis, Teil 2, Nr. 174.)

5. Zeigen Sie: Die Extremwerte der Funktion

$$f(x, y, z) = x^2 + y + z$$

auf der Oberfläche der Einheitskugel des  $\mathbb{R}^3$  sind  $\frac{3}{2}$  und  $-\sqrt{2}$ .

6. Berechnen Sie näherungsweise  $1,05^{1,02}$  mit einem Fehler kleiner als  $10^{-4}$ . Nutzen Sie dazu die Taylorentwicklung für die Funktion  $f(x, y) = x^y$  im Punkt  $x_0 = y_0 = 1$  bis  $n = 2$ . (Vgl. Heuser: Analysis, Teil 2, Nr. 168.)