

Technische Universität Chemnitz

Skript zur Vorlesung

Analysis

gelesen von Prof. Dr. A. Böttcher
(WS 2010/11, SS 2011)

von A. T. Oesterreich

Inhaltsverzeichnis

| | |
|--|------------|
| 1 Mengenlehre | 5 |
| 1.1 Mengen & Mengenoperationen | 5 |
| 1.2 Abbildungen | 9 |
| 1.3 Relationen | 11 |
| 1.4 Gleichmächtigkeit von Mengen & Kardinalzahlen | 13 |
| 2 Zahlenfolgen & Zahlenreihen | 19 |
| 2.1 Reelle & Komplexe Zahlen | 20 |
| 2.2 Folgen und ihre Grenzwerte | 25 |
| 2.3 Eigenschaften konvergenter Folgen | 29 |
| 2.4 Teilfolgen & Partielle Grenzwerte | 34 |
| 2.5 Reihen und ihre Summen | 40 |
| 2.6 Umordnungen und Produkte von Reihen | 48 |
| 3 Elementare Funktionen | 55 |
| 3.1 Polynome & Rationale Funktionen | 55 |
| 3.2 Potenzreihen | 58 |
| 3.3 Die Exponentialfunktion | 61 |
| 3.4 Winkelfunktionen | 65 |
| 3.5 Hyperbelfunktionen | 68 |
| 4 Funktionengrenzwerte & Stetigkeit | 71 |
| 4.1 Reelle Funktionen auf reellen Intervallen | 71 |
| 4.2 Zwischenwertsatz | 78 |
| 4.3 Umkehrfunktionen elementarer Funktionen | 80 |
| 4.4 Asymptotische Formeln | 86 |
| 4.5 Funktionen mehrerer Veränderlicher (Felder) | 92 |
| 4.6 Vektorfelder | 101 |
| 5 Differentialrechnung | 107 |
| 5.1 Lineare Abbildungen | 108 |
| 5.2 Die Ableitung | 110 |
| 5.3 Partielle Ableitungen & JACOBI-Matrix | 115 |
| 5.4 Rechenregeln für Ableitungen | 119 |
| 5.5 Differenzierbare Funktionen einer Veränderlichen | 123 |
| 5.6 TAYLOR-Entwicklung | 131 |
| 5.7 Skalarfelder | 144 |
| 5.8 Implizite Funktionen | 150 |
| 6 Das unbestimmte Integral | 159 |

| | | |
|----------|---|------------|
| 6.1 | Die Stammfunktion | 159 |
| 6.2 | Grundintegrale | 161 |
| 6.3 | Integrationsregeln | 163 |
| 6.4 | Integration rationaler Funktionen | 167 |
| 6.5 | Weitere Klassen elementar integrierbarer Funktionen | 171 |
| 7 | Das bestimmte Integral | 173 |
| 7.1 | Das RIEMANNsche Integral | 174 |
| 7.2 | Eigenschaften des RIEMANNschen Integrals | 181 |
| 7.3 | Einige Anwendungen | 190 |
| 7.3.1 | Kurvenlänge | 190 |
| 7.3.2 | Krümmung ebener Kurven | 195 |
| 7.3.3 | Flächeninhalte | 197 |
| 7.3.4 | Volumeninhalte | 199 |
| 7.3.5 | Rotationskörper | 203 |
| 7.3.6 | Schwerpunkt | 206 |
| 7.3.7 | Arbeit | 208 |
| 7.4 | Uneigentliche Integrale | 211 |
| 7.5 | Das RIEMANN-STIELTJES-Integral | 222 |
| 7.6 | Das LEBESGUE-Integral | 224 |
| 8 | Funktionenfolgen und Funktionenreihen | 229 |
| 8.1 | Punktweise und gleichmäßige Konvergenz | 229 |
| 8.2 | Eigenschaften der Grenzfunktion bzw. der Summe | 232 |
| 9 | FOURIER-Reihen | 237 |
| 9.1 | Der Begriff der FOURIER-Reihe | 238 |
| 9.2 | Orthogonale Funktionensysteme | 241 |
| 9.3 | Die Approximationseigenschaft der FOURIER-Reihe | 242 |
| 9.4 | Elementare Konvergenztheorie | 245 |
| 9.5 | Beispiele | 258 |
| 9.6 | Glattheit der Funktion und Abfallen der FOURIER-Koeffizienten | 268 |
| 9.7 | Das GIBBSsche Phänomen | 270 |
| 9.8 | Die WEIERSTRASSschen Approximationssätze | 272 |
| 9.9 | Die schwingende Saite | 276 |
| 9.10 | Integraltransformationen | 279 |

1

Mengenlehre

1.1 Mengen & Mengenoperationen

„Eine **Menge** ist die gedankliche Zusammenfassung von wohlunterschiedenen Objekten zu einem Ganzen“ (nach G. CANTOR¹).

Dabei bedeutet **wohlunterschieden**, dass kein Objekt mehrmals in der Menge vorkommt. Die betrachteten Objekte nennt man **Elemente** der Menge.

Folgende Symbolik ist üblich:

$x \in A : \iff$ das Element x gehört zu A ,

$x \notin A : \iff$ das Element x gehört nicht zu A .

Beispiel 1.1. Es sind

(1) Familie = {Vater, Mutter, Tochter 1, Tochter 2, Sohn},

(2) Badset = {Seife, Duschgel, Rasierschaum}

zwei Mengen.



Georg Cantor

Standardbezeichnungen

Die Zahlenbereiche als Mengen werden besonders hervorgehoben:

\mathbb{N} = Menge der natürlichen Zahlen = $\{1, 2, 3, \dots\}$,

\mathbb{Z} = Menge der ganzen Zahlen = $\{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$,

\mathbb{Q} = Menge der rationalen Zahlen = $\left\{ \frac{p}{q} : p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0 \right\}$,

\mathbb{R} = Menge der reellen Zahlen (Vorstellung: Punkte auf einer Geraden),

\mathbb{C} = Menge der komplexen Zahlen (Vorstellung: Punkte in einer Ebene).

¹Georg CANTOR (1845 - 1918), deutscher Mathematiker. Begründer der Mengenlehre, Grundlagen zu Fraktalen.

Wir haben auch die Möglichkeit eine Menge so anzugeben:

$$A = \{b \in B : b \text{ hat die Eigenschaft } E\}.$$

Beispiel 1.2. (1) Menge der Sängerninnen = $\{b \in \text{Chor} : b \text{ ist weiblich}\}$,

(2) $\mathbb{Z}_+ := \{k \in \mathbb{Z} : k \geq 0\} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$.

Für $a, b \in \mathbb{R}$ heißen

| | |
|--|--|
| $(a, b) := \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$ | offenes Intervall, |
| $[a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$ | abgeschlossenes Intervall, |
| $[a, b) := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$ | halb(rechts)-offenes Intervall, |
| $(a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$ | halb(links)-offenes Intervall. |

Es gibt auch eine Menge, die **leere Menge** heißt und mit \emptyset bezeichnet wird. Sie enthält kein einziges Element.

Beispiel 1.3. (1) $(2, 1) = \{x \in \mathbb{R} : 2 < x < 1\} = \emptyset$,

(2) $(1, 1) = \{x \in \mathbb{R} : 1 < x < 1\} = \emptyset$,

(3) $\{x \in \text{Chor} : x \text{ hat zehn Beine}\} = \emptyset$.

Mengen können auch einelementig sein, etwa $\{0\}$. Dann gilt $0 \in \{0\}$, aber $0 \neq \{0\}$.

Eine Menge A heißt **Teilmenge** einer Menge B , wenn jedes Element von A auch zu B gehört, in Zeichen: $A \subset B$.

Bei uns bedeutet $A \subset B$, dass $A \subseteq B$ gilt. Um anzudeuten, dass $A \subseteq B$ und $A \neq B$ gilt, A also eine **echte Teilmenge** von B ist, schreiben wir $A \subsetneq B$.

Offenbar gilt, dass zwei Mengen A und B gleich sind, $A = B$, wenn $A \subset B$ und $B \subset A$ gilt. Des weiteren gilt stets $\emptyset \subset A$ und $A \subset A$.

Ist A eine Menge, so bezeichnet man die Menge all ihrer Teilmengen mit $\mathcal{P}(A)$ und nennt sie ihre **Potenzmenge**, etwa

$$A = \{1\} \implies \mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{1\}\} \quad \text{oder} \quad B = \{1, 3\} \implies \mathcal{P}(B) = \{\emptyset, \{1\}, \{3\}, \{1, 3\}\}.$$

Mengenoperationen

Die **Vereinigung** $A \cup B$ zweier Mengen A und B ist die Menge aller Elemente, die in A oder B liegen. Der **Durchschnitt** $A \cap B$ der Mengen A und B ist die Menge aller Elemente, die zu A und zu B gehören.

Beispiel 1.4. (1) $\mathbb{N}_+ = \mathbb{N} \cup \{0\}$,

(2) $\text{Chor} \cap \text{Badset} = \emptyset$.

Folgende Sprechweisen sind in Gebrauch:

ein(e) $\hat{=}$ mindestens ein(e),

genau ein(e) $\hat{=}$ ein(e) und nur ein(e),

oder $\hat{=}$ nicht ausschließendes oder, d. h. x oder y bedeutet x und y , x und nicht y oder nicht x und y .

entweder oder $\hat{=}$ ausschließendes oder, d. h. entweder x oder y heißt x und nicht y oder nicht x und y .

Die Menge aller Elemente, die entweder zu A oder zu B gehören, heißt die **symmetrische Differenz** von A und B , in Zeichen: $A \Delta B$.

Die **Differenz** $A \setminus B$ zweier Mengen A und B ist die Menge aller Elemente, die zu A aber nicht zu B gehören.

Offenbar gilt dann $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

Vereinigung & Durchschnitt beliebig vieler Mengen

Seien Ω eine sogenannte **Indexmenge** und für jedes $\omega \in \Omega$ eine Menge A_ω gegeben. Dann definiert man:

$$\begin{aligned} \bigcup_{\omega \in \Omega} A_\omega &:= \text{Menge aller Elemente, die zu einer der Mengen } A_\omega \text{ gehören} \\ &= \{x : \exists \omega \in \Omega \text{ mit } x \in A_\omega\} \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned} \bigcap_{\omega \in \Omega} A_\omega &:= \text{Menge aller Elemente, die zu jeder der Mengen } A_\omega \text{ gehören} \\ &= \{x : x \in A_\omega \forall \omega \in \Omega\}. \end{aligned}$$

Beispiel 1.5. (1) Sei $\Omega = \{1, 2\}$, d. h. seien A_1 und A_2 die zwei möglichen Mengen A_ω . Dann gilt

$$\bigcup_{\omega \in \Omega} A_\omega = A_1 \cup A_2, \quad \bigcap_{\omega \in \Omega} A_\omega = A_1 \cap A_2.$$

(2) Sei $\Omega = \mathbb{N}$. Dann ist für jedes $\omega = n \in \mathbb{N}$ eine Menge A_n gegeben und wir haben

$$\bigcup_{\omega \in \Omega} A_\omega = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots$$

und ganz analog

$$\bigcap_{\omega \in \Omega} A_\omega = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \dots$$

Ist nun beispielsweise $A_n = [n, n+1]$, so folgt

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = [1, \infty) := \{x \in \mathbb{R} : x \geq 1\}, \quad \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = A_1 \cap A_2 \cap \dots = \emptyset$$

oder auch

$$\bigcup_{n \in [0,1]} A_n = [0, 2], \quad \bigcap_{n \in [0, \frac{1}{2}]} A_n = \left[\frac{1}{2}, 1\right].$$

Für $A_n = [n, \infty)$ gilt

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = [1, \infty), \quad \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset.$$

Das **direkte Produkt** $A \times B$ zweier Mengen A und B ist die Menge aller geordneten Paare (a, b) mit $a \in A$ und $b \in B$.

Beispiel 1.6. (1) Sind $A = \{\text{Hund, Katze, Maus}\}$ und $B = \{\text{rosa, grün}\}$, so ist

$$A \times B = \{(\text{Hund, rosa}), (\text{Hund, grün}), (\text{Katze, rosa}), (\text{Katze, grün}), (\text{Maus, rosa}), (\text{Maus, grün})\},$$

was mit $\{\text{rosa Hund, grüner Hund, rosa Katze, grüne Katze, rosa Maus, grüne Maus}\}$ identifiziert (\cong) werden kann.

(2) Wir setzen $A^n := \underbrace{A \times A \times \dots \times A}_{n \text{ direkte Faktoren}}$.

(3) $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(a, b) : a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}\} \cong$ Punkte in der Ebene.

(4) $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(a, b, c) : a, b, c \in \mathbb{R}\} \cong$ Raum.

1.2 Abbildungen

Eine **Abbildung** (oder auch **Funktion**) ist eine Vorschrift f , nach der jedem Element einer Menge A genau ein Element einer Menge B , wobei $A = B$ gelten kann, zugeordnet wird. Man schreibt dafür

$$f: A \longrightarrow B, \quad a \longmapsto f(a) = b.$$

Beispiel 1.7. Ordnet man jeder reellen Zahl ihr Quadrat zu, erhält man die Abbildung $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$.

Sei $f: A \rightarrow B$ eine Abbildung. Dann heißt A ihr **Definitionsgebiet** und B ihr **Wertebereich**. Für eine Teilmenge $X \subset A$ nennt man $f(X) := \{f(x) : x \in X\}$ das **Bild von X** . Die Menge $f(A)$ heißt das **Bild von f** . Statt $f(A)$ schreibt man auch $\text{im}(A)$ (Abkürzung von *image* = Bild) oder $\mathcal{R}(f)$. Für eine Teilmenge $Y \subset B$ heißt $f^{-1}(Y) := \{a \in A : f(a) \in Y\}$ das (**vollständige**) **Urbild von Y** .

Eine Abbildung $f: A \rightarrow B$ heißt

a) **injektiv** (oder **eindeutig**), wenn eine der folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt ist:

- (i) Für alle $b \in B$ existiert höchstens ein $a \in A$ mit $f(a) = b$.
- (ii) $f^{-1}(\{b\})$ besitzt höchstens ein Element für jedes $b \in B$.
- (iii) $a_1 \neq a_2 \implies f(a_1) \neq f(a_2)$.
- (iv) $f(a_1) = f(a_2) \implies a_1 = a_2$.

b) **surjektiv** (oder **Abbildung auf B**), wenn eine der folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt ist:

- (i) Für jedes $b \in B$ existiert mindestens ein $a \in A$ mit $f(a) = b$.
- (ii) $f^{-1}(\{b\}) \neq \emptyset \forall b \in B$.
- (iii) $f(A) = B$.

c) **bijektiv** (oder **eindeutige Abbildung auf B**), wenn eine der gleichbedeutenden Bedingungen erfüllt ist:

- (i) f ist injektiv und surjektiv.
- (ii) $\forall b \in B \exists! a \in A : f(a) = b$.
- (iii) $f^{-1}(\{b\})$ ist einelementig für jedes $b \in B$.

Beispiel 1.8. (1) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$, ist weder injektiv noch surjektiv (also auch nicht bijektiv).

(2) $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$, ist injektiv.

(3) $f: \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$, $x \mapsto x^2$, ist surjektiv.

(4) $f: [1, \infty) \rightarrow [1, \infty)$, $x \mapsto x^2$, ist bijektiv.

Seien $f: A \rightarrow B$ und $g: B \rightarrow C$ zwei Abbildungen. Das **Produkt** (oder die **Komposition**) $g \circ f$ ist dann die Abbildung, die durch Hintereinanderausführung von f und g entsteht, d. h.

$$g \circ f: A \longrightarrow C, \quad a \longmapsto g(f(a)),$$

also $(g \circ f)(a) = g(f(a))$.

Satz 1.1. Sei $f: A \rightarrow B$ eine bijektive Abbildung. Dann existiert genau eine Abbildung $g: B \rightarrow A$ mit der Eigenschaft

$$f \circ g = \text{id}_B, \quad g \circ f = \text{id}_A,$$

wobei id_E die identische Abbildung $E \rightarrow E$ ist, d. h. $\text{id}_E: E \rightarrow E$, $x \mapsto x$.

Beweis. Sei $b \in B$ beliebig. Dann existiert genau ein $a \in A$ mit $f(a) = b$. Setzt man $g(b) := a$, so ist

$$f(g(b)) = f(a) = b \implies f \circ g = \text{id}_B.$$

Wäre hingegen $g(b) \neq a$ für ein gewisses b , so folgte $f(g(b)) \neq b$ und $f \circ g = \text{id}_B$ wäre nicht erfüllt. Damit haben wir gezeigt, dass es genau eine Abbildung $g: B \rightarrow A$ mit $f \circ g = \text{id}_B$ gibt. Für $a \in A$ ist dann

$$g(f(a)) = g(b) = a \implies g \circ f = \text{id}_A.$$

□

Die in Satz 1.1 definierte Abbildung g heißt die zu f gehörige **Umkehrabbildung** (oder auch **inverse Abbildung**) und wird mit f^{-1} bezeichnet.

1.3 Relationen

Sei X eine Menge. Eine **Relation R auf X** ist eine Teilmenge $R \subset X \times X$. Gilt für $x, y \in X$ auch $(x, y) \in R$, so sagen wir „ x steht in Relation zu y “ und schreiben

$$x R y \quad \text{oder} \quad x \sim y.$$

Stehen $x, y \in X$ bzgl. R nicht in Relation, d. h. gilt $(x, y) \notin R$, so notieren wir dementsprechend $x \not\sim y$.

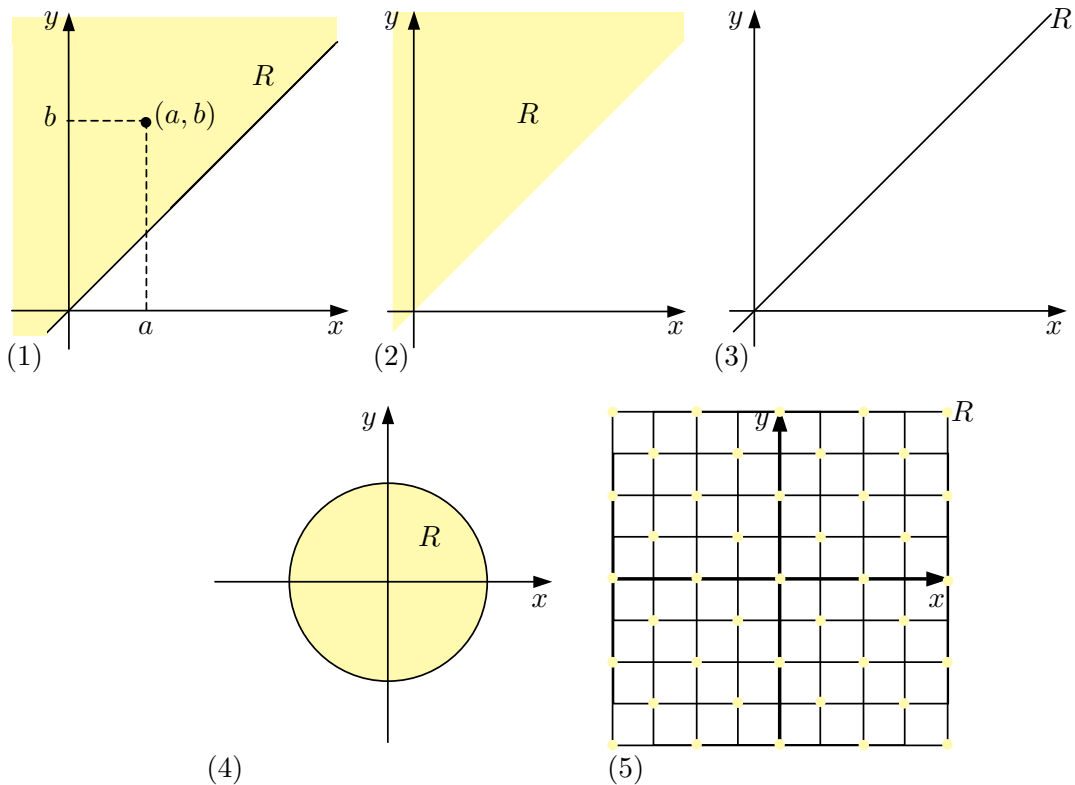
Beispiel 1.9. (1) $X = \mathbb{R}$, $(x, y) \in R : \Leftrightarrow x \leq y$.

(2) $X = \mathbb{R}$, $(x, y) \in R : \Leftrightarrow x < y$.

(3) $X = \mathbb{R}$, $(x, y) \in R : \Leftrightarrow x = y$.

(4) $X = \mathbb{R}$, $(x, y) \in R : \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = 1 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1$.

(5) $X = \mathbb{Z}$, $(x, y) \in R : \Leftrightarrow x - y$ ist gerade $\Leftrightarrow 2 \mid x - y \Leftrightarrow x \equiv y \pmod{2}$.



Eine Relation \sim auf X heißt

- (i) **reflexiv (R)**, wenn gilt: $x \sim x \forall x \in X$,
- (ii) **symmetrisch (S)**, wenn für $x, y \in X$ gilt: $x \sim y \implies y \sim x$,
- (iii) **antisymmetrisch (A)**, wenn für $x, y \in X$ gilt: $x \sim y, y \sim x \implies x = y$,
- (iv) **transitiv (T)**, wenn für $x, y, z \in X$ gilt: $x \sim y, y \sim z \implies x \sim z$.

Für das Beispiel 1.9 bedeutet das:

| | (1) | (2) | (3) | (4) | (5) |
|---|------|------|-----|------|------|
| R | ja | nein | ja | nein | ja |
| S | nein | nein | ja | ja | ja |
| A | ja | ja | ja | nein | nein |
| T | ja | ja | ja | nein | ja |

Relationen mit den Eigenschaften RAT heißen **Ordnungsrelationen**; solche mit den Eigenschaften RST heißen **Äquivalenzrelationen**.

Sei auf der Menge X eine Äquivalenzrelation \sim erklärt. Für jedes $x \in X$ bezeichnen wir mit M_x die Menge der Elemente aus X , die zu x äquivalent sind, d. h.

$$M_x := \{y \in X : y \sim x\}.$$

Mengen M_x , die so gebildet werden, heißen **Äquivalenzklassen**.

Die Äquivalenzklassen aus Beispiel 1.9 (3) sind gerade die Einermengen $M_x = \{x\}$. Für das Beispiel 1.9 (5) ergibt sich $M_0 = M_2 = M_{-2} = M_4 = \dots = \{0, \pm 2, \pm 4, \dots\}$ und $M_1 = M_{-1} = M_3 = M_{-3} = \dots = \{\pm 1, \pm 3, \pm 5, \dots\}$.

Man zeigt leicht, dass infolge der Reflexivität jede Äquivalenzklasse nichtleer ist, dass der Durchschnitt zweier verschiedener Äquivalenzklassen aufgrund der Symmetrie und Transitivität stets leer, und dass die Vereinigung aller Äquivalenzklassen wegen der Reflexivität ganz X ist. Das System der Äquivalenzklassen bildet damit eine sogenannte **Klasseneinteilung** von X . Die Menge der Äquivalenzklassen bezeichnet man mit X/\sim und nennt sie die **Faktormenge**.

Beispiel 1.10. Auf \mathbb{R} ist durch $x \sim y :\Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Z}$ eine Äquivalenzrelation gegeben. Die Äquivalenzklassen können mit Zahlen aus $[0, 1)$ durchnummeriert werden — mit anderen Worten: $M \subset \mathbb{R}$ ist genau dann eine Äquivalenzklasse, wenn es ein $x \in [0, 1)$ mit $M = \{x, x \pm 1, x \pm 2, x \pm 3, \dots\}$ gibt. D. h. $\mathbb{R}/\sim \cong [0, 1) \cong \mathbb{R}/\mathbb{Z} \cong \mathbb{T}$ (Einheitstorus).

Für das Beispiel 1.9 (3) bzw. (5) ergibt sich $\mathbb{R}/\sim \cong \mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{Z}/\sim \cong \{0, 1\}$.

1.4 Gleichmächtigkeit von Mengen & Kardinalzahlen

Wir nennen zwei Mengen A und B **gleichmächtig**, $A \sim B$, falls es eine Bijektion $f: A \rightarrow B$ gibt. Dies ist eine Äquivalenzrelation in folgendem Sinne:

- (R) $\text{id}_A: A \rightarrow A, a \mapsto a,$
 (S) $f: A \xrightarrow{\text{bij}} B, f^{-1}: B \xrightarrow{\text{bij}} A,$
 (T) $f, g \text{ bijektiv} \implies g \circ f \text{ bijektiv}.$

Diese Äquivalenzrelation erzeugt eine Klasseneinteilung. Alle gleichmächtigen Mengen bilden dabei eine Klasse. Jeder dieser Klassen ordnet man eine sogenannte **Kardinalzahl** zu:

$$\text{Klasse der } \left\{ \begin{array}{c} \text{Einermengen} \\ \text{Zweiermengen} \\ \vdots \\ \text{\(n\)-elementigen Mengen} \end{array} \right\} \text{ erhält die Kardinalzahl } \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ n \end{array} \right\}.$$

Mengen mit Kardinalzahl $n \in \mathbb{N}$ heißen **endlich**. Dabei heißt n die **Anzahl** der Elemente jener Menge. Zwei **endliche** Mengen sind also genau dann gleichmächtig, wenn sie dieselbe Anzahl an Elementen haben.

Mengen, die nicht endlich sind, heißen **unendlich**. Zu \mathbb{N} gleichmächtige Mengen heißen **abzählbar** und erhalten die Kardinalzahl \aleph_0 („*Aleph-Null*“).

Beispiel 1.11. Damit haben wir z. B. $\mathbb{N} \sim \mathbb{Z}$ oder auch $2\mathbb{N} \sim \mathbb{N}$, denn die Abbildungen

$$f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}, f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & n \text{ gerade,} \\ \frac{1-n}{2} & n \text{ ungerade,} \end{cases} \quad g: 2\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, g(n) = \frac{n}{2},$$

sind bijektiv.

Mengen, die endlich oder abzählbar sind, nennt man **höchstens abzählbar**. Nicht höchstens abzählbare Mengen heißen **überabzählbar**.

Satz 1.2. *Eine Teilmenge einer abzählbaren Menge ist entweder endlich oder abzählbar.*

Beweis. Sei $A = \{a_1, a_2, \dots\}$ abzählbar und sei $B \subset A$. Wir nehmen an, dass B nicht endlich ist und schreiben die Elemente von B in derselben Reihenfolge auf, wie sie in A vorkommen:

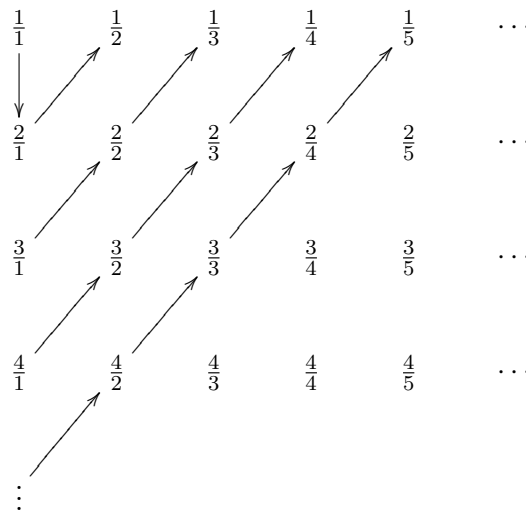
$$B = \{a_{n_1}, a_{n_2}, \dots\} \quad (n_1 < n_2 < \dots).$$

Dann ist $f: \mathbb{N} \rightarrow B, f(k) = a_{n_k}$, eine bijektive Abbildung, d. h. B ist abzählbar. \square

Satz 1.3. *Jede unendliche Menge enthält eine abzählbare Teilmenge.*

Beweis. Sei a_1 ein Element der unendlichen Menge A . Dann ist $A \setminus \{a_1\}$ wieder unendlich. Insbesondere gibt es also ein $a_2 \in A \setminus \{a_1\}$. Nun ist $A \setminus \{a_1, a_2\}$ immer noch unendlich. Wähle $a_3 \in A \setminus \{a_1, a_2\}$ usw. Man erhält so eine abzählbare Teilmenge $\{a_1, a_2, a_3, \dots\} \subset A$. \square

Gibt es überhaupt überabzählbare Mengen? Wir probieren es mit den auf der reellen Achse sehr dicht gesäten rationalen Zahlen. Aber \mathbb{Q} ist abzählbar. Zum Beweis wendet man das CANTORSche Diagonalverfahren an:



Wir nummerieren wie in der Abbildung vorgeschlagen durch, wobei wir schon registrierte Zahlen auslassen:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{1}{2}, \frac{3}{1}, \frac{2}{2}, \frac{1}{3}, \frac{4}{1}, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{5}{1}, \frac{4}{2}, \frac{3}{3}, \frac{2}{4}, \frac{1}{5}, \dots \right\}.$$

Hat A die Kardinalzahl \mathfrak{a} , so schreibt man $|A| = \mathfrak{a}$. Also gilt beispielsweise

$$|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}| = |2\mathbb{N}| = |\mathbb{Q}| = \aleph_0.$$

Seien \mathfrak{a} , \mathfrak{b} Kardinalzahlen. Man schreibt $\mathfrak{a} \leq \mathfrak{b}$, wenn es Mengen A , B mit $|A| = \mathfrak{a}$, $|B| = \mathfrak{b}$ und eine injektive Abbildung $f: A \rightarrow B$ gibt.

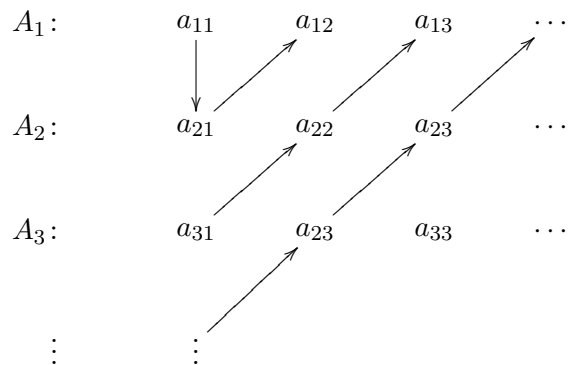
Ist $\mathfrak{a} \neq \mathfrak{b}$ und $\mathfrak{a} \leq \mathfrak{b}$, so schreibt man $\mathfrak{a} < \mathfrak{b}$. CANTOR hat gezeigt, dass für beliebige Kardinalzahlen \mathfrak{a} , \mathfrak{b} stets entweder $\mathfrak{a} < \mathfrak{b}$, $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$ oder $\mathfrak{b} < \mathfrak{a}$ gilt. Wir wissen also bisher:

$$1 < 2 < 3 < \dots < \aleph_0.$$

Bei den Pünktchen kommt nichts weiter hinzu, d. h. „ein bisschen Unendlich“ gibt es nicht, denn nach Satz 1.3 ist jede unendliche Teilmenge von \mathbb{N} wieder abzählbar.

Satz 1.4. *Die Vereinigung von höchstens abzählbar vielen höchstens abzählbaren Mengen ist höchstens abzählbar.*

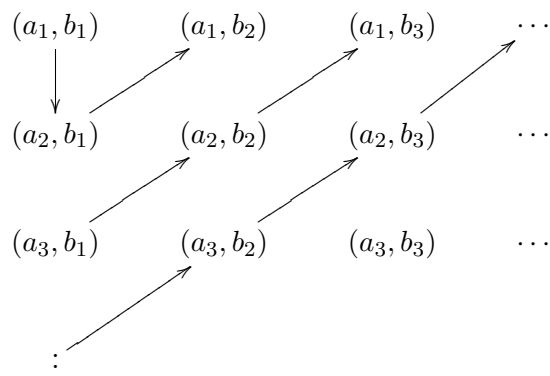
Beweis. Seien A_1, A_2, A_3, \dots höchstens abzählbare Mengen. Wir schreiben



und nummerieren wie angegeben durch (wobei schon wahrgenommene Elemente weggelassen werden). Wir erhalten so eine vollständig nummerierte Liste der Elemente von $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots$. \square

Satz 1.5. *Das direkte Produkt von endlich vielen höchstens abzählbaren Mengen ist höchstens abzählbar.*

Beweis. Das ist (wieder nach dem CANTORSchen Schema) klar für zwei Mengen $A = \{a_1, a_2, \dots\}$ und $B = \{b_1, b_2, \dots\}$:



Wir betrachten nun drei Mengen A , B und C . Da die Behauptung für zwei Mengen bereits bewiesen ist, ist $A \times B$ und damit $(A \times B) \times C$ höchstens abzählbar. Die Abbildung

$$f: (A \times B) \times C \longrightarrow A \times B \times C, \quad ((a, b), c) \longmapsto (a, b, c),$$

ist aber bijektiv. Also ist auch $A \times B \times C$ höchstens abzählbar. Analog ergibt sich die Behauptung dann für vier, fünf, ... Mengen. \square

Gibt es nun überabzählbare Mengen?

Satz 1.6. Die Menge $(0, 1)$ ist überabzählbar.

Beweis. Stelle jede reelle Zahl aus $(0, 1)$ durch ihren Dezimalbruch dar:

$$0.x_1x_2x_3\dots,$$

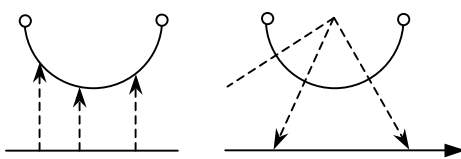
verbiete dabei aber die Periode 9, d. h. schreibe z. B. $0.3200\dots$ statt $0.319\bar{9}$. Nehmen wir das Gegenteil, sprich die Abzählbarkeit von $(0, 1)$, an. Dann kann man alle Zahlen aus $(0, 1)$ in eine Liste schreiben:

$$0.a_1a_2a_3a_4\dots, \quad 0.b_1b_2b_3b_4\dots, \quad 0.c_1c_2c_3c_4\dots, \quad \dots$$

Konstruiere nun $r = 0.r_1r_2r_3r_4\dots$ wie folgt:

$$r_1 \in \{0, 1, 2, \dots, 8\} \setminus \{a_1\}, \quad r_2 \in \{0, 1, 2, \dots, 8\} \setminus \{b_2\}, \quad r_3 \in \{0, 1, 2, \dots, 8\} \setminus \{c_3\}, \quad \dots$$

Dann ist $r \in (0, 1)$ eine Zahl, die nicht in der Liste steht, denn r unterscheidet sich von der i -ten Zahl der Liste in der i -ten Nachkommastelle — Widerspruch. Also ist $(0, 1)$ doch überabzählbar. \square



Man schreibt dafür $|(0, 1)| = \mathfrak{c}$ („*continuum*“).
Damit haben wir

$$1 < 2 < 3 < \dots < \aleph_0 < \mathfrak{c}.$$

Es gilt $|\mathbb{R}| = \mathfrak{c}$, denn man kann eine Bijektion $f: (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ wie folgt konstruieren: Ver-

knüpfe die in der Abbildung dargestellten bijektiven Abbildungen $(0, 1) \rightarrow$ Halbkreis und Halbkreis $\rightarrow \mathbb{R}$.

Gibt es rechts von \mathfrak{c} weitere Kardinalzahlen? Wir versuchen es mit dem Quadrat $Q := (0, 1) \times (0, 1)$. Dann könnte man $\mathfrak{c} < |Q|$ vermuten. Die Abbildung, die dem Paar $(0, x_1x_2x_3\dots, 0.y_1y_2y_3\dots) \in Q$ die Zahl $0.x_1y_1x_2y_2x_3y_3\dots$ zuordnet, ist aber injektiv

von Q in $(0, 1)$. Damit ist $|Q| \leq \mathfrak{c}$. Da offenbar auch $|Q| \geq \mathfrak{c}$ gilt, erhalten wir $|Q| = \mathfrak{c}$ (das wurde von CANTOR bewiesen).

Für eine Menge A mit $|A| = n \in \mathbb{N}$ zeigt man leicht, dass $|\mathcal{P}(A)| = 2^n$ im Falle $|A| = n \in \mathbb{N}$ gilt.

Ist nun A eine beliebige Menge mit Kardinalzahl \mathfrak{a} , so bezeichnet man die Kardinalzahl von $\mathcal{P}(A)$ mit $2^{\mathfrak{a}}$. Für endliches n gilt natürlich $n < 2^n$. CANTOR zeigte, dass $\mathfrak{a} < 2^{\mathfrak{a}}$ sogar für beliebige Kardinalzahlen gilt. Damit haben wir

$$1 < 2 < 3 < \dots < \aleph_0 < \mathfrak{c} < 2^{\mathfrak{c}} < 2^{2^{\mathfrak{c}}} < \dots$$

Was ist nun 2^{\aleph_0} ? Es besteht eine bijektive Zuordnung zwischen den Teilmengen von \mathbb{N} und allen Folgen, die aus Nullen und Einsen gebildet werden können, d. h. allen reellen Zahlen aus $(0, 1)$ im Dualsystem. Also gilt $2^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$ und wir haben auch

$$1 < 2 < 3 < \dots < \aleph_0 < 2^{\aleph_0} < 2^{2^{\aleph_0}} < \dots$$

Für endliche n fehlen in $1 < 2^1 < 2^{2^1} < 2^{2^{2^1}} < \dots$ massenweise Zahlen (z. B. 3, 5, usw.). Es stellt sich die Frage, ob zwischen \aleph_0 und 2^{\aleph_0} auch weitere Kardinalzahlen liegen. Äquivalent dazu ist die Frage, ob jede unendliche Teilmenge von \mathbb{R} abzählbar oder zu \mathbb{R} gleichmächtig ist. Eine Hypothese ist: Nein.

Man nennt das die **Continuums-Hypothese**. In den 1960er Jahren zeigten GÖDEL und COHEN, dass sich die Continuums-Hypothese weder beweisen noch widerlegen lässt. Dazu reicht das Axiomensystem der Mengenlehre nicht aus. Auch die verallgemeinerte Continuums-Hypothese (gibt es zwischen 2^{\aleph_0} und $2^{2^{\aleph_0}}$ weitere Kardinalzahlen) ist nicht beweisbar.

Wie gehen die Kardinalzahlen rechts von $2^{2^{\aleph_0}}$ weiter und gibt es eine größte Kardinalzahl? Sei dazu \mathfrak{M} die Menge aller Mengen, $|\mathfrak{M}| = \mathfrak{m}$. Ist nun \mathfrak{a} eine beliebige Kardinalzahl und $A = \{x, y, z, \dots\}$ eine Menge mit $|A| = \mathfrak{a}$, so ist die Abbildung

$$f: A \longrightarrow \mathfrak{M}, \quad \begin{cases} f(x) = \{x\}, \\ f(y) = \{y\}, \\ f(z) = \{z\}, \\ \vdots \end{cases}$$

injektiv, also $\mathfrak{a} \leq \mathfrak{m}$. Dies gilt insbesondere für $\mathfrak{a} := 2^{\mathfrak{m}}$. Andererseits ist aber $\mathfrak{m} < 2^{\mathfrak{m}}$ — Widerspruch. Unsere naive Mengenlehre führt auf dieses furchtbare Problem. Man muss daher ein exaktes Axiomensystem einführen.

2

Zahlenfolgen & Zahlenreihen

Wichtige Beiträge stammen unter anderem von diesen Mathematikern:



2.1 Reelle & Komplexe Zahlen

Reelle Zahlen, Beschränktheit

Wir identifizieren die reellen Zahlen als Punkte auf einer Geraden bzw. als unendliche Dezimalbrüche. Eine exakte Definition folgt später. Weiter setzen wir das Rechnen mit reellen Zahlen und den Gebrauch von $<$, \leq als bekannt voraus.

Definition 2.1. Sei $\emptyset \neq E \subset \mathbb{R}$. Die Menge E heißt **von oben beschränkt**, wenn es ein $a \in \mathbb{R}$ gibt mit $x \leq a$ für alle $x \in E$. Jede solche Zahl a heißt **obere Schranke** von E . Die Menge aller oberen Schranken von E bezeichnen wir mit $O(E)$.

Analog heißt E **von unten beschränkt**, wenn es ein $b \in \mathbb{R}$ mit $b \leq x$ für jedes $x \in E$ gibt, und jedes dieser b heißt **untere Schranke** von E . Das Symbol $U(E)$ bezeichnet die Menge aller unteren Schranken von E .

Die Menge E heißt **beschränkt**, wenn sie von oben und von unten beschränkt ist.

Beispiel 2.1. (1) $E = \{1, 2, 10, 101\}$, $O(E) = [101, \infty)$, $U(E) = (-\infty, 1]$.

(2) $E_1 = (1, 5)$, $E_2 = [1, 5]$, $O(E_1) = O(E_2) = [5, \infty)$, $U(E_1) = U(E_2) = (-\infty, 1]$.

(3) $E = \mathbb{Q}$ ist weder von oben noch von unten beschränkt, also $O(E) = U(E) = \emptyset$.

(4) $E = \mathbb{N}$ ist nicht von oben beschränkt, aber von unten, $U(E) = (-\infty, 1]$.

(5) $E = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\}$, $O(E) = [1, \infty)$, $U(E) = (-\infty, 0]$.

(6) $E = \{x > 0 : x^2 < 2\}$, $U(E) = (-\infty, 0]$, $O(E) = [\sqrt{2}, \infty)$.

An diesen Beispielen sehen wir, dass für von oben beschränkte Mengen stets $O(E) = [a, \infty)$ mit einem $a \in \mathbb{R}$ gilt. Gibt es eine Menge E mit $O(E) = (1, \infty)$? Zumindest gibt es keine mit $O(E) = \{1\}$.

Um das zu klären, müssen wir definieren, was wir genau unter einer reellen Zahl verstehen wollen. Da wir das nicht taten, akzeptieren wir folgendes Axiom:

Axiom. Für jede von oben beschränkte nichtleere Menge $E \subset \mathbb{R}$ gibt es ein $a \in \mathbb{R}$ mit $O(E) = [a, \infty)$.

Daraus folgt unmittelbar, dass stets $U(E) = (-\infty, b]$, $b \in \mathbb{R}$, für jede nichtleere nach unten beschränkte Menge E gilt.

Definition 2.2. Sei $\emptyset \neq E \subset \mathbb{R}$ eine von oben beschränkte Menge, also $O(E) = [a, \infty)$ für ein $a \in \mathbb{R}$. Dann nennt man a die **kleinste obere Schranke** (oder das **Supremum**) von E und schreibt $a = \sup E$.

Ist andererseits E von unten beschränkt, $U(E) = (-\infty, b]$ für ein $b \in \mathbb{R}$, so heißt b die **größte untere Schranke** (oder das **Infimum**) von E , $b = \inf E$.

Gilt des weiteren $a = \sup E \in E$ bzw. $b = \inf E \in E$, so nennt man a auch das **Maximum** bzw. b das **Minimum** von E , in Zeichen $a = \max E$ bzw. $b = \min E$.

So gilt für die Beispiele 2.1 (1) bzw. (2) also $\sup E = \max E = 101$, $\inf E = \min E = 1$ bzw. $\sup E_1 = 5$, $\max E_1$ existiert nicht, $\inf E_1 = 1$, $\min E_1$ existiert nicht.

Wir stellen also fest, dass das Maximum einer nichtleeren von oben beschränkten Menge E ein Element $a \in E$ mit $x \leq a$ für alle $x \in E$ ist. Ein solches a muss nicht zwingend existieren. Das Supremum existiert bei von oben beschränkten nichtleeren Mengen jedoch immer (analog: Minimum, Infimum).

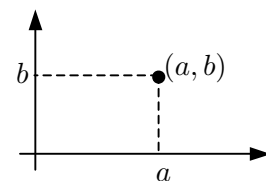
Mittels des obigen Axioms kann z. B. gezeigt werden:

Satz 2.1. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ und jedes $b \in (0, \infty)$ existiert genau ein $x \in (0, \infty)$ mit $x^n = b$.

Zum Beweis setzt man $x := \sup\{y > 0 : y^n < b\}$.

Komplexe Zahlen

Als **komplexe Zahlen** \mathbb{C} bezeichnen wir die Elemente aus $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Es handelt sich also um geordnete Paare (a, b) mit $a, b \in \mathbb{R}$. Dann kann man sich \mathbb{C} als Ebene (die sogenannte **GAUSS-Ebene**) vorstellen.



Rechenoperationen

Wir führen auf \mathbb{C} folgende Addition und Multiplikation ein:

$$(a, b) + (c, d) := (a + c, b + d), \quad (a, b) \cdot (c, d) := (ac - bd, ad + bc).$$

Eine Subtraktion gelingt dann so: $(a, b) - (c, d) = (a - c, b - d)$. Wie in \mathbb{C} dividiert wird, zeigen wir später.

Des weiteren setzt man $i := (0, 1)$ und nennt i die **imaginäre Einheit**. Dann gilt

$$i^2 = (0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0).$$

Fassen wir $(a, 0) \in \mathbb{C}$ als die reelle Zahl a auf, haben wir damit $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ sowie $i^2 = -1$. Wir finden auch die übliche Schreibweise komplexer Zahlen wieder:

$$(a, b) = (a, 0) + (0, b) = (a, 0) + (b, 0) \cdot (0, 1) = a + bi.$$

Wozu man u. a. komplexe Zahlen braucht, wird in folgendem Satz deutlich:

Satz 2.2 (Fundamentalsatz der Algebra). *Die Gleichung*

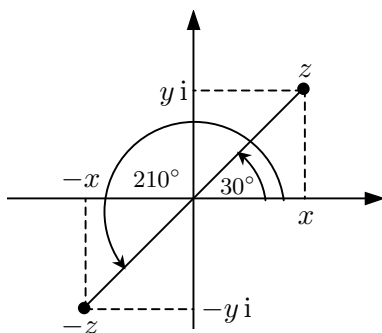
$$a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n = 0$$

hat für beliebige $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$ mit $a_n \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$, stets eine Lösung $x \in \mathbb{C}$.

Verbindet man den in der komplexen Ebene $z = x + yi$ darstellenden Punkt mit dem Ursprung 0 , so heißt $|z| := |\overline{0z}| = \sqrt{x^2 + y^2}$ der **Betrag** von z . Der von $\overline{0z}$ und der reellen Achse eingeschlossene Winkel φ heißt **Argument** von z , $\arg z$. Dieses ist nur bis auf ganzzahlige Vielfache von 360° eindeutig bestimmt.

Mit $\Re(z) := x$ bezeichnen wir den **Realteil** und mit $\Im(z) := y$ den **Imaginärteil** der komplexen Zahl $z = x + yi$. Offensichtlich gilt $|\Re(z)| \leq |z|$ sowie $|\Im(z)| \leq |z|$.

Bestimmung des Arguments



Sei $z \in \mathbb{C}$ in der Form $x + yi$ gegeben. Die Beziehung $\tan \varphi = \frac{y}{x} = \frac{-y}{-x}$ liefert zwei Winkel, von denen man den richtigen auswählen muss. Für $z = \frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}i$ hat man beispielsweise $\tan \varphi = \frac{1}{\sqrt{3}}$ zu lösen. Diese Gleichung liefert $\varphi_1 = 30^\circ$ und $\varphi_2 = 210^\circ$. Stellt man z in der komplexen Ebene dar, bemerkt man, dass nur φ_1 infrage kommt.

Besser ist es, die Gleichungen

$$\sin \varphi = \frac{y}{|z|} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

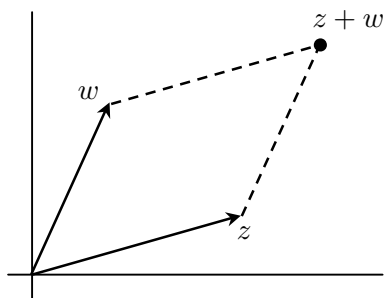
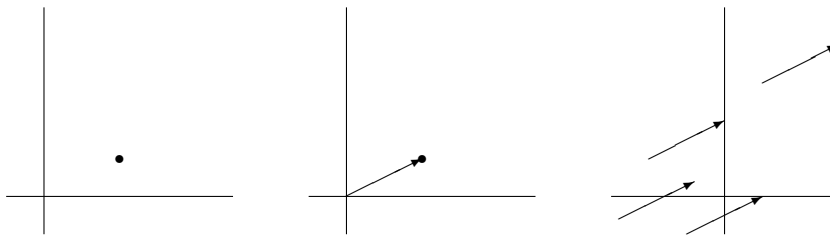
$$\cos \varphi = \frac{x}{|z|} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

zu verwenden. Diese liefern für das Beispiel $z = \frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}i$ die Beziehungen $\sin \varphi = \frac{1}{2}$ und $\cos \varphi = \frac{1}{2}\sqrt{3}$. Nur $\varphi_1 = 30^\circ$ erfüllt beide Gleichungen und ist daher gleich $\arg z$.

Wir haben für $z = x + yi$ also $x = r \cos \varphi$ und $y = r \sin \varphi$ mit $r = |z|$. Damit ist $z = x + yi = r \cos \varphi + ir \sin \varphi = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ die sogenannte **Polardarstellung** von z .

Darstellung komplexer Zahlen

Wir stellen uns komplexe Zahlen als Punkte (Abb. links), Endpunkte von Ortsvektoren (Abb. Mitte) oder freie Vektoren (Abb. rechts) in der Ebene vor:



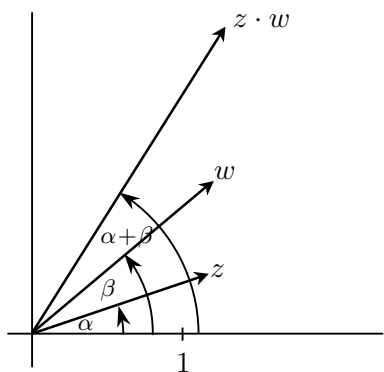
Die Addition komplexer Zahlen entspricht dann der gewöhnlichen Vektoraddition (Abb. links oben).

Seien $z = r(\cos \alpha + i \sin \alpha)$ und $w = s(\cos \beta + i \sin \beta)$. Dann ist

$$\begin{aligned} z w &= r s (\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \\ &\quad + i (\cos \alpha \sin \beta + \sin \alpha \cos \beta)) \\ &= r s (\cos(\alpha + \beta) + i \sin(\alpha + \beta)). \end{aligned}$$

Zwei komplexe Zahlen werden also multipliziert, indem man ihre Beträge multipliziert und ihre Argumente addiert (Abb. link unten).

Im Falle $w \neq 0$ gelingt die Division dann wie folgt:



$$\frac{z}{w} = \frac{r}{s} (\cos(\alpha - \beta) + i \sin(\alpha - \beta)).$$

Beispiel 2.2. (1) Es gilt $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$.

(2) Wir suchen die komplexen Lösungen von $z^3 = 1$. Aus $|z^3| = 1$ folgt $|z| = 1$, also $z_1 = -1$, $z_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}i$ und $z_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}i$. z_1 , z_2 und z_3 bilden ein regelmäßiges Dreieck mit Eckpunkten auf dem Einheitskreis.

(3) Die Lösungen z_1 , z_2 , z_3 und z_4 der Gleichung $z^4 = -1$ bilden ein achsenparalleles Quadrat mit Eckpunkten auf dem Einheitskreis.

(4) Die Lösungen z_1 , z_2 , z_3 , z_4 und z_5 von $z^5 = -1$ sind die Eckpunkte eines regelmäßigen Fünfecks mit Eckpunkten auf dem Einheitskreis.

Sei allgemein die Gleichung $z^n = a$ zu lösen. Es gilt dabei $|z| = \sqrt[n]{|a|}$. Damit ist

$$z_1 = \sqrt[n]{|a|} \left(\cos \frac{\arg a}{n} + i \sin \frac{\arg a}{n} \right)$$

eine Lösung der Gleichung. Als weitere Lösungen kommen $n - 1$ Punkte so dazu, dass alle ein regelmäßigen n -Eck bilden. Alle Lösungen der Gleichung sind also

$$z_{k+1} = \sqrt[n]{|a|} \left(\cos \left(\frac{\arg a}{n} + \frac{k \cdot 360^\circ}{n} \right) + i \sin \left(\frac{\arg a}{n} + \frac{k \cdot 360^\circ}{n} \right) \right), \quad 0 \leq k \leq n - 1.$$

2.2 Folgen und ihre Grenzwerte

Sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder \mathbb{C} . Eine **Folge** ist eine Abbildung

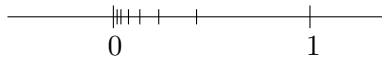
$$a: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{K}, \quad n \longmapsto a(n).$$

Statt $a(n)$ schreibt man üblicherweise a_n . Die Folge bezeichnet man mit

$$\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = (a_n)_{n=1}^{\infty} = \{a_n\} = (a_n) = \{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\}.$$

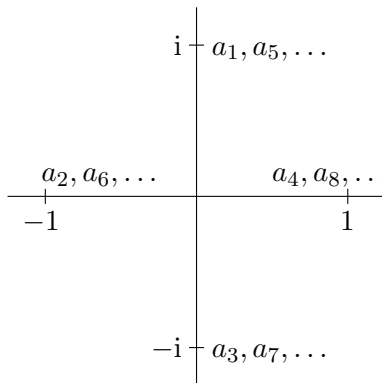
Die geschweifte Klammer ist aber nicht als Mengenklammer zu verstehen!

Beispiel 2.3. (1) $\{a_n\} = \{\frac{1}{n}\} = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots\}$ ist eine reelle Folge. Ihre Glieder schmiegen sich von rechts immer dichter an die Null an.



(2) $\{1, -1, 1, -1, \dots\} = \{(-1)^{n+1}\}_{n=1}^{\infty}$ mit $a_{2k+1} = 1$ und $a_{2k} = -1$ für $k \in \mathbb{N}$ ist eine **alternierende** Folge, d. h. benachbarte Glieder haben unterschiedliches Vorzeichen.

(3) $a_n = i^n$ für $n \in \mathbb{N}$:



(4) Sei $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ die Folge mit $a_n = i + \frac{i^n}{n}$. Ihre Glieder liegen auf einem in den Punkt $(0, i)$ von links hineindrehenden Strudel.

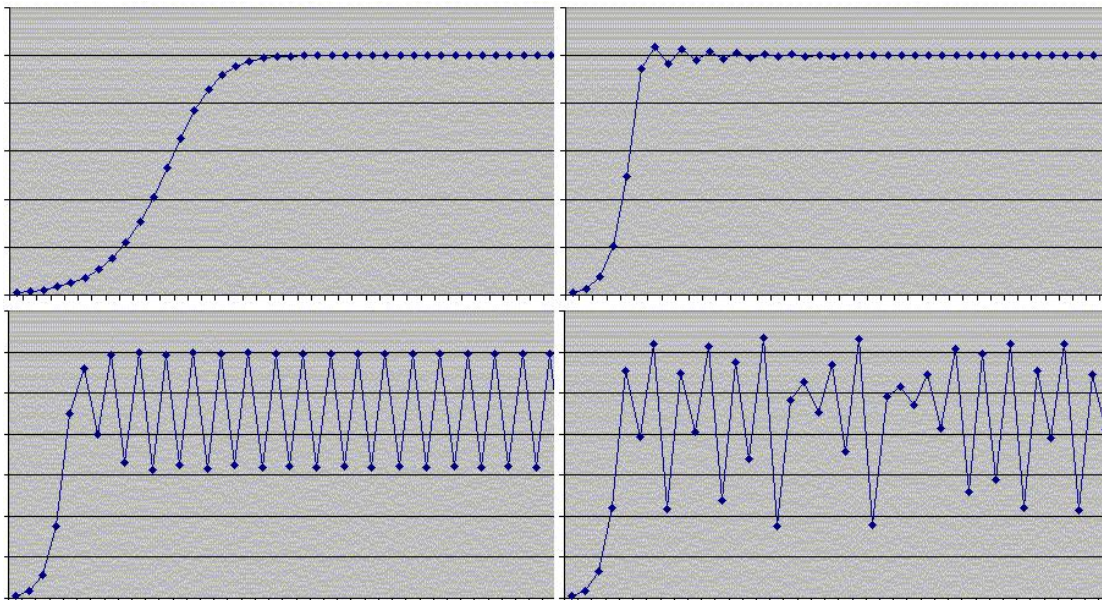
(5) Die Folgen (1) bis (4) waren uns **explizit** gegeben, d. h. man kann aus n sofort a_n bestimmen. Sei nun a_n die Anzahl der Individuen einer Population im Jahre n ,

$$a_{n+1} - a_n = r a_n, \quad a_1 \text{ bekannt.}$$

Diese Folge ist **rekursiv** definiert, d. h. man kann a_n nur aus Vorgängergliedern errechnen, und nicht direkt aus n selbst. Es gilt aber

$$\begin{aligned} a_n &= r a_{n-1} + a_{n-1} = (1+r) a_{n-1} = (1+r)(1+r) a_{n-2} \\ &= \underbrace{(1+r) \cdots (1+r)}_{n-1 \text{ Faktoren}} a_1 = (1+r)^{n-1} a_1. \end{aligned}$$

Das VERHULST-Gesetz besagt nun, dass man die Zuwachsrate $r = \frac{a_{n+1} - a_n}{a_n}$ durch $r(1 - a_n)$ ersetzt. Veranschaulicht man diese Folge in der Ebene, erhält man in Abhängigkeit davon, wie groß man r wählt, verschiedene Bilder (monoton wachsende, periodische oder chaotische Folgen):



Definition 2.3. Für gegebenes $\varepsilon > 0$ versteht man unter der (**offenen**) ε -Umgebung eines Punktes $a \in \mathbb{K}$ die Menge

$$U_\varepsilon(a) := \{y \in \mathbb{K} : |y - a| < \varepsilon\}.$$

Für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ bedeutet das $U_\varepsilon(a) = (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ und für $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ist dies ein Kreis ohne Rand mit Radius ε und Mittelpunkt a .

Definition 2.4. Eine Folge $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ aus \mathbb{K} heißt **konvergent**, wenn es eine Zahl $a \in \mathbb{K}$ so gibt, dass gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{R} : a_n \in U_{\varepsilon}(a) \forall n > N.$$

Die Zahl a heißt dann **Grenzwert** (oder **Limes**) der Folge und man notiert

$$a_n \longrightarrow a \quad \text{oder} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a.$$

Die Zahl N hängt dabei i. A. von ε ab. Je kleiner man sich das ε vorgibt, um so größer muss man das N wählen. Daher findet man teils die Bezeichnung $N = N(\varepsilon)$ oder N_{ε} .

Beispiel 2.4. Wir untersuchen die Folgen aus Beispiel 2.3 auf Konvergenz.

(1) Es gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$, denn

$$\frac{1}{n} \in U_{\varepsilon}(0) \iff \left| \frac{1}{n} - 0 \right| = \frac{1}{n} < \varepsilon \iff n > \frac{1}{\varepsilon} =: N$$

bzw. $n > \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil + 1 =: N$, wenn $N \in \mathbb{N}$ sein soll.

(2) Die Folge $\{(-1)^{n+1}\}_{n=1}^{\infty}$ ist nicht konvergent. Zum Beweis nehmen wir das Gegenteil an; sei also a ihr Limes. Für $\varepsilon := \frac{1}{4}$ gibt es dann ein N mit $a_n \in U_{\frac{1}{4}}(a)$ für jedes $n > N$. Es folgt $1 \in U_{\frac{1}{4}}(a)$ und $-1 \in U_{\frac{1}{4}}(a)$, also $|1 - a| < \frac{1}{4}$ und $|-1 - a| < \frac{1}{4}$, d. h.

$$2 = |1 - (-1)| = |1 - a - (-1 - a)| \leq |1 - a| + |-1 - a| < \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2},$$

Widerspruch. Die Folge kann also doch nicht konvergieren.

(3) Die Folge $\{i^n\}_{n=1}^{\infty}$ ist offenbar nicht konvergent.

(4) Es gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(i + \frac{i^n}{n}\right) = i$, denn

$$i + \frac{i^n}{n} \in U_{\varepsilon}(i) \iff \left| i + \frac{i^n}{n} - i \right| = \left| \frac{i^n}{n} \right| = \frac{1}{n} < \varepsilon \iff n > \frac{1}{\varepsilon} =: N.$$

Noch ein weiteres Beispiel.

(5) Die Folge der Primzahlen ist nicht konvergent. Man sagt aber gelegentlich, sie konvergiere gegen unendlich.

Definition 2.5. *Eine Folge, die nicht konvergiert, heißt **divergent**.*

Man schreibt aber

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty = \infty \quad \text{bzw.} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty,$$

wenn für jedes $M > 0$ ein N existiert mit

$$a_n > M \quad \text{bzw.} \quad a_n < -M$$

für alle $n > N$.

2.3 Eigenschaften konvergenter Folgen

Satz 2.3 (Eindeutigkeit des Limes). *Aus $a_n \rightarrow a$ und $a_n \rightarrow b$ folgt $a = b$.*

Beweis. Wir nehmen $a \neq b$ an und wählen uns ein $\varepsilon > 0$ so, dass $U_\varepsilon(a) \cap U_\varepsilon(b) = \emptyset$ ist. Dann gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \implies a_n \in U_\varepsilon(a) \quad \forall n > N_1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = b \implies a_n \in U_\varepsilon(b) \quad \forall n > N_2.$$

Für $m > \max(N_1, N_2)$ folgt dann $a_n \in U_\varepsilon(a) \cap U_\varepsilon(b) = \emptyset$ — Widerspruch. Es muss also doch $a = b$ gelten.¹ \square

Satz 2.4. *Seien $\{a_n\}$ und $\{b_n\}$ reelle Folgen. Es gilt*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + i b_n) = a + i b \iff \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b.$$

Beweis. „ \implies “: Zu $\varepsilon > 0$ gibt es ein $N \in \mathbb{R}$ mit $|a_n + i b_n - (a + i b)| = |a_n - a + i(b_n - b)| < \varepsilon$. Für alle $n > N$ folgt

$$\begin{aligned} |a_n - a| &= |\Re(a_n - a + i(b_n - b))| \leq |a_n - a + i(b_n - b)| < \varepsilon, \\ |b_n - b| &= |\Im(a_n - a + i(b_n - b))| \leq |a_n - a + i(b_n - b)| < \varepsilon, \end{aligned}$$

also auch $a_n \rightarrow a$ und $b_n \rightarrow b$.

„ \impliedby “: Sei wieder $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Wegen $a_n \rightarrow a$ und $b_n \rightarrow b$ gibt es ein $N \in \mathbb{R}$ mit $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ und $|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $n > N$. Dies ergibt

$$|a_n + i b_n - (a + i b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

\square

Definition 2.6. *Eine Nullfolge ist eine Folge $\{a_n\}$ mit $a_n \rightarrow 0$.*

Eine Folge $\{a_n\}$ heißt beschränkt, wenn es eine positive reelle Zahl M gibt mit $|a_n| < M$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

¹ \mathbb{R} und \mathbb{C} sind sogenannte **HAUSDORFF-RÄUME**, da in ihnen jeweils zwei verschiedene Punkte auch disjunkte Umgebungen besitzen (HAUSDORFFSche Trennungseigenschaft).

Satz 2.5.

- (i) *Konvergente Folgen sind beschränkt.*
(ii) *Ist $\{a_n\}$ eine Nullfolge und ist $\{b_n\}$ beschränkt, so ist auch $\{a_n b_n\}$ eine Nullfolge.*

Beweis. (i) Gelte $a_n \rightarrow a$. Dann gibt es ein N mit $a_n \in U_1(a)$ für jedes $n > N$. Sei o. B. d. A. $N \in \mathbb{N}$. Für $n > N$ ist dann $|a_n - a| < 1$ und damit

$$|a_n| = |a_n - a + a| \leq |a_n - a| + |a| < 1 + |a|.$$

Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt also

$$|a_n| \leq \max(|a_1|, |a_2|, \dots, |a_{N-1}|, |a_N|, 1 + |a|) =: M.$$

- (ii) Gelte nun $a_n \rightarrow 0$ und $|b_n| \leq M$ für ein $M > 0$. Dann ist

$$|a_n b_n - 0| = |a_n b_n| = |a_n| |b_n| \leq |a_n| M < \varepsilon$$

für $|a_n| < \frac{\varepsilon}{M}$. Dies wird für alle $n > N = N\left(\frac{\varepsilon}{M}\right)$ garantiert. □

Beispiel 2.5. Sei $c_n = \frac{n!}{20^n}$. Für die ersten Glieder gilt

$$c_1 = 0.05, \quad c_2 = 0.005, \quad c_3 = 7.5 \cdot 10^{-4}, \quad c_4 = 1.5 \cdot 10^{-4}, \quad \dots, \quad c_{20} = 2.32 \cdot 10^{-8}.$$

Man könnte also $c_n \rightarrow 0$ vermuten. Nun ist aber $c_{60} = 7217$. Wir betrachten die Folge $\frac{1}{c_n} = \frac{20^n}{n!}$. Es ist

$$\frac{20^n}{n!} = \underbrace{\frac{20}{1} \cdot \frac{20}{2} \cdot \dots \cdot \frac{20}{20}}_{\text{konstant}} \cdot \underbrace{\frac{20}{21} \cdot \dots \cdot \frac{20}{n-1}}_{<1} \cdot \underbrace{\frac{20}{n}}_{\rightarrow 0}$$

für hinreichend große n . Damit gilt $\frac{1}{c_n} \rightarrow 0$, also $c_n \rightarrow \infty$.

Satz 2.6. *Gilt $a_n \rightarrow a$ und $b_n \rightarrow b$, so ist*

$$a_n \pm b_n \rightarrow a \pm b, \quad a_n b_n \rightarrow a b, \quad \frac{a_n}{b_n} \rightarrow \frac{a}{b} \text{ (falls } b \neq 0\text{)}.$$

Beweis. a) Zu $\varepsilon > 0$ finden wir ein N mit

$$|a_n + b_n - (a + b)| = |a_n - a + b_n - b| \leq |a_n - a| + |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \quad \forall n > N.$$

b) Aus der Konvergenz von $\{a_n\}$ ergibt sich die Existenz von $M > 0$ mit $|a_n| < M$ für jedes n . Für hinreichend große n ergibt sich

$$\begin{aligned} |a_n b_n - a b| &= |a_n b_n - a b - a_n b + a_n b| \\ &\leq |a_n b_n - a_n b| + |a_n b - a b| = |a_n| |b_n - b| + |b| |a_n - a| \\ &\leq M |b_n - b| + |b| |a_n - a| < M \frac{\varepsilon}{2M} + |b| \frac{\varepsilon}{2(|b| + 1)} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

c) Es gilt $\frac{1}{b_n} \rightarrow \frac{1}{b}$, denn $|b_n| > \frac{|b|}{2}$ für hinreichend große $n > n_0$ und

$$\left| \frac{1}{b_n} - \frac{1}{b} \right| = \frac{|b_n - b|}{|b_n| |b|} < \frac{2|b_n - b|}{|b|^2} < \varepsilon$$

für $n > N(\frac{\varepsilon |b|^2}{2}) > n_0$. Die Behauptung ergibt sich nun wegen $\frac{a_n}{b_n} = a_n \cdot \frac{1}{b_n} \rightarrow a \cdot \frac{1}{b} = \frac{a}{b}$ aus b). □

Beispiel 2.6. Es gilt $a_n = \frac{3n^2 + 4n + 5}{6n^2 + 7n + 8} = \frac{3 + \frac{4}{n} + \frac{5}{n^2}}{6 + \frac{7}{n} + \frac{8}{n^2}} \rightarrow \frac{3 + 0 + 0}{6 + 0 + 0} = \frac{1}{2}$.

Definition 2.7. Sei $a: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{K}$ eine Folge und $\pi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ eine Permutation (also eine bijektive Abbildung). Dann heißt die Folge $a \circ \pi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{K}$ eine **Umordnung** von a .

Sei also $\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \dots\}$ eine Folge $\{a_n\}$. Umordnungen dieser sind z. B.

$$\{a_2, a_3, a_1, a_4, a_6, a_5, \dots\} \quad \text{oder auch} \quad \{a_1, a_3, a_{17}, a_5, \dots\},$$

aber nicht $\{a_1, a_3, a_5, \dots, a_2, a_4, a_6, \dots\}$.

Satz 2.7. Jede Umordnung einer konvergenten Folge ist ebenfalls konvergent und zwar mit demselben Limes wie die Ausgangsfolge.

Beweis. Es sei $a_n \rightarrow a$. Für beliebiges $\varepsilon > 0$ liegen dann höchstens endlich viele a_n nicht in $U_\varepsilon(a)$. Die Umordnung der Folge sei $a_{\pi(n)}$. Es gibt nur endlich viele n so, dass $a_{\pi(n)} \notin U_\varepsilon(a)$ gilt. Damit ist auch $a_{\pi(n)} \in U_\varepsilon(a)$ für alle hinreichend großen n . \square

Wir schließen mit einigen Resultaten, die mit der Ordnungsrelation „ \leq “ auf \mathbb{R} zu tun haben.

Satz 2.8. Seien $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ und $\{c_n\}$ reelle Folgen. Dann gilt:

$$(i) \quad a_n \leq b_n \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b \implies a \leq b.$$

$$(ii) \quad \text{„Polizisten-Regel“: } a_n \leq c_n \leq b_n \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = g = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \implies \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = g.$$

Beweis. (i) Wir nehmen $a > b$ an. Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$ mit $a - \varepsilon > b + \varepsilon$. Wegen $a_n \rightarrow a$ existiert dann ein N_1 mit $a_n > a - \varepsilon$ für alle $n > N_1$. Aus $b_n \rightarrow b$ folgt $b_n < b + \varepsilon$ für alle $n > N_2$. Für alle $n > \max(N_1, N_2)$ heißt das $b_n < b + \varepsilon < a - \varepsilon < a_n$ — Widerspruch zu $a_n \leq b_n$.

(ii) Wir haben also $a_n > g - \varepsilon$ und $b_n < g + \varepsilon$ für alle $n > N$. Dann ist $g - \varepsilon < a_n \leq c_n \leq b_n < g + \varepsilon$, d. h. $g - \varepsilon < c_n < g + \varepsilon$, also $c_n \in U_\varepsilon(g)$ für alle $n > N$ und damit $c_n \rightarrow g$. \square

Beispiel 2.7. Wir betrachten die Folge $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$ und wollen $a_n \rightarrow \infty$ zeigen. Dazu untersuchen wir die Glieder a_{2^k} , $k \in \mathbb{N}$. Es gilt

$$\begin{aligned} a_{2^k} &= 1 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2^{k-1}} + \frac{1}{2^{k-1}+1} + \dots + \frac{1}{2^k-1}\right) + \frac{1}{2^k} \\ &> 1 + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^k} + \dots + \frac{1}{2^k}\right) + 0 \\ &> 1 + \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2}}_{k-1 \text{ Summanden}} = 1 + \frac{k-1}{2}. \end{aligned}$$

Sei nun $M > 0$. Dann haben wir $a_{2^k} > 1 + \frac{k-1}{2} > M$, falls k hinreichend groß ($k > 2M$) ist. Damit ist $a_n > M$ für $n > 2^k$ mit $k > 2M$, d. h. für $n > 2^{2M}$. Also gilt $a_n \rightarrow \infty$. Die Konvergenzgeschwindigkeit ist aber sehr klein. Das erste n mit $a_n > 100$ ist $n \approx 10^{43}$, das Alter unseres Universums ist etwa 10^{17} Sekunden.

Definition 2.8. Eine reelle Folge $\{a_n\}$ heißt **monoton wachsend**, wenn $a_n \leq a_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ bzw. **monoton fallend**, wenn $a_n \geq a_{n+1}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt. Eine Folge heißt **monoton**, wenn sie monoton wächst oder fällt.

Satz 2.9. Eine monotone Folge $\{a_n\}$ ist genau dann konvergent, wenn sie beschränkt ist. In diesem Fall gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sup_{n \geq 1} a_n \quad \text{bzw.} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \inf_{n \geq 1} a_n,$$

wenn $\{a_n\}$ monoton wächst bzw. monoton fällt.

Hierbei sind $\sup_{n \geq 1} = \sup a(\mathbb{N})$ und $\inf_{n \geq 1} = \inf a(\mathbb{N})$.

Beweis. Sei $\{a_n\}$ monoton wachsend (gehe anderenfalls zur Folge $\{-a_n\}$ über).

„ \Rightarrow “: Ist $\{a_n\}$ konvergent, so auch beschränkt nach Satz 2.5.

„ \Leftarrow “: Sei $\{a_n\}$ beschränkt. Dann existiert $a := \sup_{n \geq 1} a_n$ und es gilt $a_n \leq a$ für alle $n \geq 1$.

Andererseits gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein N mit $a_n > a - \varepsilon$ für alle $n > N$. Für diese n folgt damit $a - \varepsilon < a_n \leq a_n \leq a < a + \varepsilon$, d. h. $a_n \rightarrow a$. \square

Beispiel 2.8. Sei $a_n = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}$. Die Folge $\{a_n\}$ ist offensichtlich monoton wachsend und infolge

$$\begin{aligned} a_n &= 1 + \frac{1}{2 \cdot 2} + \frac{1}{3 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n \cdot n} \\ &< 1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{(n-1) \cdot n} \\ &= 1 + \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) = 2 - \frac{1}{n} < 2 \end{aligned}$$

von oben beschränkt, also konvergent. 1736 zeigte L. EULER², dass $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{\pi^2}{6}$ gilt, vgl. Beispiel 9.2 (5).

²Leonhard EULER (1707 - 1783), schweizer Mathematiker. Er war trotz seiner völligen Erblindung im Jahr 1771 unglaublich produktiv: 866 Publikationen tragen seinen Namen. Die Symbole e , π , i , \sum , $f(x)$ gehen auf ihn zurück. Arbeitsgebiete: Differential- und Integralrechnung, Theorie der Gamma- und Betafunktion, Zahlentheorie, Algebra, Anwendung mathematischer Methoden in den Sozial- und Wirtschaftswissenschaften (Rentenrechnung, Lotterie, Lebenserwartung), Mechanik (Hydrodynamik, Kreiselltheorie), Optik (Wellentheorie des Lichts), mathematische Musiktheorie.

2.4 Teilfolgen & Partielle Grenzwerte

Definition 2.9. Sei $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ eine Folge und $\{n_1, n_2, n_3, \dots\}$ eine unendliche Teilmenge von \mathbb{N} mit $n_1 < n_2 < n_3 < \dots$. Die Folge $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ heißt dann eine **Teilfolge** von $\{a_n\}$.

Beispiel 2.9. Sei $a_n = \{1, -1, 1, -1, \dots\}$. Teilfolgen sind dann beispielsweise

$$\{a_1, a_3, a_5, \dots\} = \{1, 1, 1, \dots\} \quad \text{oder} \quad \{a_2, a_4, a_6, \dots\} = \{-1, -1, -1, \dots\}$$

sowie allgemein jede Folge aus Einsen und Minus-Einsen

$$\{1, 1, 1, -1, -1, 1, -1, 1, 1, -1, \dots\},$$

aber nicht $\{1, 1, 1, \dots, -1, -1, -1, \dots\}$.

Definition 2.10. Eine Zahl a heißt **partieller Grenzwert** einer Folge, wenn es eine gegen a konvergente Teilfolge gibt.

Beispiel 2.10. (1) Die Folge $\{1, -1, 1, -1, \dots\}$ hat die Menge der partiellen Grenzwerte $\{1, -1\}$.

(2) Gilt $a_n \rightarrow a$, so ist a einziger partieller Grenzwert, d. h. jede Teilfolge strebt gegen a .

(3) Die Folge $\{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$ besitzt keinen partiellen Grenzwert.

(4) Sei $\{a_n\}$ die Folge aller rationalen Zahlen. Die Menge ihrer partiellen Grenzwerte ist \mathbb{R} . Man sagt, dass die Menge \mathbb{Q} **dicht** in der Menge \mathbb{R} liegt.

Satz 2.10 (BOLZANO-WEIERSTRASS³). Jede beschränkte Folge besitzt einen partiellen Grenzwert.

³Bernardus Placidus Johann Nepomuk BOLZANO (1781 - 1848), tschechischer Mathematiker, katholischer Priester, Philosoph. Grundlagenforschung in der Analysis, bewies 1817 den Zwischenwertsatz, führte CAUCHY-Folgen schon vier Jahre vor A. L. CAUCHY ein.

Karl Theodor Wilhelm WEIERSTRASS (1815 - 1897), deutscher Mathematiker. Wurde bekannt durch seine *Weierstraßsche Strenge*, Mitbegründer der Funktionentheorie, entscheidende Beiträge zu elliptischen Funktionen, Differentialgeometrie und Variationsrechnung.

Beweis. a) Sei $\{a_n\}$ zunächst eine reelle beschränkte Folge, d. h., es gibt $c, d \in \mathbb{R}$ mit $c \leq a_n \leq d$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wir definieren nun eine Menge E mit

$$E := \{x \in \mathbb{R} : \exists \text{ höchstens endlich viele } n \text{ mit } a_n > x\}.$$

Diese Menge E hat folgende Eigenschaften:

- (i) $E \neq \emptyset$, denn infolge $a_n \leq d \forall n \geq 1$ gilt $d \in E$,
- (ii) E ist von unten beschränkt, denn c ist eine untere Schranke.

Aus (i) und (ii) folgt nun die Existenz von $a := \inf E$. Wir zeigen, dass a ein partieller Grenzwert ist und wählen uns dazu ein beliebiges $\varepsilon > 0$. Nach Definition des Infimums gibt es ein $x \in E$ mit $x - \varepsilon \notin E$. Daraus folgt $a_n < a + \varepsilon$ für fast alle $n \geq 1$. Wäre nun $a - \varepsilon \in E$, so folgte nach Definition von E auch $a \in E$ und wir würden eine Umgebung von a finden, in der nur endlich viele a_n liegen. Es ist also nur $a \notin E$ möglich. Dann gibt es unendlich viele $n \geq 1$ mit $a_n > a - \varepsilon$. Insgesamt ergibt sich nun die Existenz unendlich vieler n mit $a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$, d. h. jede ε -Umgebung $U_\varepsilon(a)$ enthält unendlich viele Glieder der Folge. Es gibt also ein $a_{n_1} \in U_1(a)$. Dann existiert auch ein $a_{n_2} \in U_{\frac{1}{2}}(a)$ mit $n_2 > n_1$ sowie ein $a_{n_3} \in U_{\frac{1}{3}}(a)$ mit $n_3 > n_2$ usw. So erhalten wir eine Teilfolge $\{a_{n_1}, a_{n_2}, a_{n_3}, \dots\}$, die gegen a konvergiert.

- b) Sei nun $\{a_n\}$ eine komplexe Folge, d. h. $a_n = x_n + iy_n$ mit $x_n, y_n \in \mathbb{R}$. Ist $|a_n|$ beschränkt, so auch $|x_n|$ und $|y_n|$. Wir haben in a) gezeigt, dass $x_{n_k} \rightarrow a \in \mathbb{R}$ gilt. Damit gilt auch $x_{n_{k_\ell}} \rightarrow a$. Analog ergibt sich $y_{n_{k_\ell}} \rightarrow b \in \mathbb{R}$; insgesamt also $x_{n_{k_\ell}} + iy_{n_{k_\ell}} \rightarrow a + ib$. □

Einen alternativen Beweis des Satzes von BOLZANO-WEIERSTRASS, der (das zum Vollständigkeitsaxiom äquivalente) Intervallschachtelungsprinzip benutzt, findet man z. B. Im Fichtenholz, Nr. 41.

Die Menge der partiellen Grenzwerte einer Folge hat einige bemerkenswerte Eigenschaften. Dafür zunächst die folgende Definition.

Definition 2.11. Sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder \mathbb{C} . Eine Teilmenge $E \subset \mathbb{K}$ heißt **offen**, wenn es für jedes $x \in E$ ein $\varepsilon = \varepsilon(x) > 0$ mit $U_\varepsilon(x) \subset E$ gibt. Andererseits heißt $E \subset \mathbb{K}$ **abgeschlossen**, wenn das Komplement $E^c := \mathbb{K} \setminus E$ offen ist.

Beispiel 2.11. Seien $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ und $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$.

- (1) Das Intervall (a, b) ist offen in \mathbb{R} .
- (2) Das Intervall $(a, b]$ ist nicht offen.

- (3) Das Intervall $[a, b]$ ist abgeschlossen.
 (4) Endliche Menge sind stets abgeschlossen.

Sei nun $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

- (5) Ein Kreis ohne Kreislinie (Rand) in der komplexen Ebene ist offen.
 (6) Ein Kreis mit „halbem“ Rand ist weder offen noch abgeschlossen.
 (7) \mathbb{C} ist offen und abgeschlossen zugleich.

Definition 2.12. Sei $E \subset \mathbb{K}$. Ein Punkt $a \in \mathbb{K}$ heißt **Häufungspunkt** von E , wenn für jedes $\varepsilon > 0$ die ε -Umgebung $U_\varepsilon(a)$ unendlich viele Punkte aus E enthält. Die Menge aller Häufungspunkte von E bezeichnen wir mit E' .

Beispiel 2.12. (1) Für $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ gilt $(a, b)' = (a, b]' = [a, b]' = [a, b]$.

(2) Die Menge der Häufungspunkte einer endlichen Menge ist \emptyset .

Die Eigenschaft einer Menge, offen oder abgeschlossen zu sein, hängt vom Raum ab, der jene Menge umgibt. So ist z. B. $(a, b) \subset \mathbb{R}$ offen, jedoch ist die Strecke zwischen Punkten a und b auf der reellen Achse in der komplexen Ebene nicht offen.

Eine zur Definition 2.12 äquivalente des Häufungspunktes ist: a ist genau dann Häufungspunkt von E , wenn jede ε -Umgebung von a einen von a verschiedenen Punkt aus E enthält.

Satz 2.11. Eine Menge E ist genau dann abgeschlossen, wenn sie alle ihre Häufungspunkte enthält, d. h. wenn $E' \subset E$ gilt.

Beweis. „ \Rightarrow “: Seien E abgeschlossen und a ein Häufungspunkt von E . Angenommen, es gilt $a \notin E$. Dann ist aber $a \in E^c$, und da E^c offen ist, gibt es ein $\varepsilon > 0$ mit $U_\varepsilon(a) \subset E^c$ — Widerspruch dazu, dass a Häufungspunkt von E ist.

„ \Leftarrow “: Möge die Menge E all ihre Häufungspunkte enthalten. Wir zeigen, dass dann E^c offen ist. Sei also $a \in E^c$. Infolge $E' \subset E$ ist $a \notin E'$. Es gibt also ε -Umgebungen $U_\varepsilon(a)$, die nur endlich viele Punkte $e_1, e_2, \dots, e_n \in E$ enthalten. Dann enthält $U_\delta(a)$, $\delta := \min(|e_1 - a|, \dots, |e_n - a|)$, keinen Punkt aus E , d. h. $U_\delta(a) \subset E^c$. \square

Satz 2.12. Sei $E \subset \mathbb{R}$ nichtleer, abgeschlossen und beschränkt. Dann besitzt E ein Minimum und ein Maximum, d. h. $\inf E \in E$ und $\sup E \in E$.

Beweis. Wegen $E \neq \emptyset$ und der Beschränktheit von E existieren $\inf E$ und $\sup E$ jedenfalls. Wir zeigen die Aussage nur für das Maximum (Minimum geht analog). Angenommen, es würde $\sup E \notin E$ gelten. Dann wäre $\sup E \in E^c$, und E^c ist wegen der Abgeschlossenheit von E offen. Es existierte daher ein $\varepsilon > 0$ mit $U_\varepsilon(\sup E) \subset E^c$. Insbesondere wäre dann $\sup E - \delta \notin E$ für $0 \leq \delta < \varepsilon$, womit $\sup E - \varepsilon$ auch eine obere Schranke von E wäre — Widerspruch dazu, dass $\sup E$ kleinste obere Schranke ist. \square

Satz 2.13. Die Menge der partiellen Grenzwerte einer beschränkten Folge $\{a_n\}$ ist stets nichtleer, abgeschlossen und beschränkt.

Beweis. Bezeichne E die Menge der partiellen Grenzwerte von $\{a_n\}$, wobei $|a_n| \leq M$ für alle $n \geq 1$ gelte. Nach dem Satz von BOLZANO-WEIERSTRASS ist $E \neq \emptyset$. Gilt $a \in E$ und $a_{n_k} \rightarrow a$, so folgt aus $|a_{n_k}| \leq M$ auch $|a| \leq M$, also ist E tatsächlich beschränkt. Wir haben noch die Abgeschlossenheit von E zu zeigen. Sei dazu a ein Häufungspunkt von E . Für jedes $k \in \mathbb{N}$ gibt es dann ein $e_k \in E$ mit $|a - e_k| < \frac{1}{k}$. Da $e_1 \in E$ ein partieller Grenzwert von $\{a_n\}$ ist, existiert ein a_{n_1} mit $|e_1 - a_{n_1}| < 1$. Da $e_2 \in E$ partieller Grenzwert ist, gibt es ein $n_2 > n_1$ mit $|e_2 - a_{n_2}| < \frac{1}{2}$. Dann gibt es auch ein $n_3 > n_2$ mit $|e_3 - a_{n_3}| < \frac{1}{3}$ usw. Damit haben wir eine Teilfolge $\{a_{n_k}\}$ mit der Eigenschaft $|a_{n_k} - e_k| < \frac{1}{k}$ gefunden. Wir zeigen noch, dass $a_{n_k} \rightarrow a$ gilt. Für $\varepsilon > 0$ ist

$$|a - a_{n_k}| = |a - e_k + e_k - a_{n_k}| \leq |a - e_k| + |e_k - a_{n_k}| < \frac{1}{k} + \frac{1}{k} = \frac{2}{k} < \varepsilon$$

für $k > \frac{2}{\varepsilon}$. Es folgt also $a_{n_k} \rightarrow a$, d. h. $a \in E$. Damit gilt $E' \subset E$, weswegen E nach Satz 2.11 abgeschlossen ist. \square

Definition 2.13. Sei $\{a_n\}$ eine reelle beschränkte Folge. Gemäß den Sätzen 2.12 und 2.13 besitzt die Menge E der partiellen Grenzwerte von $\{a_n\}$ ein Minimum und ein Maximum. Das Minimum von E nennt man **unteren Grenzwert (Limes inferior)**, $\liminf a_n = \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n$. Das Maximum von E heißt **oberer Grenzwert (Limes superior)**, $\limsup a_n = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n$.

Für jeden beliebigen partiellen Grenzwert a von $\{a_n\}$ gilt also

$$\underline{\lim} a_n \leq a \leq \overline{\lim} a_n.$$

Die Folge $\{a_n\}$ konvergiert genau dann mit dem Grenzwert a , wenn

$$\underline{\lim} a_n = a = \overline{\lim} a_n$$

gilt, wenn also a der einzige partielle Grenzwert von $\{a_n\}$ ist.

Weniger trivial ist das Folgende. Wir setzen

$$U_n := \sup_{k \geq n} a_k = \sup\{a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \dots\}, \quad L_n := \inf_{k \geq n} a_k = \inf\{a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \dots\}.$$

Offenbar ist $\{U_n\}$ monoton fallend und beschränkt (da $\{a_n\}$ beschränkt ist) und $\{L_n\}$ ist monoton wachsend und beschränkt. Damit existieren $U := \lim U_n$ sowie $L := \lim L_n$. Man kann $U = \overline{\lim} a_n$ und $L = \underline{\lim} a_n$ zeigen. Damit haben wir

$$\overline{\lim} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{k \geq n} a_k = \inf_{n \geq 1} \sup_{k \geq n} a_k, \quad \underline{\lim} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \inf_{k \geq n} a_k = \sup_{n \geq 1} \inf_{k \geq n} a_k.$$

Des Weiteren kann gezeigt werden, dass jede nichtleere und abgeschlossene Menge die Menge der partiellen Grenzwerte einer beschränkten Folge ist.

Definition 2.14. Eine Folge $\{a_n\}$ aus \mathbb{K} heißt eine **CAUCHY⁴-Folge (Fundamentalfolge oder auch insichkonvergente Folge)**, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N = N(\varepsilon)$ existiert mit $|a_n - a_m| < \varepsilon$ für alle $n, m > N$.

Satz 2.14. Eine Folge $\{a_n\}$ aus \mathbb{K} ist genau dann konvergent, wenn sie eine CAUCHY-Folge ist.

Beweis. „ \Rightarrow “: Sei $a := \lim a_n$. Zu beliebigem $\varepsilon > 0$ existiert dann ein $N \in \mathbb{R}$ mit $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ und $|a_m - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $n, m > N$. Also gilt

$$|a_n - a_m| \leq |a_n - a| + |a_m - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

⁴Augustin Louis CAUCHY (1789 - 1857), französischer Mathematiker. Baute die auf Newton und Leibniz basierenden Grundlagen der Analysis aus und bewies fundamentale Aussagen. Lieferte wichtige Beiträge zur Funktionentheorie.

d. h. $\{a_n\}$ ist eine CAUCHY-Folge.

„ \Leftarrow “: Sei $\{a_n\}$ eine CAUCHY-Folge. Für beliebiges $\varepsilon > 0$ existiert dann ein reelles $N = N(\varepsilon)$ mit $|a_n - a_m| < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $n, m > N$. Insbesondere gilt also $|a_n - a_m| < 1$ für $n, m > N(2)$ und damit

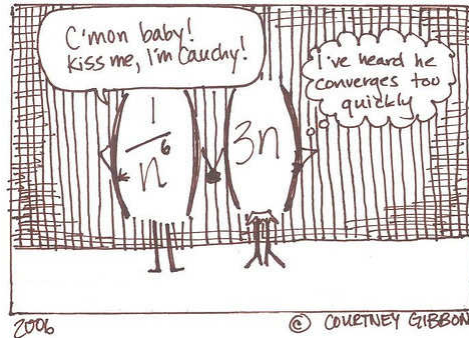
$$|a_n - a_{N(2)+1}| < 1 \quad \forall n > N(2).$$

Dies impliziert zunächst die Beschränktheit von $\{a_n\}$. Nach Satz 2.10 (BOLZANO-WEIERSTRASS) besitzt $\{a_n\}$ einen partiellen Grenzwert a ; wir zeigen $a = \lim a_n$. Da a ein partieller Grenzwert ist, gibt es ein $k > N(\varepsilon)$ mit $|a - a_k| < \frac{\varepsilon}{2}$, also

$$|a_n - a| \leq |a_n - a_k| + |a_k - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

also $a_n \rightarrow a$. □

Satz 2.14 besagt, dass \mathbb{R} und \mathbb{C} **vollständig** sind, d. h. jede insichkonvergente Folge aus $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder \mathbb{C} konvergiert auch in \mathbb{K} , d. h. besitzt einen Grenzwert in \mathbb{K} . Beispielsweise ist $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ nicht vollständig, denn $a_n = \frac{1}{n}$ ist zwar eine CAUCHY-Folge, aber es gilt $\lim a_n \notin \mathbb{R} \setminus \{0\}$.



2.5 Reihen und ihre Summen

Definition 2.15. Sei $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ eine Folge aus \mathbb{R} oder \mathbb{C} . Die Folge $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$, die durch $S_n := a_1 + a_2 + \dots + a_n$ definiert wird, heißt die aus $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ gebildete **Reihe** und wird mit $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ bezeichnet.

Diese Reihe heißt **konvergent** bzw. **divergent**, wenn ihre **Partialsommenfolge** $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ konvergiert bzw. divergiert.

Im Konvergenzfall nennt man den Grenzwert der Folge $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ die **Summe** (oder den **Wert**) der Reihe und bezeichnet ihn ebenfalls mit $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Beispiel 2.13. (1) Der Ausdruck $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots$ heißt **harmonische Reihe** und steht für die Folge $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ mit $S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$. Aus Beispiel 2.7 wissen wir, dass sie divergiert, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$.

(2) Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots$ meint die Folge $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ mit $S_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2}$. Sie konvergiert laut Beispiel 2.8 mit $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} = 1 - 1 + 1 - 1 \pm \dots$ bedeutet die Folge $\{1, 0, 1, 0, \dots\}$. Die Reihe divergiert, d. h. hat keine Summe. Dinge wie

$$(1 - 1) + (1 - 1) + \dots + (1 - 1) = 0 + 0 + \dots + 0 = 0 \text{ und}$$

$$1 + (-1 + 1) + (-1 + 1) + \dots + (-1 + 1) = 1 + 0 + 0 + \dots + 0 = 1,$$

also existiert Gott

sind Käse.

Konvergenzkriterien dienen dazu, Reihen auf Konvergenz zu untersuchen, ohne dabei ihre Partialsommenfolge zu betrachten.

Satz 2.15 (Notwendiges Kriterium). *Konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, so gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.*

Beweis. Sei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent, also

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n \rightarrow S, \quad S_{n-1} = a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} \rightarrow S.$$

Daraus folgt $a_n = S_n - S_{n-1} \rightarrow S - S = 0$. □

Die Bedingung $a_n \rightarrow 0$ ist für die Konvergenz einer Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jedoch nicht hinreichend, wie das Beispiel der harmonischen Reihe illustriert.

Satz 2.16 (Geometrische Reihe). Sei $q \in \mathbb{C}$. Die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = 1 + q + q^2 + q^3 + \cdots$$

heißt **geometrische Reihe** und konvergiert genau für $|q| < 1$. In diesem Fall gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}.$$

Beweis. Für $q \in \mathbb{C}$ mit $|q| \geq 1$ ist $\{q^n\}_{n=0}^{\infty}$ keine Nullfolge, weswegen $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ nach Satz

2.15 divergiert. Sei also $|q| < 1$. Dann haben wir

$$\begin{aligned} (1 + q + q^2 + \cdots + q^n)(1 - q) &= 1 + q + q^2 + \cdots + q^n - q - q^2 - q^3 - \cdots - q^{n+1} \\ &= 1 - q^{n+1}, \end{aligned}$$

d. h. $1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \rightarrow \frac{1}{1 - q}$, da $q^{n+1} \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$ gilt. □

Satz 2.17 (Vergleichskriterium).

- (i) Majorantenkriterium: Seien $0 \leq a_n \leq c_n$ für alle $n \geq 1$ und $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ konvergent. Dann ist auch $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent.
- (ii) Minorantenkriterium: Seien $0 \leq d_n \leq a_n$ für alle $n \geq 1$ und $\sum_{n=1}^{\infty} d_n$ divergent. Dann ist auch $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergent.

Beweis. (i) Sei $C_n := c_1 + c_2 + \dots + c_n$. Da $\{C_n\}$ konvergiert, ist $\{C_n\}$ beschränkt, also $C_n \leq C$ für alle $n \geq 1$. Die Folge $\{A_n\}$ mit $A_n := a_1 + a_2 + \dots + a_n$ ist infolge $a_n \geq 0$ monoton wachsend und wegen

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n \leq c_1 + c_2 + \dots + c_n = C_n \leq C$$

beschränkt, also konvergent nach Satz 2.9.

(ii) Annahme: $\{A_n\}$ ist konvergent. Dann folgt aus (i) die Konvergenz von $\{D_n\}$, $D_n := d_1 + d_2 + \dots + d_n$, — Widerspruch. □

Beispiel 2.14. Wir untersuchen für $\alpha \in \mathbb{Q}$ die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} = 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \dots$. Bekanntlich divergiert sie für $\alpha = 1$ und konvergiert für $\alpha = 2$. Sei nun $\alpha > 0$. Für $\alpha < \beta$ gilt $n^\alpha \leq n^\beta$, also $\frac{1}{n^\beta} \leq \frac{1}{n^\alpha}$. Aus der Konvergenz von $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ und $\frac{1}{n^\alpha} \leq \frac{1}{n^2}$ für $\alpha > 2$ folgt nach Satz 2.17 (i) die Konvergenz der Reihe für $\alpha > 2$. Da die harmonische Reihe divergiert und $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{n^\alpha}$ für $\alpha < 1$ gilt, divergiert die Reihe für $\alpha < 1$. Wie sich die Reihe für $1 < \alpha < 2$ verhält, klären wir später.

Definition 2.16. Eine Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ heißt **alternierend**, wenn die a_n abwechselnd positive und reelle Zahlen sind.

Satz 2.18 (LEIBNIZ-Kriterium). Es sei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ eine alternierende Reihe und möge $|a_n|$ monoton gegen 0 konvergieren. Dann ist die Reihe konvergent und für ihre Summe S gilt

$$\left| \sum_{k=1}^n a_k - S \right| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \right| \leq |a_{n+1}|.$$

Beweis. Wir schreiben $a_n = (-1)^{n+1} b_n$, d. h. $b_n = |a_n|$. O. B. d. A. sei $a_1 > 0$. Dann gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots = b_1 - b_2 + b_3 - b_4 \pm \dots$$

Dann ist

$$\begin{aligned} S_{2n} &= (b_1 - b_2) + (b_3 - b_4) + \cdots + (b_{2n-1} - b_{2n}), \\ S_{2n+1} &= b_1 - (b_2 - b_3) - (b_4 - b_5) - \cdots - (b_{2n} - b_{2n+1}), \end{aligned}$$

woraus

$$0 \stackrel{*}{\leq} S_{2n} \stackrel{*\prime}{\leq} S_{2n+1} \stackrel{*}{\leq} b_1 \quad (2.1)$$

folgt (denn $*$: b_n ist monoton fallend, $*'$: $b_{2n+1} \geq 0$). Damit sind $\{S_{2n}\}$ monoton wachsend und $\{S_{2n+1}\}$ monoton fallend. Da diese Folgen beschränkt sind, existieren die Limes $\alpha := \lim S_{2n}$ und $\beta := \lim S_{2n+1}$. Aus (2.1) folgt $0 \leq \alpha \leq \beta \leq b_1$ und $S_{2n+1} - S_{2n} = b_{2n+1} \rightarrow 0$, also $\alpha = \beta =: S$, d. h. $S_{2n} \rightarrow S$ und $S_{2n+1} \rightarrow S$, mithin $S_n \rightarrow S$.

Zur Abschätzung des Fehlers. Aus $0 \leq S \leq b_1$ folgt

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} a_k \right| \leq b_1 = |a_1|. \quad (2.2)$$

Betrachtet man statt $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$ die Reihe $a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} + \cdots$, so folgt aus (2.2)

$$\left| \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \right| \leq |a_{n+1}|.$$

□

Beispiel 2.15. (1) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} = 1 - 1 + 1 - 1 \pm \cdots$. Infolge $\lim(-1)^{n-1} \neq 0$ ist Satz 2.18 nicht anwendbar.

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \mp \cdots$. Hier ist Satz 2.18 anwendbar, da $|a_n| = \frac{1}{n}$ monoton gegen 0 geht. Man kann $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \log 2$ zeigen.

(3) Die Beträge der Reihenglieder von $1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5} \mp \cdots$ streben zwar gegen 0, aber die Konvergenz erfolgt nicht monoton.

(4) G. W. LEIBNIZ⁵ selbst zeigte $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} \pm \cdots = \frac{\pi}{4}$.

⁵Gottfried Wilhelm LEIBNIZ (1646 - 1716), deutscher Mathematiker, Physiker, Philosoph, Historiker, Rechtswissenschaftler und vieles mehr. „Beim Erwachen hatte ich schon so viele Einfälle, dass der Tag nicht ausreichte, um sie niederzuschreiben.“ Gilt neben I. NEWTON als Erfinder der Infinitesimalrechnung und führte die Symbole $\frac{dy}{dx}$ und $\int dx$ ein. Entwickelte das Dualsystem, befasste sich mit Logik, fand LEIBNIZsche Formel zur Berechnung der Determinante.

Definition 2.17. Eine Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ heißt **absolut konvergent**, falls die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergiert.

Beispiel 2.16. Die alternierende harmonische Reihe aus Beispiel 2.15 (2) ist konvergent, aber nicht absolut konvergent.

Satz 2.19 (CAUCHY-Kriterium). Eine Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ist genau dann konvergent, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ ein $N(\varepsilon) \in \mathbb{R}$ existiert mit

$$\left| \sum_{k=n+1}^m a_k \right| < \varepsilon \quad \forall m > n > N(\varepsilon).$$

Beweis. Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ist genau dann konvergent, wenn $S_n := a_1 + a_2 + \dots + a_n$ eine CAUCHY-Folge ist, wenn es also zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N(\varepsilon)$ mit $|S_m - S_n| = \left| \sum_{k=n+1}^m a_k \right| < \varepsilon$ für $m > n > N(\varepsilon)$ gibt. \square

Satz 2.20. Ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergent, so konvergiert sie auch (im gewöhnlichen Sinne) und es gilt

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|.$$

Beweis. Setze $S_n := a_1 + a_2 + \dots + a_n$ und $T_n := |a_1| + |a_2| + \dots + |a_n|$. Gemäß Satz 2.19 gibt es für alle $\varepsilon > 0$ ein $N(\varepsilon)$ mit $\left| \sum_{k=n+1}^m |a_k| \right| < \varepsilon$ für $m > n > N(\varepsilon)$. Es folgt

$$\left| \sum_{k=n+1}^m a_k \right| \leq \sum_{k=n+1}^m |a_k| = \left| \sum_{k=n+1}^m |a_k| \right| < \varepsilon \quad \forall m > n > N(\varepsilon).$$

Wiederum nach Satz 2.19 ist dann die Reihe konvergent. Nach der Dreiecksungleichung gilt

$$|S_n| \leq T_n \implies -T_n \leq S_n \leq T_n \implies -T \leq S \leq T \implies |S| \leq T.$$

□

Satz 2.21 (Wurzelkriterium). *Gilt $\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$, so ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergent. Gilt aber $\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} > 1$, so divergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.*

Beweis. Sei $\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} =: q < 1$. Dann gibt es ein n_0 mit $|a_n| < (q + \varepsilon)^n$ für alle $n \geq n_0$ mit $q < q + \varepsilon < 1$. Da dann $\sum_{n=1}^{\infty} (q + \varepsilon)^n$ gemäß Satz 2.16 konvergiert, folgt aus Satz 2.17 (i) die Konvergenz der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Gilt $\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} > 1$, so gibt es unendlich viele n mit $\sqrt[n]{|a_n|} > 1$, also $|a_n| > 1$. Dann geht aber a_n nicht gegen 0, weshalb $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergieren muss. □

Satz 2.22 (Quotientenkriterium). *Gilt $\overline{\lim} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1$, so konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Im Falle $\underline{\lim} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| > 1$ divergiert diese Reihe.*

Beweis. Sei $\overline{\lim} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| =: q < 1$. Für jedes $\varepsilon > 0$ mit $q < q + \varepsilon < 1$ existiert dann ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < q + \varepsilon$ für jedes $n \geq n_0$. Für diese n gilt dann

$$\begin{aligned} |a_{n_0+1}| &< (q + \varepsilon) |a_{n_0}|, \\ |a_{n_0+2}| &< (q + \varepsilon) |a_{n_0+1}| < (q + \varepsilon)^2 |a_{n_0}|, \\ &\vdots \\ |a_n| &< (q + \varepsilon)^{n-n_0} |a_{n_0}| = (q + \varepsilon)^n \frac{|a_{n_0}|}{(q + \varepsilon)^{n_0}}. \end{aligned}$$

Das Majorantenkriterium mit der geometrischen Reihe als Vergleichsreihe liefert dann die Konvergenz von $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$.

Im Fall $\underline{\lim} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| > 1$ ist $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| > 1$ für alle $n \geq n_0$. Dies ergibt $|a_{n_0}| < |a_{n_0+1}| < |a_{n_0+2}| < \dots$, d. h. a_n geht nicht gegen 0, weswegen $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergiert. \square

Beispiel 2.17. (1) Für die **Exponentialreihe** $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, $x \in \mathbb{C}$, liefert das Wurzelkriterium

$$\sqrt[n]{\frac{|x|^n}{n!}} = \frac{|x|}{\sqrt[n]{n!}}.$$

Das ist blöd. Das Quotientenkriterium ergibt aber

$$\left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{x^n} \right| = \frac{|x|}{n+1} \rightarrow 0 < 1,$$

also die absolute Konvergenz für alle $x \in \mathbb{C}$.

(2) Für die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ sind das Wurzel- und das Quotientenkriterium infolge

$$\sqrt[n]{\frac{1}{n^\alpha}} = \frac{1}{\sqrt[n]{n^\alpha}} \rightarrow 1, \quad \frac{n^\alpha}{(n+1)^\alpha} = \left(\frac{n}{n+1} \right)^\alpha \rightarrow 1$$

nicht anwendbar, d. h. sie lassen keinen Schluss auf Konvergenz oder Divergenz zu.

Satz 2.23 (Reihenverdichtung). Sei $a_n > 0$ für alle $n \geq 1$, und möge $\{a_n\}$ monoton fallend gegen 0 konvergieren. Dann gilt:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konvergent} \iff \sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n} \text{ konvergent.}$$

Beweis. Wir setzen $S_k := \sum_{n=1}^k a_n$ und $T_k := \sum_{n=0}^k 2^n a_{2^n}$.

„ \Rightarrow “: Aus der Divergenz (die infolge der Bedingungen an die Glieder der Folge $\{a_n\}$ nur bestimmt gegen ∞ sein kann) der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ ergibt sich aus

$$\begin{aligned} S_{2^k} &= a_1 + a_2 + (a_3 + a_4) + (a_5 + a_6 + a_7 + a_8) + \cdots + (a_{2^{k-1}+1} + \cdots + a_{2^k}) \\ &\geq \frac{a_1}{2} + a_2 + 2a_4 + 4a_8 + \cdots + 2^{k-1} a_{2^k} \\ &= \frac{1}{2} (a_1 + 2a_2 + 4a_4 + 8a_8 + 2^k a_{2^k}) = \frac{1}{2} T_k \end{aligned}$$

unter Verwendung des Satzes 2.17 (ii) die Divergenz der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$.

„ \Leftarrow “: Aus der Konvergenz der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ erhalten wir mit Satz 2.17 (i) aus

$$\begin{aligned} S_{2^k} &= a_1 + a_2 + \cdots + a_{2^k} \\ &\leq a_1 + (a_2 + a_3) + (a_5 + a_6 + a_7 + a_8) + \cdots + (a_{2^k} + \cdots + a_{2^{k+1}-1}) \\ &\leq a_1 + 2a_2 + 4a_4 + \cdots + 2^k a_{2^k} = T_k \end{aligned}$$

die Konvergenz der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$. □

Beispiel 2.18. Für $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ ist die Verdichtung $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \frac{1}{(2^n)^\alpha} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{2^\alpha}\right)^n$. Sie konvergiert für $\frac{2}{2^\alpha} < 1 \Leftrightarrow 2 < 2^\alpha \Leftrightarrow \alpha > 1$. Damit ist die Lücke aus Beispiel 2.14 geschlossen.

2.6 Umordnungen und Produkte von Reihen

Definition 2.18. Gegeben sei eine Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Ist $\{b_n\}$ eine Umordnung der Folge $\{a_n\}$, d. h. gilt $b_n = a_{\pi(n)}$ mit einer Bijektion $\pi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, so heißt $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ eine **Umordnung** von $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Beispiel 2.19. Sei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \mp \dots$. Dann ist

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} \pm \dots$$

eine Umordnung. Keine Umordnung ist hingegen $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{6} - \dots$.

I. A. kann Umordnung die Konvergenz einer Reihe zu Nichte machen.

Definition 2.19. Eine Reihe heißt **unbedingt konvergent**, wenn sie konvergiert, und auch jede ihrer Umordnungen konvergiert und dieselbe Summe hat. Anderenfalls heißt die Reihe **bedingt konvergent**.

Die Beweise der folgenden vier Sätze wurden in der Vorlesung nicht gebracht, da sich der Professor „nicht zu sehr dem Modulhandbuch widersetzen will“.

Satz 2.24 (Umordnungssatz). Eine Reihe ist genau dann unbedingt konvergent, wenn sie absolut konvergiert.

Satz 2.25 (RIEMANNscher Umordnungssatz). Sei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ eine konvergente aber nicht absolut konvergente Reihe reeller Zahlen, und sei $-\infty \leq r \leq s \leq \infty$. Dann existiert eine Umordnung dieser Reihe dermaßen, dass die Menge der partiellen Grenzwerte der Umordnung gleich $[r, s]$ ist.

Beispiel 2.20. Wir wissen, dass für die alternierende harmonische Reihe aus Beispiel 2.15 (2)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \pm \dots = \log 2$$

gilt und wollen zeigen, dass es eine Umordnung $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\pi(n)-1}}{\pi(n)}$ mit der Summe ∞ gibt, wobei $\pi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ eine bijektive Abbildung sei. Hierzu betrachten wir die ungeraden Glieder der Ausgangsreihe von $\frac{1}{2^n+1}$ bis $\frac{1}{2^{n+1}-1}$. Es gilt

$$\frac{1}{2^n+1} + \frac{1}{2^n+3} + \dots + \frac{1}{2^{n+1}-1} > 2^{n-1} \cdot \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{4}.$$

Daraus ergibt sich, dass folgende Umordnung den Wert ∞ hat, also nicht konvergiert:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{7}\right) - \frac{1}{6} + \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \frac{1}{15}\right) - \frac{1}{8} + \dots + \left(\frac{1}{2^n+1} + \frac{1}{2^n+3} + \dots + \frac{1}{2^{n+1}-1}\right) - \frac{1}{2^{n+2}} + \dots$$

Jedes Glied gerader Ordnung kommt in der Tat genau einmal in der Umordnung vor — allerdings mit immer größer werdender Verzögerung. Daher können die Partialsummen über alle vorgegebenen Grenzen wachsen.

Ganz analog kann man Umordnungen dieser Reihe finden, die jede vorgegebene Zahl S zur Summe haben. Dazu addiert man so lange Glieder ungerader Ordnung, bis man S zum ersten Mal überschritten hat. Dann ist das erste gerade Glied dran und man unterschreitet S wieder. Jetzt sind wieder so viele ungeraden Glieder an der Reihe, bis man S gerade übersteigt, usw.

Insbesondere folgt, dass das Kommutativgesetz für unendliche Summen i. A. *nicht* gilt!

Satz 2.26 (Großer Umordnungssatz). *Sei A eine höchstens abzählbare Menge und für jedes $\alpha \in A$ sei $I_\alpha \subset \mathbb{N}$ mit $I_\alpha \cap I_\beta = \emptyset$ für $\alpha \neq \beta$ und mit $\bigcup_{\alpha \in I} I_\alpha = \mathbb{N}$. Dann gilt: Ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergent, so sind die Reihen $\sum_{i \in I_\alpha} a_i$ absolut konvergent und wir haben*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{\alpha \in A} \sum_{i \in I_\alpha} a_i,$$

wobei die Reihe rechts vom Gleichheitszeichen absolut konvergiert.

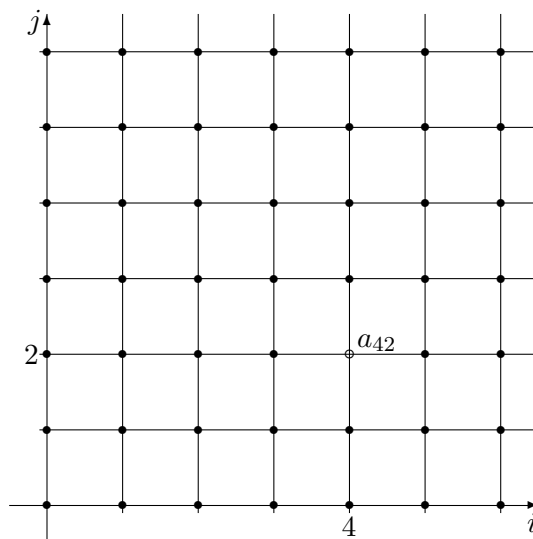
Für endliche Summen gilt $\left(\sum_{i \in I} a_i\right) \left(\sum_{j \in J} b_j\right) = \sum_{i \in I, j \in J} a_i b_j$.

Definition 2.20. Eine **Doppelfolge** ist eine Abbildung $a: \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{K}$, wobei $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$. Man schreibt a_{ij} statt $a(i, j)$ und bezeichnet sie mit $\{a_{ij}\}_{i,j=0}^{\infty}$.

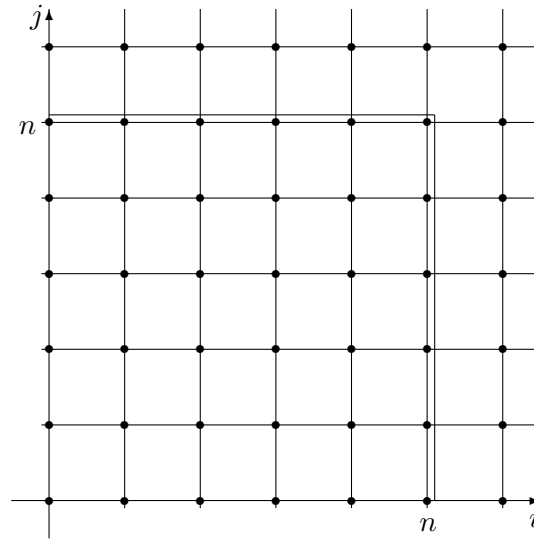
Die aus der Doppelfolge $\{a_{ij}\}_{i,j=0}^{\infty}$ nach der Regel $S_n := \sum_{i,j=0}^n a_{ij}$ gebildete Folge $\{S_n\}_{n=0}^{\infty}$ heißt **Doppelreihe** und wird $\sum_{i,j=0}^{\infty} a_{ij}$ bezeichnet.

Die Doppelreihe $\sum_{i,j=0}^{\infty} a_{ij}$ heißt **konvergent** bzw. **divergent**, wenn $\{S_n\}_{n=0}^{\infty}$ es ist. Im Konvergenzfall $S_n \rightarrow S$ nennt man S die **Summe** der Doppelreihe und bezeichnet S ebenfalls mit $\sum_{i,j=0}^{\infty} a_{ij}$.

Man kann sich eine Doppelfolge $\{a_{ij}\}_{i,j=0}^{\infty}$ also so vorstellen:



Dabei sitzen auf den Gitterpunkten die Glieder der Doppelfolge wie z. B. das Glied a_{42} im Punkt $(4, 2)$. Addiert man jetzt alle Glieder dieser Doppelfolge in einem vorgegebenen $(n \times n)$ -Quadrat (in der folgenden Abbildung für $n = 5$), so erhält man die n -te Partialsumme S_n der zugehörigen Doppelreihe $\sum_{i,j=0}^{\infty} a_{ij}$.



Satz 2.27 (Doppelreihensatz). *Konvergiert die Doppelreihe $\sum_{i,j=0}^{\infty} a_{ij}$ absolut, so gilt*

$$\sum_{i,j=0}^{\infty} a_{ij} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{i+j=n} a_{ij} \right) = \sum_{i=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{\infty} a_{ij} \right) = \sum_{j=0}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^{\infty} a_{ij} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i^2+j^2 \leq n^2} a_{ij},$$

wobei alle auftretenden Reihen wieder absolut konvergent sind.

Kurz gesagt: Eine absolut konvergente Doppelreihe kann beliebig aufsummiert werden.

Beispiel 2.21 Wir betrachten die Reihe $x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + \dots$. Konvergenz dieser Reihe würde $nx^n \rightarrow 0$, also $|x| < 1$, voraussetzen. Gilt andererseits $|x| < 1$, so folgt aus dem Wurzelkriterium

$$\overline{\lim} \sqrt[n]{|nx^n|} = |x| \overline{\lim} \sqrt[n]{n} = |x| < 1,$$

also die absolute Konvergenz dieser Reihe, d. h.

$$\begin{array}{cccccc} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x^5 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & x^4 & x^5 & \dots \\ 0 & 0 & x^3 & x^4 & x^5 & \dots \\ 0 & x^2 & x^3 & x^4 & x^5 & \dots \\ x & x^2 & x^3 & x^4 & x^5 & \dots \end{array}$$

Konvergenz dieser Reihe \Leftrightarrow absolute Konvergenz dieser Reihe $\Leftrightarrow |x| < 1$.

Betrachtet man für $|x| < 1$ nun die am Rand abgebildete Doppelfolge, so lautet die zugehörige Doppelreihe

$$\sum_{i,j=0}^{\infty} a_{ij} = \lim_{n \rightarrow \infty} (x + 2x^2 + 3x^3 + \dots + nx^n).$$

Da sie absolut konvergiert, kann sie nach der „Buchhalter-Methode“ berechnet werden, d. h. wir summieren zuerst alle Zeilen für sich auf und anschließend die Zeilensummen:

$$\begin{array}{cccccc}
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\
 0 & 0 & 0 & 0 & x^5 & \dots & = x^5 (1 + x + x^2 + \dots) = \frac{x^5}{1-x} \\
 0 & 0 & 0 & x^4 & x^5 & \dots & = x^4 (1 + x + x^2 + \dots) = \frac{x^4}{1-x} \\
 0 & 0 & x^3 & x^4 & x^5 & \dots & = x^3 (1 + x + x^2 + \dots) = \frac{x^3}{1-x} \\
 0 & x^2 & x^3 & x^4 & x^5 & \dots & = x^2 (1 + x + x^2 + \dots) = \frac{x^2}{1-x} \\
 x & x^2 & x^3 & x^4 & x^5 & \dots & = x (1 + x + x^2 + \dots) = \frac{x}{1-x} \\
 & & & & & & \hline
 & & & & & & \frac{x}{1-x} (1 + x + x^2 + \dots) = \frac{x}{(1-x)^2}.
 \end{array}$$

Wir haben also im Fall $|x| < 1$

$$x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + \dots = \frac{x}{(1-x)^2}.$$

Definition 2.21. Das **Produkt** zweier Reihen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ ist die Doppelreihe

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n \right) = \sum_{i,j=0}^{\infty} a_i b_j.$$

Satz 2.28 (CAUCHY-Produkt von Reihen). Seien $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ zwei absolut konvergente Reihen. Dann ist auch die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ mit

$$c_n := \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \dots + a_n b_0$$

absolut konvergent und für ihre Summe gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n \right).$$

Beweis. Die c_n lassen sich auch in der Form $\sum_{r+s=n} a_r b_s$ schreiben. Es wird also über alle Indexpaare (r, s) summiert, die sich in \mathbb{N}^2 auf der Diagonalen $r + s = n$ befinden. Für die Partialsumme C_N der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ gilt daher $C_N = \sum_{n=0}^N c_n = \sum_{(r,s) \in D_N} a_r b_s$, wobei $D_N := \{(r, s) \in \mathbb{N}^2 : r + s \leq N\}$ gesetzt wurde.

Ausmultiplizieren der Partialsummen $A_N := \sum_{n=0}^N a_n$ und $B_N := \sum_{n=0}^N b_n$ ergibt $A_N B_N = \sum_{(r,s) \in Q_N} a_r b_s$ mit $Q_N := \{(r, s) \in \mathbb{N}^2 : 0 \leq r, s \leq N\}$. Infolge $D_N \subset Q_N$ können wir $A_N B_N - C_N = \sum_{(r,s) \in Q_N \setminus D_N} a_r b_s$ schreiben.

Wie eben erhält man $A'_N B'_N = \sum_{(r,s) \in Q_N} |a_r| |b_s|$ für das Produkt der Partialsummen $A'_N := \sum_{n=0}^N |a_n|$ und $B'_N := \sum_{n=0}^N |b_n|$. Wegen $Q_{\lfloor N/2 \rfloor} \subset D_N$ gilt $Q_N \setminus D_N \subset Q_N \setminus Q_{\lfloor N/2 \rfloor}$, also

$$|A_N B_N - C_N| \leq \sum_{(r,s) \in Q_N \setminus Q_{\lfloor N/2 \rfloor}} |a_r| |b_s| = A'_N B'_N - A'_{\lfloor N/2 \rfloor} B'_{\lfloor N/2 \rfloor}.$$

Da $\{A'_N B'_N\}$ eine CAUCHY-Folge ist, strebt die letzte Differenz für $N \rightarrow \infty$ gegen 0, d. h. es gilt

$$\lim_{N \rightarrow \infty} C_N = \lim_{N \rightarrow \infty} A_N B_N = \lim_{N \rightarrow \infty} A_N \cdot \lim_{N \rightarrow \infty} B_N.$$

Damit sind die Konvergenz der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ und die behauptete Formel gezeigt.

Mit $|c_n| \leq \sum_{k=0}^n |a_k| |b_{n-k}|$ ergibt sich die absolute Konvergenz von $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ durch Anwendung des eben Bewiesenen auf die beiden Reihen $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ und $\sum_{n=0}^{\infty} |b_n|$. \square

3

Elementare Funktionen



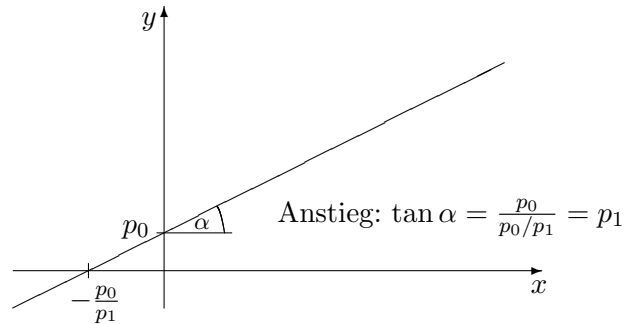
3.1 Polynome & Rationale Funktionen

Ein **Polynom** ist eine Funktion $p: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ der Form

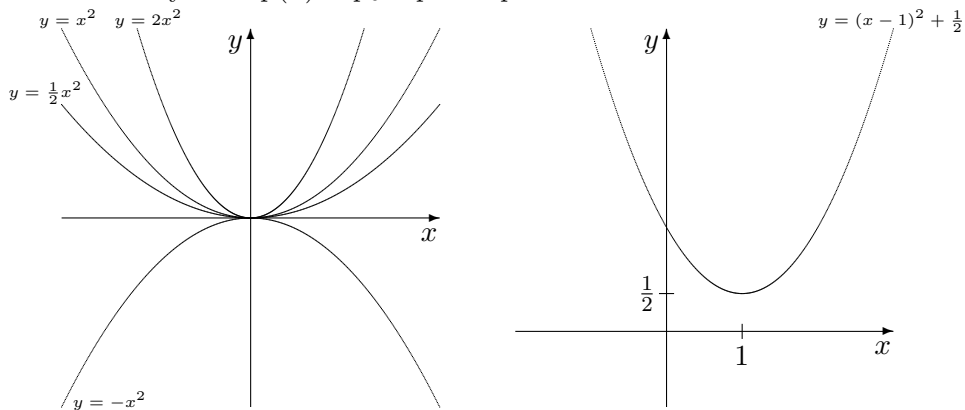
$$p(z) = p_0 + p_1 z + p_2 z^2 + \cdots + p_n z^n$$

mit $p_j \in \mathbb{C}$ und i. A. $p_n \neq 0$. Dann heißt $\deg p := n$ der **Grad** des Polynoms p . Ist hingegen z reell, so schreiben wir x statt z , also $p(x) = p_0 + p_1 x + p_2 x^2 + \cdots + p_n x^n$, $p_j \in \mathbb{R}$, und erhalten eine Abbildung $p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Beispiel 3.1. (1) Lineare Polynome $p(x) = p_0 + p_1 x$:

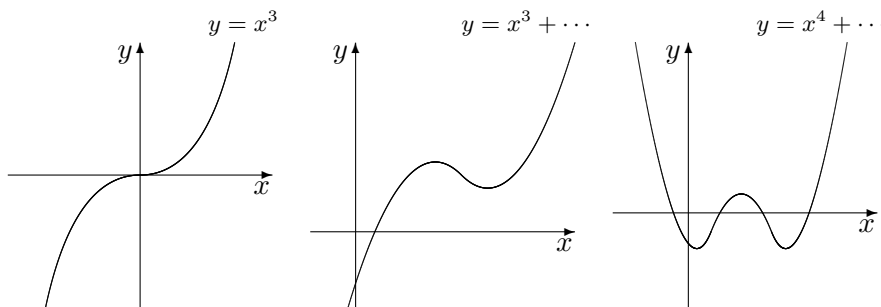


(2) Quadratische Polynome $p(x) = p_0 + p_1 x + p_2 x^2$:



Die Lösungen der quadratischen Gleichung $x^2 + px + q = 0$ sind gegeben durch $x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$.

(3) Polynome höheren Grades:



N. H. ABEL¹ zeigte, dass es für $n \geq 5$ keine Lösung der Gleichung $p_0 + p_1 x + \dots + p_n x^n = 0$

¹Niels Henrik ABEL (1802 - 1829), norwegischer Mathematiker. Einführung abelscher Integrale, Mitbegründer der Gruppentheorie. Aus seiner Schulzeit existiert noch ein Klassenbuch mit dem Eintrag seines Lehrers über ihn: „... dass er der größte Mathematiker der Welt werden kann, wenn er lange genug lebt.“

in Radikalen gibt.

Eine **rationale Funktion** ist eine Funktion der Gestalt

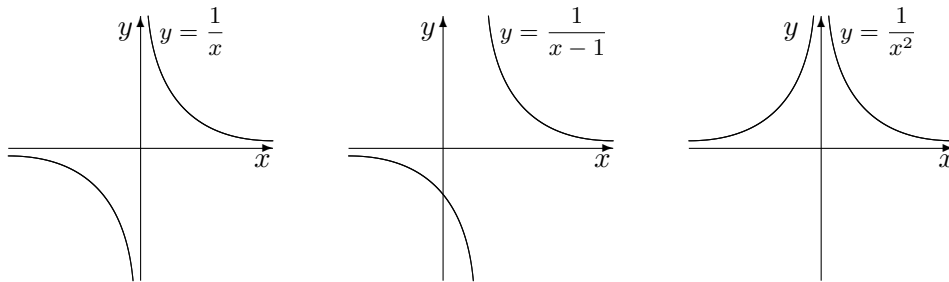
$$r(z) = \frac{p_0 + p_1 z + \cdots + p_n z^n}{q_0 + q_1 z + \cdots + q_m z^m},$$

d. h. der Quotient zweier Polynome. Dabei ist r auf der Menge N der Nullstellen des Nennerpolynoms nicht definiert:

$$r: \mathbb{C} \setminus N \longrightarrow \mathbb{C}.$$

Bei reellen Variablen ersetzt man wieder z durch x .

Beispiel 3.2.



Der Graph von $y = \frac{1}{x}$ heißt **Hyperbel**. Wir werden später feststellen, dass die Singularität von $y = \frac{1}{x^2}$ in $x = 0$ schlimmer ist als die von $y = \frac{1}{x}$, wenn es z. B. um die Berechnung von Integralen wie $\int \frac{f(x)}{x^2} dx$ oder $\int \frac{f(x)}{x} dx$ geht.

3.2 Potenzreihen

Definition 3.1. Eine **Potenzreihe** ist eine Reihe der Form

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots .$$

Man kann Potenzreihen also als „Polynome vom Grad ∞ “ bezeichnen. Man denkt sich die Koeffizienten a_j als gegeben und $z \in \mathbb{C}$ als variabel. Es stellt sich sofort die Frage, für welche $z \in \mathbb{C}$ eine Potenzreihe konvergiert.

Beispiel 3.3. (1) Wir wissen, dass die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} z^n = 1 + z + z^2 + z^3 + \dots$ genau im Falle $|z| < 1$ konvergiert.

(2) Im Beispiel 2.17(1) haben wir gesehen, dass die Exponentialreihe für alle $z \in \mathbb{C}$ konvergiert.

(3) Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} n! z^n = 1 + z + 2! z^2 + 3! z^3 + \dots$ konvergiert für $z = 0$. Im Fall $z \neq 0$ gilt $|n! z^n| = \frac{1}{\left| \frac{(1/z)^n}{n!} \right|} \rightarrow \infty$, wenn man z im Beispiel 2.17(1) durch $\frac{1}{z}$ ersetzt. Dann liegt keine Konvergenz vor.

Satz 3.1. Für eine Potenzreihe gibt es genau die folgenden drei Möglichkeiten:

1. Die Reihe konvergiert absolut für alle $z \in \mathbb{C}$.
2. Es gibt eine Zahl $R \in (0, \infty)$ derart, dass die Reihe für $|z| < R$ absolut konvergiert und für $|z| > R$ divergiert.
3. Die Reihe divergiert für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Definition 3.2. Die Zahl R aus Satz 3.1 heißt **Konvergenzradius** der Potenzreihe und $\{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$ wird **Konvergenzkreis** genannt. Im Fall 1 aus Satz 3.1 setzt

man $R := \infty$ und im Fall 3 setzt man $R := 0$.

Betrachtet man eine Potenzreihe nur für reelle x , schreibt man wieder x statt z ,

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots$$

und spricht vom **Konvergenzintervall** statt vom Konvergenzkreis.

Satz 3.2 (Formel von CAUCHY-HADAMARD²). Für den Konvergenzradius gilt

$$R = \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}},$$

wobei wir $\frac{1}{\infty} := 0$ und $\frac{1}{0} := \infty$ vereinbaren.

Beweis der Sätze 3.1 und 3.2. Wir haben

$$\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n z^n|} = \overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} |z| = |z| \frac{1}{R}.$$

Nach dem Wurzelkriterium liegt dann für $|z| \frac{1}{R} < 1$ absolute Konvergenz vor. Aus dem Beweis des Wurzelkriteriums folgt, dass für $|z| \frac{1}{R} > 1$ gilt $\lim a_n z^n \neq 0$, also liegt für $|z| \frac{1}{R} > 1$ Divergenz vor. \square

Die Frage, was für $|z| = R$ passiert, d. h. wie sich die Potenzreihe auf der sogenannten **Konvergenzkreislinie** verhält, ist i. A. delikater und bedarf gesonderter Untersuchungen.

Satz 3.3. Im Inneren des Konvergenzkreises darf man Potenzreihen gliedweise addieren, subtrahieren und das CAUCHY-Produkt bilden.

Dies folgt sofort aus der absoluten Konvergenz. Haben die Reihen dabei aber verschiedene Konvergenzradien, muss der kleinere von beiden gewählt werden.

²Jacques HADAMARD (1865 - 1963), französischer Mathematiker. Beiträge zu partiellen Differentialgleichungen, Arbeiten zur geometrischen Optik und Grenzwertproblemen. Bedeutend ist auch sein Beweis des Primzahlsatzes aus dem Jahr 1896.

Beispiel 3.4. Für $|z| < 1$ betrachten wir das Produkt

$$\begin{aligned} & (1 + z + z^2 + z^3 + \dots)(1 + z + z^2 + z^3 + \dots) \\ &= (1 + z + z^2 + z^3 + \dots) + (z + z^2 + z^3 + \dots) + (z^2 + z^3 + z^4 + \dots) + \dots \\ &= 1 + 2z + 3z^2 + 4z^3 + \dots = \frac{1}{(1-z)^2}. \end{aligned}$$

Damit haben wir

$$\begin{aligned} z + 2z^2 + 3z^3 + 4z^4 + \dots &= (1 + 2z + 3z^2 + 4z^3 + \dots) - (1 + z + z^2 + z^3 + \dots) \\ &= \frac{1}{(1-z)^2} - \frac{1}{1-z} = \frac{1 - (1-z)}{(1-z)^2} = \frac{z}{(1-z)^2}. \end{aligned}$$

3.3 Die Exponentialfunktion

Definition 3.3. Für $z \in \mathbb{C}$ ist die **Exponentialfunktion** $\exp z$ definiert durch

$$\exp z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \cdots .$$

Wir haben gesehen, dass die Reihe für $\exp z$ in der gesamten Ebene absolut konvergiert.

Satz 3.4 (Funktionalgleichung). Für alle $z, w \in \mathbb{C}$ gilt

$$\exp(z + w) = (\exp z) \cdot (\exp w).$$

Beweis. Aufgrund der absoluten Konvergenz der Exponentialreihe können wir Satz 2.28 zur Anwendung bringen:

$$\begin{aligned} (\exp z)(\exp w) &= \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^j}{j!} \right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{w^k}{k!} \right) = \sum_{j,k=0}^{\infty} \frac{z^j w^k}{j! k!} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{j+k=n} \frac{z^j w^k}{j! k!} \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{\ell=0}^n \frac{z^\ell w^{n-\ell}}{\ell! (n-\ell)!} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\sum_{\ell=0}^n \frac{n!}{\ell! (n-\ell)!} z^\ell w^{n-\ell} \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\sum_{\ell=0}^n \binom{n}{\ell} z^\ell w^{n-\ell} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+w)^n}{n!} = \exp(z+w). \end{aligned}$$

□

Definition 3.4. Die **EULERSche Zahl** e ist definiert durch

$$e := \exp 1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots = 2.718\,218\,828\,459\,045 \dots$$

Für $x \in \mathbb{Q}$ kann e^x wie üblich gebildet werden, d. h. $e^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{e^p}$ mit $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$.

Satz 3.5. Für reelle rationale Zahlen x gilt $\exp x = e^x$.

Beweis. Nach Definition von e haben wir $\exp 1 = e^1 = e$. Des weiteren gilt für $n, m \in \mathbb{N}$
 $\exp n = \exp(n-1+1) = \exp(n-1) \cdot \exp 1 = \dots = \underbrace{\exp 1 \cdot \dots \cdot \exp 1}_{n \text{ Faktoren}} = e \cdot \dots \cdot e = e^n$

und

$$\left(\exp \frac{1}{m}\right)^m = \underbrace{\exp \frac{1}{m} \cdot \dots \cdot \exp \frac{1}{m}}_{m \text{ Faktoren}} = \exp\left(\frac{1}{m} + \dots + \frac{1}{m}\right) = \exp 1 = e,$$

also $\exp \frac{1}{m} = e^{\frac{1}{m}}$. Außerdem gilt

$$\exp \frac{n}{m} = \exp\left(\underbrace{\frac{1}{m} + \dots + \frac{1}{m}}_{n \text{ Summanden}}\right) = \exp \frac{1}{m} \cdot \dots \cdot \exp \frac{1}{m} = \left(\exp \frac{1}{m}\right)^n = \left(e^{\frac{1}{m}}\right)^n = e^{\frac{n}{m}}.$$

Es gilt $\exp 0 = 1 = e^0$ und damit

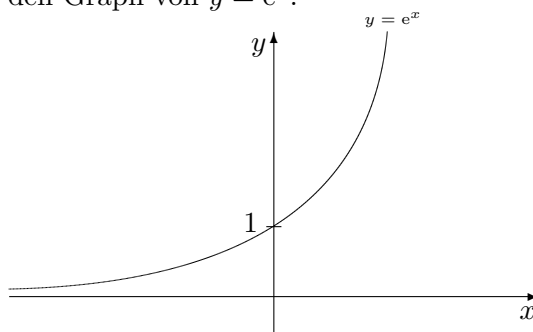
$$\exp\left(-\frac{n}{m}\right) \exp \frac{n}{m} = \exp\left(-\frac{n}{m} + \frac{n}{m}\right) = \exp 0 = 1,$$

d. h.

$$\exp\left(-\frac{n}{m}\right) = \frac{1}{\exp \frac{n}{m}} = \frac{1}{e^{\frac{n}{m}}} = e^{-\frac{n}{m}}.$$

□

Für $x \in \mathbb{R}$ kennen wir den Graph von $y = e^x$:



Vermöge der Sätze 3.5 und 3.6 können wir die Funktionalgleichung der Exponentialfunktion auch in der Form

$$e^{z+w} = e^z e^w \quad \forall z, w \in \mathbb{C}$$

schreiben.

Satz 3.6. Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $e^{ix} \in \mathbb{T} := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$.

Das bedeutet, dass e^{ix} für jedes reelle x auf dem Einheitskreis liegt.

Beweis. Für $z = a + ib \in \mathbb{C}$ nennen wir $\bar{z} := a - ib$ die zu z **komplex-konjugierte Zahl**. Dann gilt $z\bar{z} = (a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2 = |z|^2$ sowie

$$\overline{e^z} = \overline{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}} = \sum_{n=0}^{\infty} \overline{\left(\frac{z^n}{n!}\right)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\bar{z}^n}{n!} = e^{\bar{z}},$$

also

$$|e^{ix}|^2 = e^{ix} \overline{e^{ix}} = e^{ix} e^{-ix} = e^0 = 1,$$

für $x \in \mathbb{R}$, d. h. $|e^{ix}| = 1$. Daraus folgt die Behauptung. \square

Für $x = 0$ ist $e^{ix} = 1$. Lassen wir x wachsen, so bewegt sich e^{ix} monoton auf dem Einheitskreis gegen den Uhrzeigersinn und es gibt ein erstes $x_0 > 0$ mit $e^{ix_0} = -1$ (das kann bewiesen werden).

Definition 3.5. Für die kleinste Zahl $x_0 > 0$ mit $e^{ix_0} = -1$ setzen wir $\pi := \frac{x_0}{2}$.

Damit haben wir $e^{2\pi i} = 1$, also $e^{\pi i} = +1$ oder -1 . Nun würde $e^{\pi i} = +1$ aber $e^{i\frac{x_0}{2}} = -1$ bedeuten, was der Definition von x_0 widerspräche, d. h. es gilt

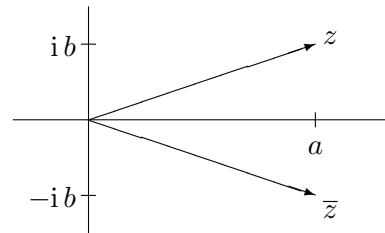
$$e^{\pi i} = -1.$$

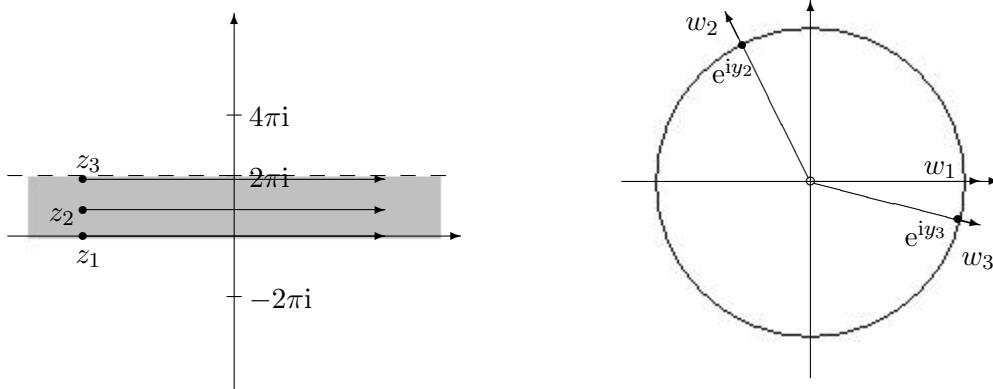
Diese bemerkenswerte Gleichung tauchte erstmals bei L. EULER auf.

Wir haben gesehen, wie die reelle e-Funktion aussieht. Wie stellt man sich nun e^z im Komplexen vor? Wir wissen bisher

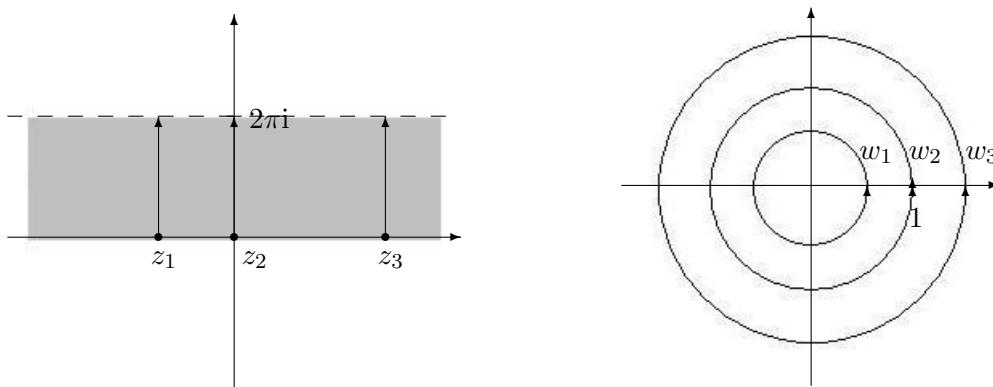
$$e^{z+2\pi i} = e^z e^{2\pi i} = e^z,$$

d. h. $2\pi i$ ist eine Periode der Exponentialfunktion. Es reicht also, wenn wir eine Vorstellung von e^z für $z \in \mathbb{C}$ mit $0 \leq \Im(z) < 2\pi$ haben. Dazu stellen wir uns ein solches z in der komplexen Ebene vor und lassen es parallel zur reellen Achse (bzw. parallel zur imaginären Achse) in Pfeilrichtung „wandern“ (Abbildungen links). Die Wanderung des Punktes z betrachten wir unter der Exponentialfunktion, d. h. wir verfolgen die Bewegung des Punktes $w = e^z$ (Abbildungen rechts):





In dieser Abbildung sind $z_1 = x_1 + 0i$, $z_2 = x_2 + iy_2$, $z_3 = x_3 + iy_3$ mit $y_3 = 2\pi - \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, sowie $w_j = e^{z_j}$ für $j \in \{1, 2, 3\}$.



Hier sind $z_1 = x_1 + 0i$, $z_2 = 0 + 0i$, $z_3 = x_3 + 0i$ mit $x_1 < 0$, $x_3 > 0$ und $w_j = e^{z_j}$ für $j \in \{1, 2, 3\}$.

3.4 Winkelfunktionen

Definition 3.6. Für $z \in \mathbb{C}$ definieren wir den **Sinus** und **Kosinus** durch

$$\begin{aligned}\sin z &:= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} \mp \dots, \\ \cos z &:= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} \mp \dots.\end{aligned}$$

Die Potenzreihen für $\sin z$ und $\cos z$ sind in ganz \mathbb{C} absolut konvergent.

Satz 3.7 (EULERSche Formel). Für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z.$$

Beweis. Unter Verwendung des großen Umordnungssatzes (Satz 2.26) an der Stelle * ergibt sich

$$\begin{aligned}e^{iz} &= 1 + \frac{iz}{1!} + \frac{(iz)^2}{2!} + \frac{(iz)^3}{3!} + \frac{(iz)^4}{4!} + \frac{(iz)^5}{5!} + \dots \\ &= 1 + iz - \frac{z^2}{2!} - i \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + i \frac{z^5}{5!} + \dots \\ &\stackrel{*}{=} \left(1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} \mp \dots\right) + i \left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} \mp \dots\right) = \cos z + i \sin z.\end{aligned}$$

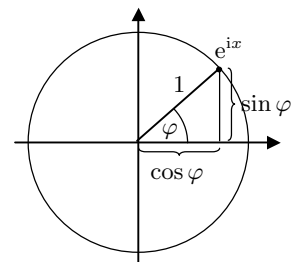
□

Vorstellung am Einheitskreis

Für reelle x ist damit $e^{ix} = \cos x + i \sin x$. Da $\cos x$ und $\sin x$ für reelle x ebenfalls reell sind, haben wir

$$\cos x = \Re(e^{ix}), \quad \sin x = \Im(e^{ix}).$$

Bezeichnet man 360° mit 2π , so ist der Winkel φ in der Abbildung gerade x .



An dieser Stelle kommt also das Bogenmaß ins Spiel; z. B. sind

$$360^\circ \hat{=} 2\pi, \quad 180^\circ \hat{=} \pi, \quad 90^\circ \hat{=} \frac{\pi}{2}.$$

Ersetzt man in der Definition 3.6 jeweils z durch $-z$, so ergibt sich unmittelbar

$$\sin(-z) = -\sin z, \quad \cos(-z) = \cos z.$$

Wendet man das in Satz 3.7 an, ergibt sich $e^{-iz} = \cos z - i \sin z$, also

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}.$$

Hieraus folgen alle weiteren Eigenschaften von Sinus und Kosinus wie z. B.

Satz 3.8. Für $z, w \in \mathbb{C}$ gilt

$$\begin{aligned} \sin^2 z + \cos^2 z &= 1, \\ \sin(z + w) &= \sin z \cos w + \cos z \sin w, \\ \cos(z + w) &= \cos z \cos w - \sin z \sin w. \end{aligned}$$

Beweis. Es gilt

$$\begin{aligned} \sin^2 z + \cos^2 z &= \left(\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \right)^2 + \left(\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \right)^2 \\ &= \frac{1}{4} (-e^{2iz} + 2 - e^{-2iz} + e^{2iz} + 2 + e^{-2iz}) = 1 \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned} \cos z \cos w - \sin z \sin w &= \frac{(e^{iz} + e^{-iz})(e^{iw} + e^{-iw})}{4} + \frac{(e^{iz} - e^{-iz})(e^{iw} - e^{-iw})}{4} \\ &= \frac{e^{i(z+w)} + e^{-i(z+w)}}{2} = \cos(z + w) \end{aligned}$$

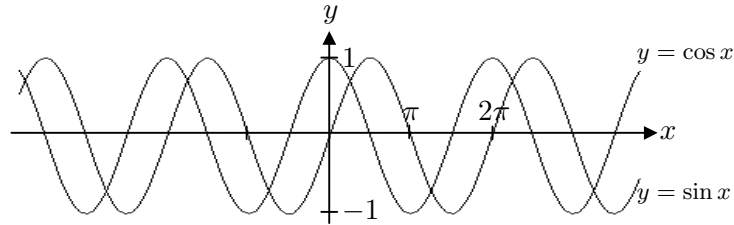
und analog für $\sin(z + w)$. □

Des weiteren haben wir

$$\begin{aligned} \sin(z + 2\pi) &= \frac{e^{i(z+2\pi)} - e^{-i(z+2\pi)}}{2i} = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \sin z, \\ \cos(z + 2\pi) &= \frac{e^{i(z+2\pi)} + e^{-i(z+2\pi)}}{2} = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \cos z, \end{aligned}$$

d. h. Sinus und Kosinus sind 2π -periodisch.

Graphen von Sinus und Kosinus für reelle x



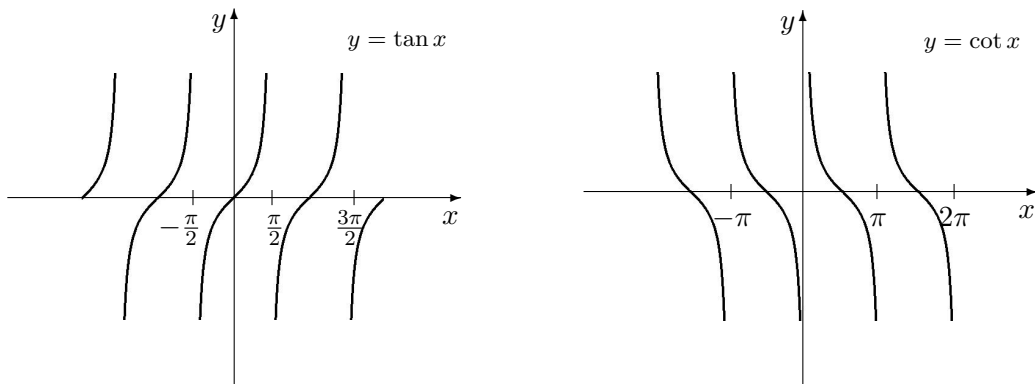
Aus der komplexen Periode von $e^z \pm e^{-z}$ wird durch Vormultiplikation mit i , was einer Drehung um 90° entspricht, eine reelle Periode von $e^{iz} \pm e^{-iz}$.

Definition 3.7. Für $z \in \mathbb{C}$ definieren wir des weiteren durch

$$\tan z := \frac{\sin z}{\cos z}, \quad \cot z := \frac{\cos z}{\sin z}, \quad \sec z := \frac{1}{\cos z}, \quad \operatorname{cosec} z := \frac{1}{\sin z}$$

den **Tangens**, **Kotangens**, **Sekans** und **Kosekans**.

Für reelle x ergeben sich folgende bekannte Bilder:



3.5 Hyperbelfunktionen

Diese Funktionen sind eigentlich unnötig, bisweilen aber durchaus praktisch.

Definition 3.8. Für alle $z \in \mathbb{C}$ sind der **Hyperbelsinus** und **Hyperbelkosinus** definiert durch

$$\sinh z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \frac{z^7}{7!} + \dots,$$

$$\cosh z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!} = 1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \frac{z^6}{6!} + \dots.$$

Es gilt $e^z = \sinh z + \cosh z$ und $e^{-z} = -\sinh z + \cosh z$, also

$$\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2},$$

$$\sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2},$$

$$\sin(iz) = iz - \frac{(iz)^3}{3!} + \frac{(iz)^5}{5!} \mp \dots = iz + i \frac{z^3}{3!} + i \frac{z^5}{5!} + \dots = i \sinh z,$$

$$\cos(iz) = 1 - \frac{(iz)^2}{2!} + \frac{(iz)^4}{4!} \mp \dots = 1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \dots = \cosh z.$$

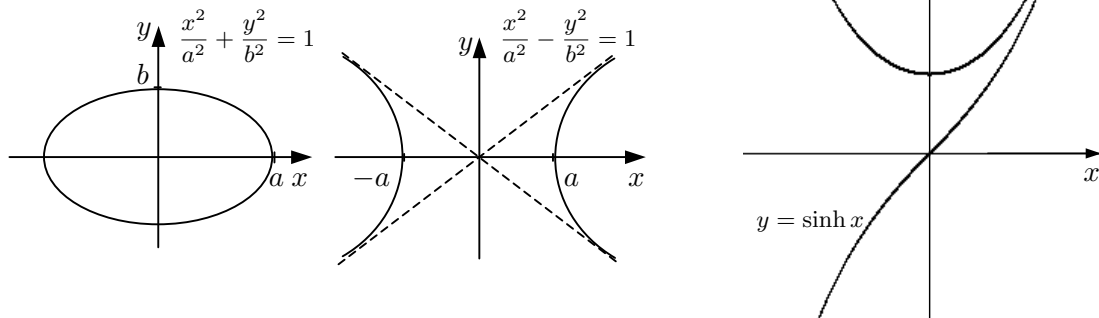
Insbesondere sind dann

$$\sin(x + iy) = \sin x \cos(iy) + \cos x \sin(iy) = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y,$$

$$\cos(x + iy) = \cos x \cos(iy) - \sin x \sin(iy) = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y.$$

Des weiteren gilt $\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1$.

In der nebenstehenden Abbildung sind die Graphen der Hyperbelfunktionen für reelle x zu sehen. Der Graph von $y = \cosh x$ ist eine sogenannte **Kettenlinie**. Aber woher kommt eigentlich die Bezeichnung „Hyperbel“? Betrachten wir dazu die Bilder einer Ellipse (links) und einer Hyperbel (rechts):



Man interessiert sich nun für die Parameterdarstellungen dieser beiden, nämlich

1. für die Hyperbel:

- a) linker Ast: $x = -a \cosh t, y = b \sinh t,$
- b) rechter Ast: $x = a \cosh t, y = b \sinh t,$

jeweils für $t \in \mathbb{R}$.

Hierin tauchen die eben besprochenen Funktionen auf.

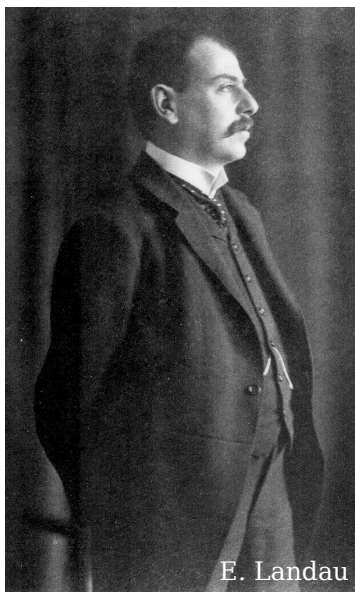
2. für die Ellipse:

$$x = a \cos t, y = b \sin t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Entsprechend könnte man also die Winkelfunktionen auch Ellipsenfunktionen nennen.

4

Funktionengrenzwerte & Stetigkeit



E. Landau



C. de la Vallée Poussin



P. Tschebyscheff

Aus $a_n = a(n)$, $n \rightarrow \infty$ wird nun $f(x)$, $x \rightarrow x_0$.

4.1 Reelle Funktionen auf reellen Intervallen

Definition 4.1. Seien $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion (Abbildung) und $x_0 \in (a, b)$. Man sagt, dass f in x_0 den **linksseitigen Grenzwert** g_- habe und notiert

$$f(x_0 - 0) = \lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = g_-,$$

wenn für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta = \delta(x_0, \varepsilon) > 0$ existiert mit

$$|f(x) - g_-| < \varepsilon \quad \forall x \in (a, b) \text{ mit } x_0 - \delta < x < x_0.$$

Ist analog $x_0 \in [a, b)$, so sagt man, f habe in x_0 den **rechtsseitigen Grenzwert** g_+ und schreibt

$$f(x_0 + 0) = \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = g_+,$$

wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta = \delta(x_0, \varepsilon) > 0$ gibt mit

$$|f(x) - g_+| < \varepsilon \quad \forall x \in (a, b) \text{ mit } x_0 < x < x_0 + \delta.$$

Beispiel 4.1. (1) $f: (-1, 4) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^2: & -1 < x < 1, \\ 3: & x = 1, \\ 3 - x: & 1 < x < 4. \end{cases}$

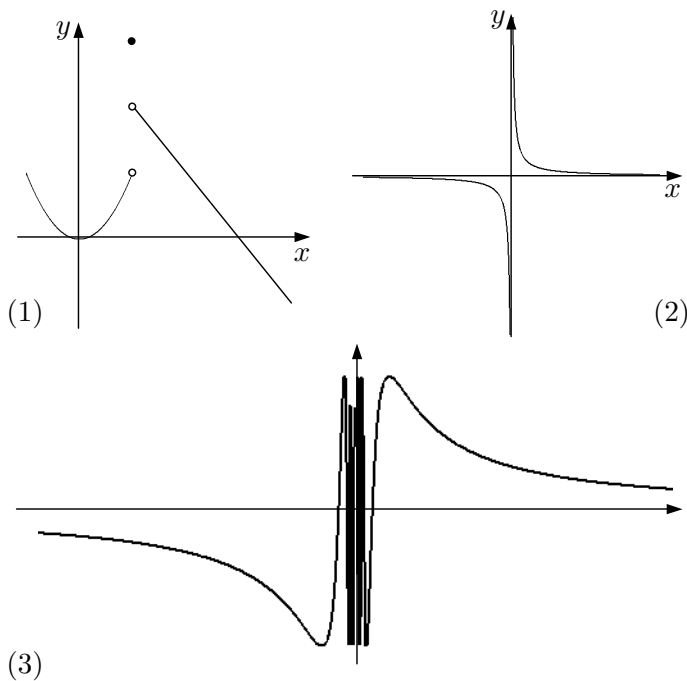
Es gilt $f(1 - 0) = 1 \neq 2 = f(1 + 0)$, $f(4 - 0) = -1$ und $f(-1 + 0) = 1$.

(2) $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$.

$f(0 + 0)$ und $f(0 - 0)$ existieren nicht bzw. $f(0 + 0) = \infty$, $f(0 - 0) = -\infty$.

(3) $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sin \frac{1}{x}$.

$f(0 + 0)$ existiert nicht.



Definition 4.2. Seien $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ und $x_0 \in (a, b)$. Man sagt, dass f in x_0 den **Grenzwert** g habe und schreibt

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = g,$$

wenn gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(x_0, \varepsilon) > 0 \text{ mit } |f(x) - g| < \varepsilon \forall x \in (a, b) \text{ mit } 0 < |x - x_0| < \delta.$$

Satz 4.1. Seien $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ und $x_0 \in (a, b)$. Der Grenzwert $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ existiert und ist gleich g genau dann, wenn $f(x_0 - 0)$ und $f(x_0 + 0)$ beide existieren und gleich g sind.

Beweis (nicht vorgetragen). „ \Rightarrow “: Gilt $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = g$, so bedeutet das

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(x_0, \varepsilon) > 0 : |f(x) - g| < \varepsilon \forall x \in (a, b) : x \in U_\delta(x_0) \setminus \{x_0\}.$$

Damit gilt insbesondere auch $|f(x) - g| < \varepsilon$ für alle $x \in (x_0 - \delta, x_0) \subset U_\delta(x_0) \setminus \{x_0\}$ und für alle $x \in (x_0, x_0 + \delta) \subset U_\delta(x_0) \setminus \{x_0\}$. Nach Definition 4.1 existieren dann der links- und rechtsseitige Grenzwert $f(x_0 - 0)$, $f(x_0 + 0)$, die beide gleich g sind.

„ \Leftarrow “: Gibt es zu beliebigem $\varepsilon > 0$ ein $\delta = \delta(x_0, \varepsilon) > 0$ mit $|f(x) - g| < \varepsilon$ für jedes $x \in (x_0 - \delta, x_0) \subset (a, b)$ und jedes $x \in (x_0, x_0 + \delta) \subset (a, b)$, so gilt $|f(x) - g| < \varepsilon$ auch für alle $x \in U_\delta(x_0) \setminus \{x_0\} \subset (a, b)$. Daraus folgt die Behauptung. \square

Definition 4.3. Eine Funktion $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ heißt **stetig im Punkt** $x_0 \in (a, b)$, wenn gilt:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

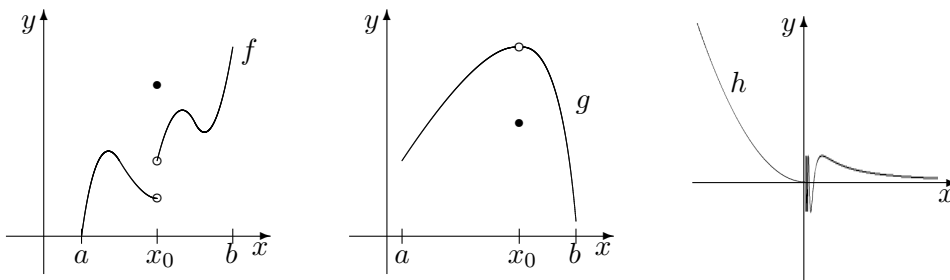
Sie heißt **stetig im Intervall** (a, b) , wenn sie in jedem Punkt aus (a, b) stetig ist.

Mit anderen Worten ist f genau dann in x_0 stetig, wenn der Grenzwert $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ existiert und gleich dem Funktionswert $f(x_0)$ ist. Anschaulich bedeutet die Stetigkeit von f in (a, b) , dass man den Graphen von f in (a, b) zeichnen kann, ohne den Stift absetzen zu müssen.

Beispiel 4.2. (1) Die unten abgebildete Funktion $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ ist in x_0 nicht stetig, da $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ nicht existiert. In allen anderen Punkten aus (a, b) ist f stetig.

(2) Die Funktion $g: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ aus der unteren Abbildung ist in x_0 nicht stetig, da $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ zwar existiert, aber von $g(x_0)$ verschieden ist.

(3) Die Funktion $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $h(x) = \begin{cases} x^2 & x \leq 0, \\ \sin \frac{1}{x} & x > 0, \end{cases}$ ist in $x_0 = 0$ unstetig, da $h(0+0)$ nicht existiert. In allen anderen Punkten ist h stetig.



Unstetigkeitsstellen werden wie folgt klassifiziert:

1. **Hebbare Unstetigkeiten:** Es gilt $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) \neq f(x_0)$. Ändert man $f(x_0)$, kann man Stetigkeit von f in x_0 erreichen.
2. **Unstetigkeiten 1. Art (Sprünge):** $f(x_0 - 0)$ und $f(x_0 + 0)$ existieren, sind aber verschieden.
3. **Unstetigkeiten 2. Art:** $f(x_0 - 0)$ oder $f(x_0 + 0)$ existiert nicht.

Beispiel 4.3. Die DIRICHLET¹-Funktion

$$\chi: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \chi(x) := \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \end{cases}$$

ist in jedem Punkt $x_0 \in \mathbb{R}$ unstetig, da weder $\chi(x_0 - 0)$ noch $\chi(x_0 + 0)$ existieren. Betrachtet man andererseits eine modifizierte Form der DIRICHLET-Funktion

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) := \begin{cases} x & x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \end{cases}$$

¹Peter Gustav Lejeune DIRICHLET (1805 - 1859), deutscher Mathematiker. Arbeitete vorwiegend auf den Gebieten Analysis und Zahlentheorie. Machte erstmals 1825 auf sich aufmerksam, als er mit Adrien-Marie LEGENDRE die FERMATSche Vermutung für $n = 5$ bewies. Trat 1855 in Göttingen als Nachfolger von GAUSS die Professur für höhere Mathematik an.

so ist diese nur im Punkt $x_0 = 0$ stetig und für jedes $x \neq x_0$ unstetig. Auf diese Weise kann man Funktionen mit einer beliebigen Anzahl von Stetigkeitsstellen konstruieren.

Satz 4.2. Seien $f, g: I := (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ und $x_0 \in I$. Sind f und g in x_0 stetig, so gilt dies auch für $f \pm g$, $f \cdot g$ und $\frac{f}{g}$ (falls $g(x_0) \neq 0$).

Beweis (nicht vorgetragen). Sei $\{x_n\}$ eine Folge aus I mit $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$. Da f und g in $x_0 \in I$ stetig sind, gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x_0)$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} g(x_n) = g(x_0)$. Gemäß den Regeln für Folggrenzwerte (Kapitel 2, Abschnitt 3) gilt dann

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (f \pm g)(x_n) = (f \pm g)(x_0), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (f g)(x_n) = (f g)(x_0), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{f}{g}\right)(x_n) = \left(\frac{f}{g}\right)(x_0),$$

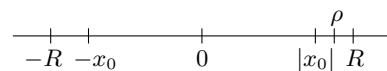
woraus die Behauptung folgt. □

Korollar 4.1 (zu Satz 4.2). Polynome sind überall stetig. Rationale Funktionen sind überall dort stetig, wo ihr Nenner nicht verschwindet.

Beweis. $f_0(x) = a$ ($a \in \mathbb{R}$) ist stetig, $f_1(x) = x$ ist stetig. Satz 4.2 liefert dann die Stetigkeit von $h_1(x) = ax$, $h_2(x) = bxx$, $h_2(x) = ax + bxx$ usw. □

Satz 4.3. Die Summe einer Potenzreihe ist im Inneren ihres Konvergenzintervalls stetig.

Beweis. Sei $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ absolut konvergent für $x \in (-R, R)$ und sei $x_0 \in (-R, R)$ beliebig. Wir wollen zeigen, dass f in x_0 stetig ist. Es existiert ein



ρ mit $|x_0| < \rho < R$. Wir haben

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &= \left| \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x^n - x_0^n) \right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| |x^n - x_0^n| = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| |x^n - x_0^n| \\ &\stackrel{*}{=} \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| |x - x_0| |x^{n-1} + x^{n-2} x_0 + \dots + x_0^{n-1}| \\ &= |x - x_0| \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| |x^{n-1} + x^{n-2} x_0 + \dots + x_0^{n-1}| \\ &\leq |x - x_0| \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \underbrace{(|x|^{n-1} + |x|^{n-2} |x_0| + \dots + |x_0|^{n-1})}_{n \text{ Summanden}} \end{aligned}$$

unter Verwendung von $*$: $\frac{a^n - b^n}{a - b} = a^{n-1} + a^{n-2} b + a^{n-3} b^2 + \dots + b^{n-1}$. Multipliziert man die rechte Seite dieser Gleichung mit $a - b$, erhält man

$$\begin{aligned} (a - b) (a^{n-1} + a^{n-2} b + a^{n-3} b^2 + \dots + b^{n-1}) \\ = a + a^{n-1} b + a^{n-2} b^2 + \dots + a b^{n-1} - b a^{n-1} - b^2 a^{n-2} - \dots - b^{n-1} a - b^n \\ = a^n - b^n. \end{aligned}$$

Ist nun $|x - x_0| < \delta_0$ mit hinreichend kleinem $\delta_0 > 0$, so ist $|x| < \rho$ (z. B. für $\delta_0 = \rho - |x_0|$). Dann erhalten wir

$$|f(x) - f(x_0)| \leq |x - x_0| \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| n \rho^{n-1}}_{=: M} \leq M |x - x_0|$$

mit $M < \infty$, da für den Konvergenzradius \tilde{R} von $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| n \rho^{n-1}$ gilt

$$\tilde{R} = \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n| n}} = \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[n]{|a_n|} \sqrt[n]{n})} = \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}} \geq R.$$

Also ist $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$, falls nur $|x - x_0| < \delta := \min(\delta_0, \frac{\varepsilon}{M})$ gilt. \square

Daraus folgt unmittelbar, dass e^x , $\sin x$, $\cos x$, $\sinh x$, $\cosh x$ auf ganz \mathbb{R} stetig sind.

Satz 4.4. Seien $f: (a, b) \rightarrow (c, d)$ und $g: (c, d) \rightarrow \mathbb{R}$ zwei Funktionen. Sind f in x_0 und g in $f(x_0)$ stetig, so ist auch $g \circ f$ in x_0 stetig.

Beweis. Zu beliebig vorgegebenem $\varepsilon > 0$ haben wir $|g(f(x)) - g(f(x_0))| < \varepsilon$ für $|f(x) - f(x_0)| < \delta'$, da g in $f(x_0)$ stetig ist. Weil f in x_0 stetig ist, gilt $|f(x) - f(x_0)| < \delta'$ für $|x - x_0| < \delta$, also ist

$$|g(f(x)) - g(f(x_0))| < \varepsilon \quad \text{für } |x - x_0| < \delta,$$

d. h. $g \circ f$ ist in x_0 stetig. □

Demnach sind auch e^{-x^2} , $\sin e^x$, etc. auf ganz \mathbb{R} stetig.

Bemerkung (ε - δ -Definition der Stetigkeit). *Eine Funktion $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ ist genau dann im Punkt $x_0 \in I$ stetig, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ so gibt, dass*

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \quad \forall x \in I : |x - x_0| < \delta$$

gilt.

Beweis. „ \Rightarrow “: Sei f in $x_0 \in I$ stetig, d. h. es gilt $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ (*). Annahme: Es gibt ein $\varepsilon > 0$, so dass es kein $\delta > 0$ mit $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ für alle $x \in I$ mit $|x - x_0| < \delta$ gibt. Zu jedem $\delta > 0$ existiert dann ein $x' \in I$ mit $|x' - x_0| < \delta$, aber $|f(x') - f(x_0)| \geq \varepsilon$. Wegen (*) gibt es nun eine Folge x_n in I mit

$$|x_n - x_0| < \frac{1}{n} \quad \text{und} \quad |f(x_n) - f(x_0)| \geq \varepsilon.$$

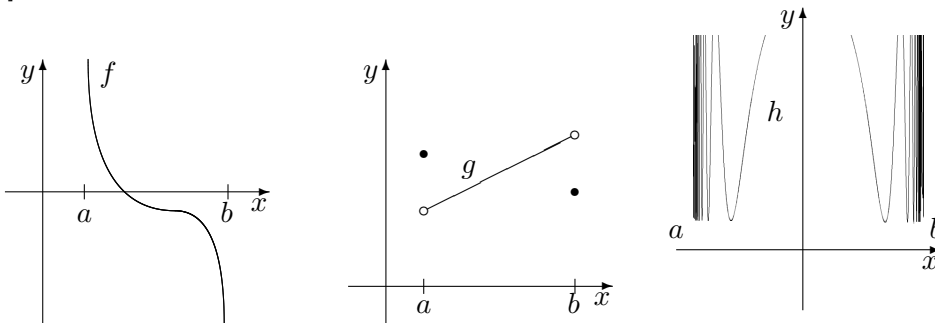
Dann ist $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ und, da f in x_0 stetig ist, auch $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x_0)$. Letzteres steht aber im Widerspruch zur Annahme $|f(x_n) - f(x_0)| \geq \varepsilon$ für jedes $n \in \mathbb{N}$.

„ \Leftarrow “: Seien $\varepsilon, \delta > 0$ mit $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ für alle $x \in I$ mit $|x - x_0| < \delta$. Für jede Folge x_n aus I mit $x_n \rightarrow x_0$ gibt es ein $N \in \mathbb{R}$ mit $|x_n - x_0| < \delta$ für alle $n \geq N$. Nach Voraussetzung ist dann $|f(x_n) - f(x_0)| < \varepsilon$ für alle $n \geq N$, also gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$. □

4.2 Zwischenwertsatz

Definition 4.4. Eine Funktion $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ heißt **stetig auf $[a, b]$** , wenn sie in (a, b) stetig ist und außerdem $f(a+0) = f(a)$ sowie $f(b-0) = f(b)$ gilt.

Beispiel 4.4. Die dargestellten Funktionen f , g und h sind in (a, b) stetig, aber auf $[a, b]$ unstetig.



Definition 4.5. Eine Funktion $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ heißt **beschränkt**, wenn ein $M \in \mathbb{R}$ existiert mit $|f(x)| \leq M$ für alle $x \in [a, b]$.

So sind beispielsweise die Funktionen g und h aus Beispiel 4.4 beschränkt; f ist unbeschränkt.

Satz 4.5 (WEIERSTRASS). Ist $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ auf $[a, b]$ stetig, so ist f beschränkt und die Menge $\{f([a, b])\}$ besitzt ein Minimum und ein Maximum, d. h. es existieren $p, q \in [a, b]$ mit

$$f(p) \leq f(x) \leq f(q) \quad \forall x \in [a, b].$$

Beweis. a) Wir nehmen an, dass f nicht beschränkt ist. Zu jedem $n \in \mathbb{N}$ gibt es dann ein $x_n \in [a, b]$ mit $|f(x_n)| > n$. Nach dem Satz von BOLZANO-WEIERSTRASS gibt es eine Teilfolge $\{x_{n_k}\}$ von $\{x_n\}$ und ein $x_0 \in \mathbb{R}$ mit $x_{n_k} \rightarrow x_0$ (denn infolge $x_n \in [a, b]$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist $\{x_n\}$ beschränkt). Aus $a \leq x_n \leq b$ folgt $x_0 \in [a, b]$. Da f stetig ist, ergibt sich $f(x_{n_k}) \rightarrow f(x_0)$, was wegen $|f(x_{n_k})| > n_k$ aber nicht möglich ist — Widerspruch. Die Menge $f([a, b])$ ist also doch beschränkt.

- b) Wir zeigen jetzt, dass $\{f([a, b])\}$ auch abgeschlossen ist. Sei dazu y_0 ein Häufungspunkt von $\{f([a, b])\}$. Dann gibt es Punkte $x_n \in [a, b]$ mit $f(x_n) \rightarrow y_0$. Erneut ergibt sich nach dem Satz von BOLZANO-WEIERSTRASS die Existenz einer konvergenten Teilfolge von $\{x_n\}$, d. h. $x_{n_k} \rightarrow x_0$ mit $x_0 \in [a, b]$. Da f in x_0 stetig ist, erhalten wir $f(x_{n_k}) \rightarrow f(x_0)$. Dies ergibt $y_0 = f(x_0)$, da der Limes einer Folge im Existenzfall eindeutig bestimmt ist. Damit ist $y_0 \in \{f([a, b])\}$.

Offensichtlich gilt $\{f([a, b])\} \neq \emptyset$. Nach Satz 2.12 besitzt $\{f([a, b])\}$ als beschränkte, abgeschlossene und nichtleere Menge ein Minimum und ein Maximum. \square

Satz 4.6 (Zwischenwertsatz). *Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ auf $[a, b]$ stetig und gelte $f(a) < 0$ und $f(b) > 0$. Dann gibt es ein $c \in (a, b)$ mit $f(c) = 0$.*

Die Aussage ist intuitiv klar (vgl. nebenstehendes Bild). Der exakte Beweis erfordert aber dennoch etwas Geschick.

Beweis. Sei $m := \frac{a+b}{2}$ die Mitte des Intervalls $[a, b]$. Dann ist entweder $f(m) = 0$ (und wir sind fertig) oder f hat in den Endpunkten von $[a, m]$ oder $[m, b]$ verschiedene Vorzeichen (Bild rechts unten):

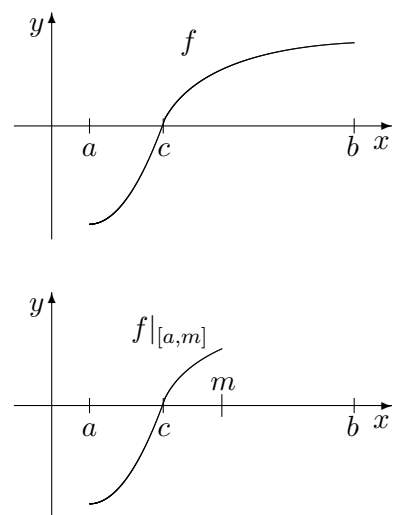
Wähle nun das Intervall, indem verschiedene Vorzeichen auftreten und halbiere es, usw. Damit erhalten wir eine Folge $[a_n, b_n]$ von Intervallen mit $b_n - a_n \rightarrow 0$ sowie $f(a_n) < 0$ und $f(b_n) > 0$. Nach Satz 2.10 (BOLZANO-WEIERSTRASS) besitzt $\{a_n\}$ eine konvergente Teilfolge, etwa $\{a_{n_k}\}$ mit $a_{n_k} \rightarrow c$, wobei $c \in [a, b]$. Wegen $b_{n_k} - a_{n_k} \rightarrow 0$ gilt dann auch $b_{n_k} \rightarrow c$. Da f in c stetig ist, ergibt sich

$$f(c) = \lim_{k \rightarrow \infty} f(a_{n_k}) \leq 0, \quad f(c) = \lim_{k \rightarrow \infty} f(b_{n_k}) \geq 0,$$

also in der Tat $f(c) = 0$. \square

Abwandlung von Satz 4.6. *Ist $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ auf $[a, b]$ stetig, so nimmt f jeden Wert zwischen $f(a)$ und $f(b)$ an.*

Beweis. Dies ist trivial für $f(a) = f(b)$. Sei nun $f(a) < d < f(b)$, $d \in \mathbb{R}$. Wendet man Satz 4.6 auf die Funktion $g(x) := f(x) - d$ an, folgt die Behauptung. \square

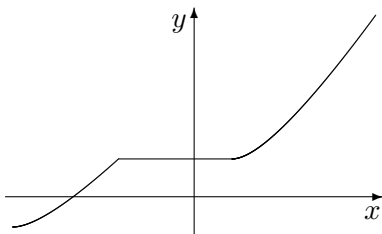


4.3 Umkehrfunktionen elementarer Funktionen

Definition 4.6. Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes, halboffenes oder abgeschlossenes Intervall. Eine Funktion $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ heißt

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{monoton wachsend} \\ \text{streng monoton wachsend} \\ \text{monoton fallend} \\ \text{streng monoton fallend} \end{array} \right\}, \text{ falls } \left\{ \begin{array}{l} f(x) \leq f(y) \\ f(x) < f(y) \\ f(x) \geq f(y) \\ f(x) > f(y) \end{array} \right\}$$

für alle $x, y \in I$ mit $x < y$ gilt.

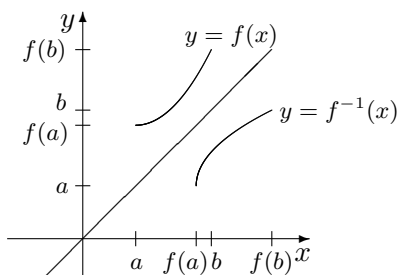


Beispiel 4.5. (1) Die Funktion $p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$, ist auf $(-\infty, 0]$ streng monoton fallend und auf $[0, \infty)$ streng monoton wachsend.

(2) Die Funktion $p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto x^3$, ist auf ganz \mathbb{R} streng monoton wachsend.

(3) Die Funktion aus Abbildung links ist monoton wachsend, aber nicht streng monoton wachsend.

Satz 4.7. Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ auf $[a, b]$ stetig und streng monoton wachsend. Dann ist $f: [a, b] \rightarrow [f(a), f(b)]$ bijektiv und die Umkehrfunktion $f^{-1}: [f(a), f(b)] \rightarrow [a, b]$ ist auf $[f(a), f(b)]$ stetig und streng monoton wachsend.



Analoges gilt auch für eine auf $[a, b]$ stetige Funktion $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, die streng monoton fällt.

Beweis. Die Injektivität von f folgt aus dem streng monotonen Wachstum. Die Surjektivität von f folgt aus der Stetigkeit auf $[a, b]$ und dem Zwischenwertsatz. Dass die Umkehrfunktion f^{-1} streng monoton wächst, ist offensichtlich. Von der Stetigkeit von f^{-1} auf $[f(a), f(b)]$ überzeuge man

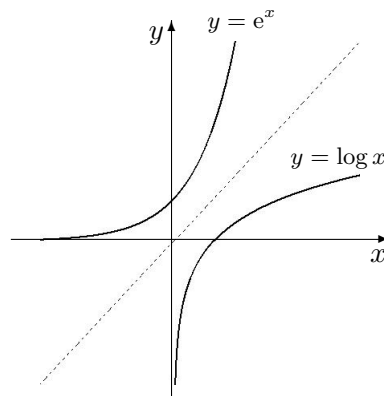
sich selbst. □

Wir betrachten jetzt die Exponentialfunktion $\exp: \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$, $x \mapsto e^x$. Die Stetigkeit von \exp ist uns bereits bekannt. Ihr streng monotonen Wachstum folgt für $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x < y$ aus

$$\frac{x^n}{n!} < \frac{y^n}{n!} \quad \forall n \geq 1 \implies e^x < e^y.$$

Wendet man Satz 4.7 auf ein beliebiges abgeschlossenes Teilintervall von \mathbb{R} an, ergibt sich die Bijektivität von \exp und die Existenz einer stetigen und streng monoton wachsenden Umkehrfunktion $\exp^{-1}: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$.

Definition 4.7. Die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion heißt **natürlicher Logarithmus** und wird mit \log (ln oder lognat) bezeichnet.



Wir hatten e^z für jedes $z \in \mathbb{C}$ definiert. Wir betrachten $\log x$ aber nur für $x \in (0, \infty)$. Die Ausdehnung auf komplexe Argumente ist Gegenstand der Funktionentheorie.

Der Logarithmus hat folgende Eigenschaften:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \log x &= \infty, & \lim_{x \rightarrow 0+0} \log x &= -\infty, & \log 1 &= 0, \\ \log e &= 1, & x &= e^{\log x} \quad \forall x > 0, & \log e^x &= x \quad \forall x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Insbesondere gilt die Funktionalgleichung

$$\log(xy) = \log x + \log y \quad \forall x, y \in \mathbb{R} : x, y > 0.$$

Beweis. Unter Verwendung der Funktionalgleichung der Exponentialfunktion bekommen wir

$$\log(xy) = \log(e^{\log x} e^{\log y}) = \log(e^{\log x + \log y}) = \log x + \log y.$$

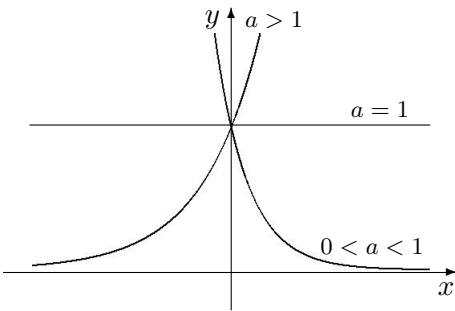
□

Wir wissen, was a^x für $a > 0$ und $x \in \mathbb{Q}$ bedeutet:

$$a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}, \quad \text{für } x = \frac{p}{q} \text{ mit } p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}.$$

Definition 4.8. Die Exponentialfunktion zur Basis a ist für $a > 0$ und $x \in \mathbb{R}$ definiert durch

$$a^x := e^{x \log a}.$$



Wie für e^x kann man zeigen, dass für $x \in \mathbb{Q}$ der Wert von $e^{x \log a}$ der übliche Wert von a^x ist, d. h.

$$a^{\frac{p}{q}} = e^{\frac{p}{q} \log a}.$$

Wir vermerken noch $a^x = (e^{\log a})^x$. Daraus kann man die Potenzgesetze folgern. Für $0 < a < 1$ sowie für $a > 1$ kann Satz 4.7 angewandt werden. Das macht folgende Definition sinnvoll:

Definition 4.9. Die Umkehrfunktion von $\exp_a: \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$, $x \mapsto a^x$, für $0 < a < 1$ oder $a > 1$, heißt **Logarithmus zur Basis a** und wird mit $\log_a x$ (oder ${}^a\log x$) bezeichnet.

Wichtige Fälle sind $a \in \{2, e, 10\}$. Man setzt

$$\text{ld } x := \log_2 x, \quad \log x := \log_e x, \quad \lg x := \log_{10} x.$$

Es gilt folgende Beziehung für den Basiswechsel:

$$\log_a x = \frac{\log x}{\log a}.$$

Daher reicht es, sich auf Logarithmen zur Basis e zu beschränken.

Beweis. Wir haben

$$x = a^{\log_a x} = e^{\log_a x \log a} \implies \log x = \log_a x \cdot \log a.$$

□

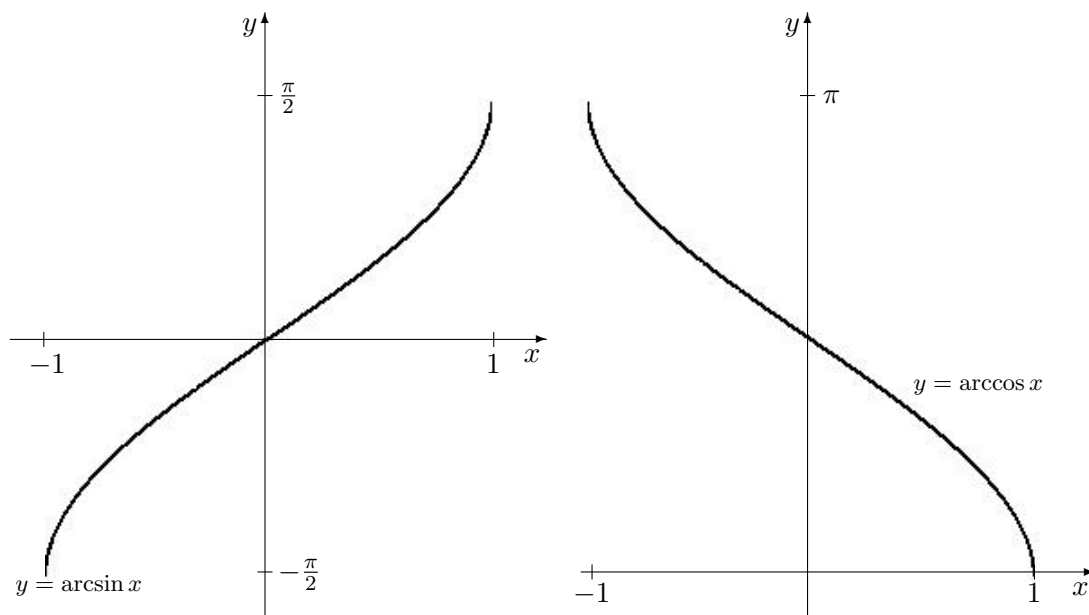
Wir betrachten nun noch Winkel- und Hyperbelfunktionen.

Satz 4.8. Die Funktion $\sin: [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow [-1, 1]$, $x \mapsto \sin x$, ist stetig und streng monoton wachsend. Die Funktion $\cos: [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$, $x \mapsto \cos x$, ist stetig und streng monoton fallend.

Beweis. Übungsaufgabe. □

Die Sätze 4.7 und 4.8 ermöglichen folgende Definition:

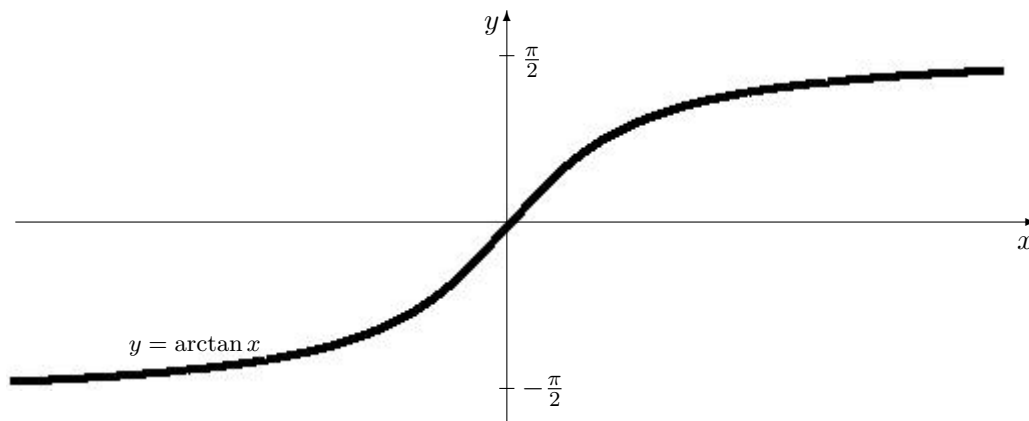
Definition 4.10. Die Umkehrfunktion von $\sin: [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow [-1, 1]$ bzw. $\cos: [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$ heißen **Arkussinus** bzw. **Arkuskosinus** und werden mit $\arcsin x$ bzw. $\arccos x$ bezeichnet.



Wie man leicht zeigt, sind die Bedingungen von Satz 4.7 auch für die Tangens-Funktion erfüllt.

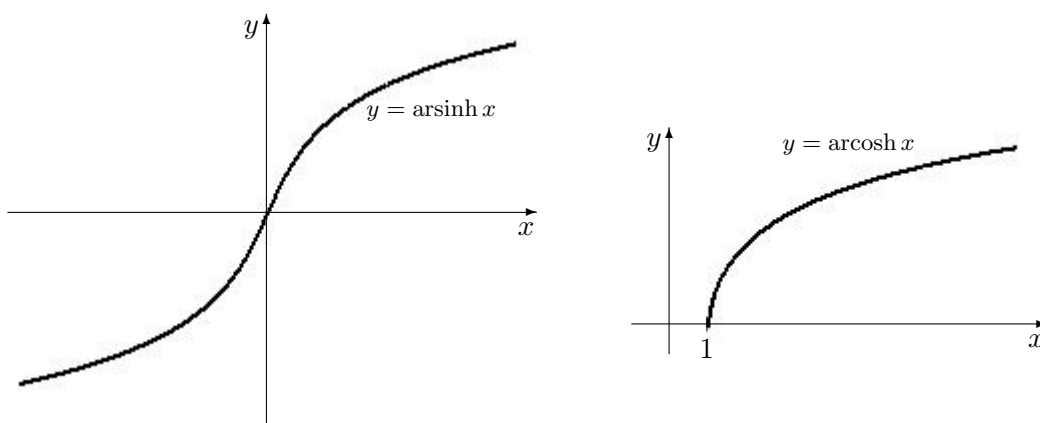
Definition 4.11. Die Umkehrfunktion von $\tan: (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \rightarrow (-\infty, \infty)$, $x \mapsto \tan x$, heißt **Arkustangens** und wird mit $\arctan x$ bezeichnet.

Die Arkustangens-Funktion ist sehr beliebt, denn man kann mit ihr z. B. das Intervall $(-\infty, \infty)$ auf beliebige andere offene Intervalle bijektiv abbilden.

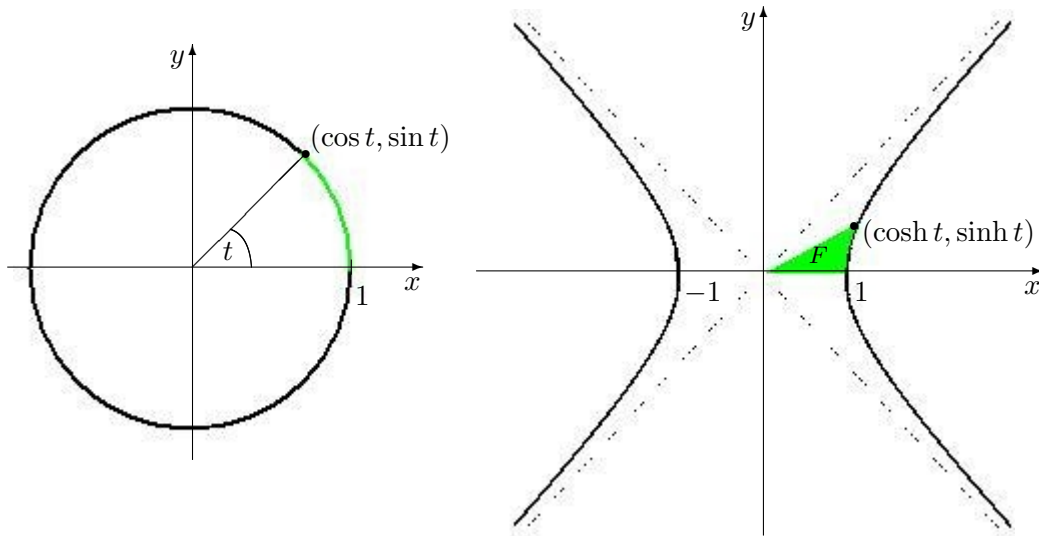


Analoge Überlegungen zu den Umkehrfunktionen der Hyperbelfunktionen sparen wir uns.

Definition 4.12. Die Umkehrfunktion von $\sinh: (-\infty, \infty) \rightarrow (-\infty, \infty)$, $x \mapsto \sinh x$, heißt **Areahyperbelsinus** und wird mit $\operatorname{arsinh} x$ bezeichnet. Die Umkehrfunktion von $\cosh: [0, \infty) \rightarrow [1, \infty)$, $x \mapsto \cosh x$, wird **Areahyperbelkosinus** genannt und mit $\operatorname{arcosh} x$ bezeichnet.



Woher kommen nun die Bezeichnungen Arkus (lat. *Bogen*) und Area (lat. *Fläche*)?



Betrachten wir dafür zunächst die Parameterdarstellung $x = \cos t$, $y = \sin t$, $t \in [0, 2\pi)$, des Einheitskreises $x^2 + y^2 = 1$. Darin ist t der Winkel in der Abbildung (oben links), welcher ausgedrückt im Bogenmaß gleich der Länge des grünen Bogens ist.

Die Einheitshyperbel hat die Gleichung $x^2 - y^2 = 1$. Für ihren rechten Ast gilt mithin $x = \sqrt{1 + y^2}$ und dessen Parameterdarstellung lautet $x = \cosh t$, $y = \sinh t$, $t \in \mathbb{R}$. Man kann zeigen, dass $t = 2F$ gilt, wobei F die eingezeichnete Fläche (Abbildung oben rechts) meint.

4.4 Asymptotische Formeln

Wir wissen schon, was $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = g$ für $x_0, g \in \mathbb{R}$ bedeutet. Dies wollen wir jetzt auf die Fälle ausdehnen, in denen x_0 oder g unendlich ist.

Definition 4.13. *Wir schreiben*

1. $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = g, g \in \mathbb{R} \quad :\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists M \in \mathbb{R} : |f(x) - g| < \varepsilon \forall x > M,$
2. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = g, g \in \mathbb{R} \quad :\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists M \in \mathbb{R} : |f(x) - g| < \varepsilon \forall x < M,$
3. $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty \quad :\Leftrightarrow \forall a > 0 \exists M \in \mathbb{R} : f(x) > a \forall x > M,$
4. $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty \quad :\Leftrightarrow \forall a < 0 \exists M \in \mathbb{R} : f(x) < a \forall x > M,$
5. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty \quad :\Leftrightarrow \forall a > 0 \exists M \in \mathbb{R} : f(x) > a \forall x < M,$
6. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \quad :\Leftrightarrow \forall a < 0 \exists M \in \mathbb{R} : f(x) < a \forall x < M,$
7. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty, x_0 \in \mathbb{R} \quad :\Leftrightarrow \forall a > 0 \exists \delta > 0 : f(x) > a \forall x_0 \in U_\delta(x_0) \setminus \{x_0\},$
8. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty, x_0 \in \mathbb{R} \quad :\Leftrightarrow \forall a < 0 \exists \delta > 0 : f(x) < a \forall x_0 \in U_\delta(x_0) \setminus \{x_0\}.$

Definition 4.14. *Mit $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ bezeichnen wir die sogenannte **Zweipunkt-** kompaktifizierung von \mathbb{R} .*

Für $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ ist eine **punktierte Umgebung** $\dot{U}_\delta(x_0)$ eine Menge der Form

- $(x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta)$, falls $x_0 \in \mathbb{R}$,
- (M, ∞) , $M \in \mathbb{R}$, falls $x_0 = \infty$,
- $(-\infty, M)$, $M \in \mathbb{R}$, falls $x_0 = -\infty$.

Definition 4.15 (LANDAU²-Symbole). *Sei $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ und seien f und g zwei reellwertige Funktionen, die in einer punktierten Umgebung $\dot{U}(x_0)$ definiert sind. Sei weiter $g(x) \neq 0$ für alle $x \in \dot{U}(x_0)$. Dann schreibt man*

1. $f(x) = \mathcal{O}(g(x)) \ (x \rightarrow x_0)$ und sagt „ $f(x)$ ist ein **Groß-O** von $g(x)$ “, falls es eine Konstante $C > 0$ gibt mit

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| \leq C \quad \forall x \in \dot{U}(x_0),$$

2. $f(x) = o(g(x))$ ($x \rightarrow x_0$) und sagt „ $f(x)$ ist ein **Klein-O** von $g(x)$ “, falls gilt:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0,$$

3. $f(x) \simeq g(x)$ oder $f(x) \asymp g(x)$ ($x \rightarrow x_0$) und sagt „ $f(x)$ und $g(x)$ sind **asymptotisch von gleicher Ordnung**“, falls es Konstanten $c, C > 0$ gibt mit

$$c \leq \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| \leq C \quad \forall x \in \dot{U}(x_0),$$

4. $f(x) \sim g(x)$ ($x \rightarrow x_0$) und sagt „ $f(x)$ und $g(x)$ sind **asymptotisch gleich**“, falls gilt:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1,$$

5. $f(x) = h(x) + \mathcal{O}(g(x))$ ($x \rightarrow x_0$) bzw. $f(x) = h(x) + o(g(x))$ ($x \rightarrow x_0$), falls h eine weitere in $\dot{U}(x_0)$ definierte Funktion ist mit

$$f(x) - h(x) = \mathcal{O}(g(x)) \quad (x \rightarrow x_0) \quad \text{bzw.} \quad f(x) - h(x) = o(g(x)) \quad (x \rightarrow x_0).$$

Beispiel 4.6. (1) $f(x) = \mathcal{O}(1)$ ($x \rightarrow x_0$) bedeutet einfach, dass f in $\dot{U}(x_0)$ beschränkt ist. So gilt etwa

$$\begin{aligned} \sin x &= \mathcal{O}(1) && (x \rightarrow \infty \text{ oder } x \rightarrow 0 \text{ oder } x \rightarrow 5), \\ \frac{1}{x} &= \mathcal{O}(1) && (x \rightarrow \infty \text{ oder } x \rightarrow 5). \end{aligned}$$

Die Aussagen $\frac{1}{x} = \mathcal{O}(1)$ ($x \rightarrow 0$) und $\mathcal{O}(1) = \sin x$ ($x \rightarrow \infty$) sind falsch (die zweite ist nicht einmal definiert).

Der Ausdruck $e^x + \mathcal{O}(1)$ bezeichnet eine Funktion $f(x)$ mit der Eigenschaft, dass $|f(x) - e^x|$ für $x \rightarrow x_0$ beschränkt ist.

(2) $f(x) = o(1)$ ($x \rightarrow x_0$) bedeutet einfach $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$. So gilt beispielsweise

$$\sin x = o(1) \quad (x \rightarrow 0), \quad \sin x = x + o(1) \quad (x \rightarrow 0), \quad \frac{1}{x} = o(1) \quad (x \rightarrow \infty).$$

²Edmund Georg Hermann LANDAU (1877 - 1938), deutscher Mathematiker. Beiträge zur analytischen Zahlentheorie. Er liebte die mathematisch exakte und strenge Beweisführung ohne Erläuterungen, was seinen Studenten das Leben oft erschwerte. Er machte die Symbole \mathcal{O} und \mathcal{O} von Paul BACHMANN (1837 - 1920) bekannt.

Die Aussage $\sin x = o(1)$ ($x \rightarrow \infty$) ist falsch.

- (3) $\mathcal{O}(x^n)$ ist eine Funktion, die wir nicht kennen oder die uns nicht interessiert, von der wir aber wissen, dass sie nach Division durch x^n beschränkt bleibt. Es gilt z. B.

$$\sin x = \mathcal{O}(x) \quad (x \rightarrow 0 \text{ oder } x \rightarrow \infty), \quad \sin x = \mathcal{O}(x^2) \quad (x \rightarrow \infty),$$

$$\frac{\sin x}{x} = \frac{1}{x} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} \mp \dots \rightarrow 1 \text{ für } x \rightarrow 0.$$

Damit haben wir $\sin x \sim x$ ($x \rightarrow 0$) gezeigt.

In der Physik gibt es auch $f(x) \approx g(x)$ ($x \rightarrow x_0$) im Sinne von „angenähert gleich“. Diese schwammige Aussage ist in der Mathematik bedeutungslos.

Des weiteren gilt z. B. jeweils für $x \rightarrow 0$

$$\sin x = x + \mathcal{O}(x^2), \quad \sin x = x + \mathcal{O}(x^3), \quad \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \mathcal{O}(x^5).$$

Aber $\sin = \mathcal{O}(x^2)$ ($x \rightarrow 0$) ist falsch. Der Ausdruck $\mathcal{O}(x^n)$ macht überhaupt nur für $x \rightarrow 0$ oder $x \rightarrow \pm\infty$ Sinn. Denn für $x \rightarrow 5$ gilt beispielsweise $f(x) = \mathcal{O}(x^n) \Leftrightarrow f(x) = \mathcal{O}(1)$. Sinnvoll wäre aber $f(x) = \mathcal{O}((x-5)^n)$. Dann gilt

$$f(x) = \mathcal{O}(x-5) \Leftarrow f(x) = \mathcal{O}((x-5)^2) \Leftarrow f(x) = \mathcal{O}((x-5)^3) \Leftarrow \dots$$

Je größer n ist, desto schärfer ist die Aussage.

Satz 4.9. Ist $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ eine Potenzreihe mit positivem Konvergenzradius, so gilt

$$f(x) = \sum_{n=0}^N a_n x^n + \mathcal{O}(x^{N+1}) \quad (x \rightarrow 0).$$

Beweis. Übungsaufgabe. □

Für $x \rightarrow \pm\infty$ ist $f(x) = \mathcal{O}(x^n)$ eine Abschätzung für das Wachstum von $f(x)$, $|f(x)| \leq C x^n$ für alle $x > M$ mit $C, M \in \mathbb{R}$. So gilt etwa

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 = \mathcal{O}(x^2) \quad (x \rightarrow \infty), \quad a_i \in \mathbb{R}.$$

Aber $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 = \mathcal{O}(x^2)$ ($x \rightarrow 0$) ist falsch.

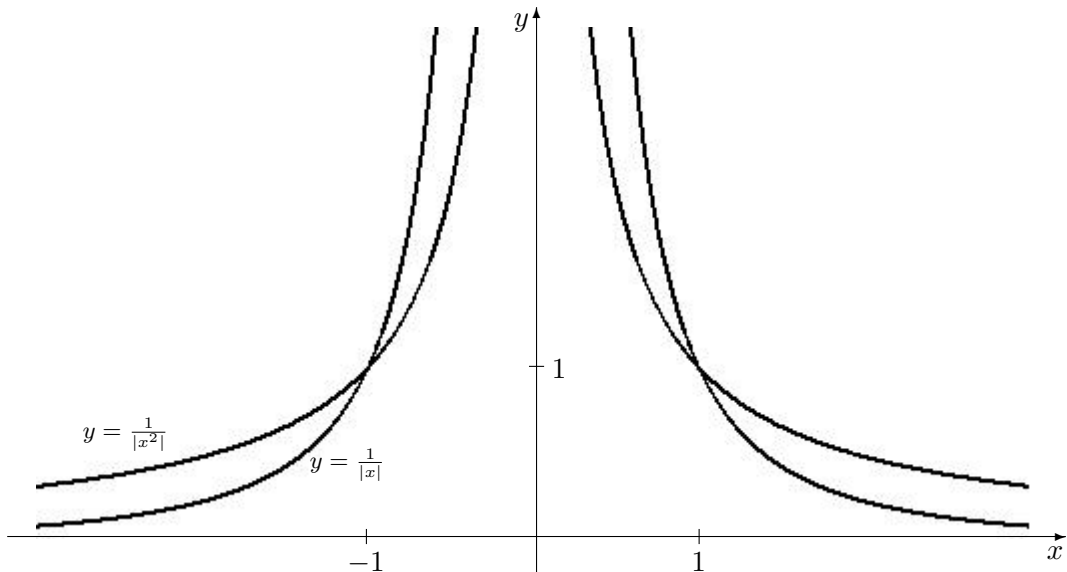
Für $x \rightarrow 0$ gilt

$$f(x) = \mathcal{O}(x) \implies f(x) = \mathcal{O}(x^2) \implies f(x) = \mathcal{O}(x^3) \implies \dots$$

Wir führen das Beispiel 4.6 fort.

(4) $f(x) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{x^n}\right)$ ($x \rightarrow x_0$) bedeutet $|f(x)| \leq C \frac{1}{x^n}$ für alle $x \in \dot{U}(x_0)$. Dies ist nur für $x_0 = 0$ oder $\pm\infty$ interessant.

Für $x \rightarrow 0$ wird die „Stärke einer Singularität“ abgeschätzt:



Für $x \rightarrow 0$ haben wir beispielsweise

$$f(x) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{x}\right) \implies f(x) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{x^2}\right) \implies f(x) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{x^3}\right) \implies \dots$$

Für $x \rightarrow \infty$ wird das Fallen von $f(x)$ abgeschätzt, etwa $\frac{1}{x^2+5} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{x^2}\right)$. Hierin gilt

$$f(x) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{x}\right) \Leftarrow f(x) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{x^2}\right) \Leftarrow f(x) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{x^3}\right) \Leftarrow \dots$$

(5) $f(x) = \mathcal{o}(x^n)$ macht nur für $x \rightarrow 0$ oder $x \rightarrow \pm\infty$ Sinn und bedeutet $\left|\frac{f(x)}{x^n}\right| \rightarrow 0$.

Für $x \rightarrow 0$ heißt das, dass f schneller als x^n gegen 0 geht. Z. B. ist für $x \rightarrow 0$

$$\mathcal{O}(x^2) = \mathcal{o}(x), \quad e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \mathcal{o}(x^2).$$

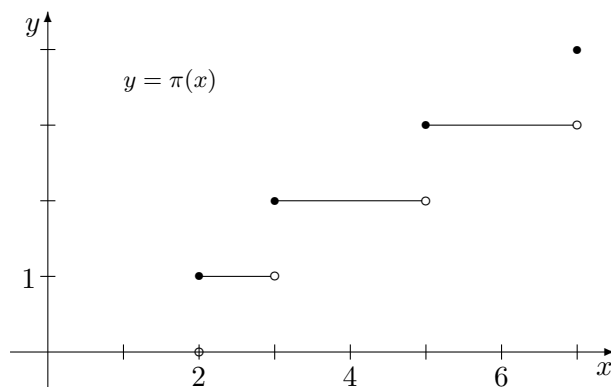
Schärfer ist aber $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \mathcal{O}(x^3)$.

Für $x \rightarrow \infty$ erhalten wir wieder eine Abschätzung für das Wachstum. So haben wir z. B.

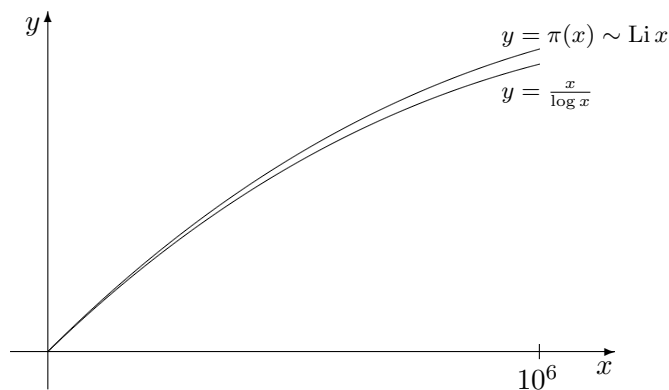
$$\frac{x}{\log x} = \mathcal{O}(x) \quad (x \rightarrow \infty).$$

Für beliebiges $\varepsilon > 0$ ist aber die Aussage $\frac{x}{\log x} = \mathcal{O}(x^{1-\varepsilon})$ ($x \rightarrow \infty$) falsch, denn es gilt $\frac{x}{x^{1-\varepsilon} \log x} = \frac{x^\varepsilon}{\log x} \rightarrow \infty$.

(6) **Primzahlsatz.** Für $x \in \mathbb{R}$, $x > 0$, bezeichnen wir mit $\pi(x)$ die Anzahl der Primzahlen $\leq x$, z. B. $\pi(1) = 0$, $\pi(2) = 1$, $\pi(2,4) = 1$, $\pi(3) = 2$.



Betrachtet man den Graph von π aus großer Entfernung, sieht man folgendes Bild:



Der 15-jährige GAUSS vermutete $\pi(x) \approx \frac{x}{\log x}$ ($x \rightarrow \infty$) und TSCHEBYSCHOFF³

³Pafnuti Lwowitsch TSCHEBYSCHOFF (1821 - 1894), russischer Mathematiker. Forchtete auf den Gebieten Interpolation, Approximation, Funktionen-, Wahrscheinlichkeits-, Zahlentheorie, Mechanik, Ballistik.

bewies $\pi(x) \simeq \frac{x}{\log x}$ ($x \rightarrow \infty$), d. h.

$$\exists c, C > 0 : c \frac{x}{\log x} \leq \pi(x) \leq C \frac{x}{\log x}.$$

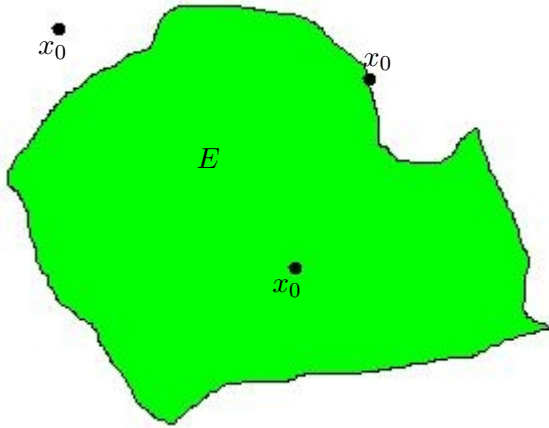
Der Primzahlsatz besagt nun $\pi(x) \sim \frac{x}{\log x}$ ($x \rightarrow \infty$) (1896 von HADAMARD und DE LA VALLÉE POUSSIN⁴). GAUSS wiederum zeigte $\pi(x) \approx \text{Li } x := \int_2^x \frac{dt}{\log t}$ (Li bezeichnet den sogenannten **Integrallogarithmus**). Es gilt $\text{Li } x \sim \frac{x}{\log x}$ ($x \rightarrow \infty$), woraus mit dem Primzahlsatz $\pi(x) \sim \text{Li } x$ folgt.

Die (bis heute unbewiesene) RIEMANNSche Vermutung besagt

$$\pi(x) = \text{Li } x + \mathcal{O}(\sqrt{x} \log x) \quad (x \rightarrow \infty).$$

⁴Charles-Jean Gustave Nicolas Baron DE LA VALLÉE POUSSIN (1866 - 1962), belgischer Mathematiker. Beiträge zu Differentialgleichungen, Zahlentheorie, Funktionentheorie, Potentialtheorie. Gilt als einer der Begründer der linearen Optimierung.

4.5 Funktionen mehrerer Veränderlicher (Felder)



Wir haben bisher Funktionen von \mathbb{R} nach \mathbb{R} betrachtet. Nun interessieren uns Funktionen von \mathbb{R}^n nach \mathbb{R} . Dies sind sogenannte **Skalarfelder**, die i. A. nicht auf ganz \mathbb{R}^n , sondern auf einer Teilmenge $E \subset \mathbb{R}^n$, definiert sind. Wir müssen zunächst verstehen, was

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = g$$

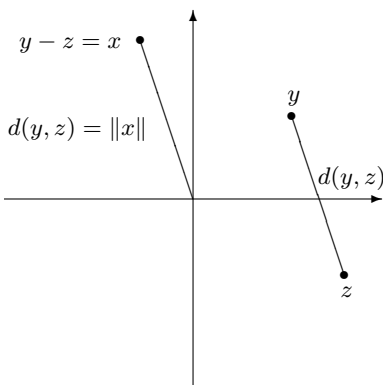
bedeutet. Dazu stellen wir uns als erstes die Frage, in welchen Punkten x_0 dieser Limes überhaupt Sinn hat.

Definition 4.16. Die **EUKLIDISCHE Norm** von $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ ist definiert durch

$$\|x\| := \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}.$$

Der **EUKLIDISCHE Abstand** zweier Punkte $x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ ist gegeben durch

$$d(x, y) := \|x - y\| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}.$$



Für jede Norm, die man auf dem \mathbb{R}^n definieren kann (und damit insbesondere für die EUKLIDISCHE Norm), gelten folgende Regeln. Seien dabei $x, y \in \mathbb{R}^n$ und $\alpha \in \mathbb{R}$:

1. *Positive Definitheit:* $\|x\| \geq 0, \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0,$
2. *Linearität:* $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|,$
3. *Dreiecksungleichung:* $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|.$

Für den von einer Norm induzierten Abstand folgt daraus

1. $d(x, y) \geq 0, d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y,$
2. $d(x, y) = d(y, x),$

3. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

für alle $x, y, z \in \mathbb{R}^n$.

Definition 4.17. Für $\varepsilon > 0$ verstehen wir unter der (**offenen**) ε -Umgebung eines Punktes $x_0 \in \mathbb{R}^n$ die Menge

$$U_\varepsilon(x_0) := \{x \in \mathbb{R}^n : d(x, x_0) < \varepsilon\}.$$

Offene ε -Umgebungen sind im \mathbb{R}^1 offene Intervalle der Form $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$, im \mathbb{R}^2 Kreise ohne Rand mit dem Mittelpunkt x_0 und dem Radius ε und im \mathbb{R}^3 entsprechende Kugeln.

Definition 4.18. Eine Menge $E \subset \mathbb{R}^n$ heißt **offen**, wenn E mit jedem ihrer Punkte auch eine ε -Umgebung dieses Punktes enthält.

Eine Menge $E \subset \mathbb{R}^n$ heißt **abgeschlossen**, wenn E^c offen ist.

Definition 4.19. Ein Punkt $x_0 \in \mathbb{R}^n$ heißt **Häufungspunkt** einer Menge $E \subset \mathbb{R}^n$, wenn jede ε -Umgebung von x_0 unendlich viele Punkte aus E enthält. Die Menge aller Häufungspunkte von E bezeichnen wir mit E' .

Die **Abschließung** von E ist definiert durch $\bar{E} := E \cup E'$.

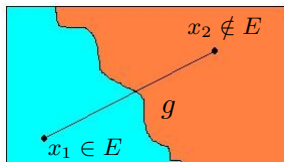
Satz 4.10.

1. Die einzigen Teilmengen des \mathbb{R}^n , die sowohl offen als auch abgeschlossen sind, sind \emptyset und \mathbb{R}^n .
2. Eine Menge $E \subset \mathbb{R}^n$ ist genau dann abgeschlossen, wenn sie alle ihre Häufungspunkte enthält,

$$E \text{ abgeschlossen} \iff E' \subset E \iff \bar{E} = E.$$

3. Die Abschließung einer Menge $E \subset \mathbb{R}^n$ ist stets abgeschlossen und die kleinste abgeschlossene Menge, die E enthält.
4. Die Vereinigung beliebig vieler und der Durchschnitt endlich vieler offener Teilmengen des \mathbb{R}^n sind offen; die Vereinigung endlich vieler und der Durchschnitt beliebig vieler abgeschlossener Teilmengen des \mathbb{R}^n sind abgeschlossen.

Beweis. 1. Wir nehmen das Gegenteil an, d. h. sei $\emptyset \neq E \subsetneq \mathbb{R}^n$ offen und abgeschlossen.



Wir wählen nun $x_1 \in E$ sowie $x_2 \in E^c$ und legen eine Gerade g durch diese Punkte (siehe Abbildung). Diese Gerade g wird durch die Gleichung $x = x_1 + t(x_2 - x_1)$, $t \in \mathbb{R}$, beschrieben. Sei $t_0 := \sup\{t : x_1 + t(x_2 - x_1) \in E\}$ und sei $x_1 + t_0(x_2 - x_1) \in E$. Da E offen ist, gilt $x_1 + t(x_2 - x_1) \in E$ für alle t aus einer Umgebung von t_0 . Das steht im Widerspruch

dazu, dass t_0 das Supremum all dieser t ist. Folglich ist $x_1 + t_0(x_2 - x_1) \in E^c$. Da E^c offen ist, liegen die Punkte $x_1 + t(x_2 - x_1)$ in E^c für alle t aus einer Umgebung von t_0 , was wieder im Widerspruch dazu steht, dass t_0 das Supremum ist.

4. ist trivial: Seien $E_i \subset \mathbb{R}^n$ offen ($i \in I$ mit beliebiger Indexmenge I) und sei $x \in \bigcup_{i \in I} E_i$. Dann existiert ein $i_0 \in I$ mit $x \in E_{i_0}$. Da E_{i_0} offen ist, gibt es ein $\varepsilon > 0$ mit $U_\varepsilon(x) \subset E_{i_0}$, und damit $U_\varepsilon(x) \subset \bigcup_{i \in I} E_i$.

Seien $E_1, \dots, E_m \subset \mathbb{R}^n$ offen und sei $x \in \bigcap_{i=1}^m E_i$. Dann gilt $x \in E_i$ für alle i mit $1 \leq i \leq m$, und somit $U_{\varepsilon_i}(x) \subset E_i$. Für $\varepsilon := \min(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m)$ gilt $U_\varepsilon(x) \subset E_i$ für alle i , also $U_\varepsilon(x) \subset \bigcap_{i=1}^m E_i$.

Die Aussage für abgeschlossene Mengen $E_i \subset \mathbb{R}^n$ beweist man analog.

Die Aussagen 2. und 3. zeigt man wie im \mathbb{R}^1 . □

Definition 4.20. Seien $f: (E \subset \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}^1$ eine Funktion und $x_0 \in E'$. Man sagt, dass f in x_0 den **Grenzwert** g hat und schreibt

$$\lim_{(x_1, \dots, x_n) \rightarrow (x_1^0, \dots, x_n^0)} f(x_1, \dots, x_n) = g \quad \text{oder kurz} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = g,$$

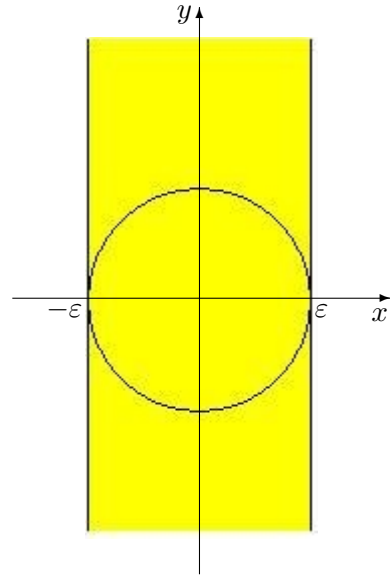
wenn für jedes $\delta > 0$ ein $\varepsilon > 0$ existiert mit

$$|f(x) - g| < \delta \quad \forall x \in E : 0 < \|x - x_0\| < \varepsilon.$$

Beispiel 4.7. (1) Seien $f: E \rightarrow \mathbb{R}^1$, $f(x, y) = x^2 + x \sin \frac{1}{y} + 4$, und $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq 0\}$. Es gilt $(0, 0) \in E'$ und

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left(x^2 + x \sin \frac{1}{y} + 4 \right) = 4,$$

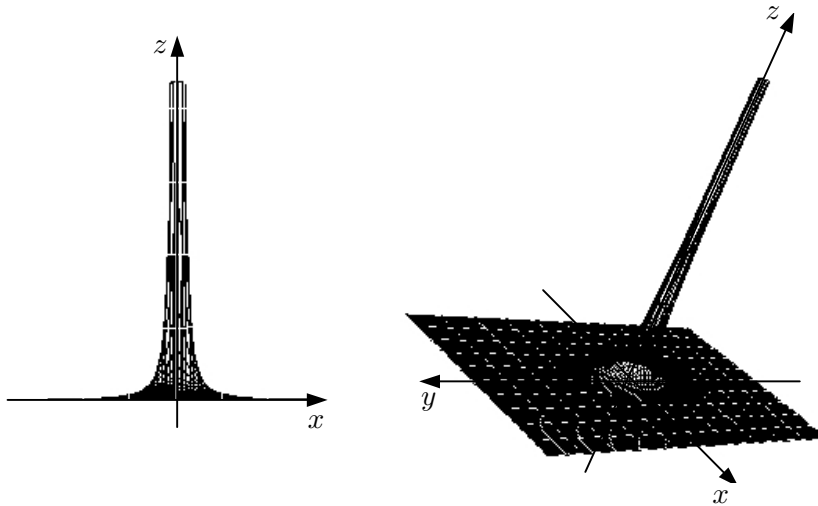
denn es ist $|(x^2 + x \sin \frac{1}{y} + 4) - 4| \leq |x|^2 + |x| < \delta$, falls $|x| < \varepsilon := \min(\frac{\delta}{2}, 1)$ gilt. Diese Bedingung erfüllen alle $(x, y) \in E$, die in der Abbildung gelb eingefärbt sind, und damit erst recht alle $(x, y) \in E$ mit $x^2 + y^2 < \varepsilon^2$.



(2) Es seien $f: E \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2}$, und $E = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Es gilt $(0, 0) \in E'$. Der Grenzwert

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{1}{x^2 + y^2}$$

existiert nicht bzw. ist ∞ .



- (3) Wir betrachten die Funktion $f: E \rightarrow \mathbb{R}^1$, $f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$, mit $E = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.⁵ Wieder gilt $(0, 0) \in E'$. Wir haben die Abschätzung $|xy| \leq \frac{x^2 + y^2}{2}$. Daher ist f eine beschränkte Funktion:

$$|f(x, y)| \leq \frac{1}{2} \quad \forall (x, y) \in E.$$

Die Funktion f hat keinen Limes für $(x, y) \rightarrow (0, 0)$. Um dies zu zeigen, gehen wir vom Gegenteil aus; sei also g dieser Grenzwert. Dann existiert ein $\varepsilon > 0$ mit

$$\left| \frac{xy}{x^2 + y^2} - g \right| < \frac{1}{100} \quad \forall (x, y) \in \dot{U}((0, 0)).$$

Wandern wir in den Punkt $(0, 0)$ längs des Weges 1, $x = t, y = 0$ für $t \rightarrow 0 + 0$, so gilt

$$\frac{xy}{x^2 + y^2} = \frac{t \cdot 0}{t^2 + 0^2} = 0,$$

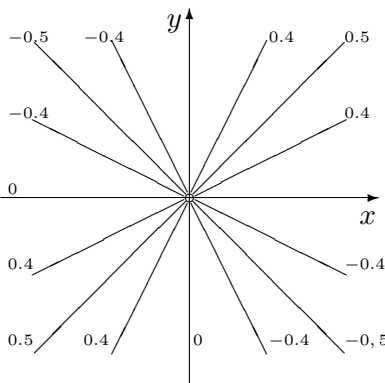
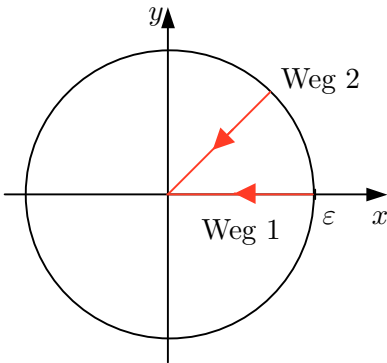
d. h. $|g| < \frac{1}{100}$. Wandern wir andererseits entlang des Weges 2, $x = t, y = t, t \rightarrow 0 + 0$, in den Punkt $(0, 0)$ hinein, ergibt sich

$$\frac{xy}{x^2 + y^2} = \frac{t \cdot t}{t^2 + t^2} = \frac{1}{2},$$

d. h. $|\frac{1}{2} - g| < \frac{1}{100}$. Wir erhalten somit

$$g \in \left(-\frac{1}{100}, \frac{1}{100}\right) \cap \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{100}, \frac{1}{2} + \frac{1}{100}\right) = \emptyset,$$

also einen Widerspruch zur Annahme.



Höhenlinienbild von f

Definition 4.21. Seien $f: (E \subset \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}^1$ eine Funktion und $x_0 \in \mathbb{R}^n$ ein Punkt mit $\dot{U}_\varepsilon(x_0) \subset E$. Sei des weiteren $\ell \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Man sagt, dass f einen **Grenzwert** aus

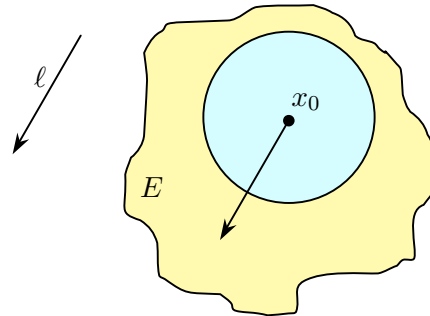
⁵Ein gelungenes Schaubild dieser Funktion findet man z. B. in *Analysis 2* von K. Königsberger auf S. 15.

Richtung ℓ besitzt, wenn

$$\lim_{t \rightarrow 0+0} f(x_0 + t\ell) =: g$$

existiert. Die Zahl g heißt dann der Grenzwert aus Richtung ℓ .

Die Funktion aus Beispiel 4.7 (3) besitzt in $x_0 = (0, 0)$ Grenzwerte aus allen Richtungen. Sie zeigt aber anschaulich, dass aus der bloßen Existenz der Richtungsgrenzwerte nicht die Existenz des Grenzwertes folgt. Die Umkehrung stimmt aber:

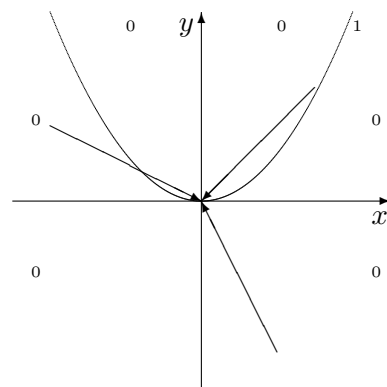


Satz 4.11. Seien $f: (E \subset \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}^1$ eine Funktion, $x_0 \in \mathbb{R}^n$ ein Punkt und $\dot{U}_\varepsilon(x_0) \subset E$. Dann folgt aus $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = g$, $g \in \mathbb{R}$, dass in x_0 die Grenzwerte aus allen Richtungen existieren und gleich g sind.

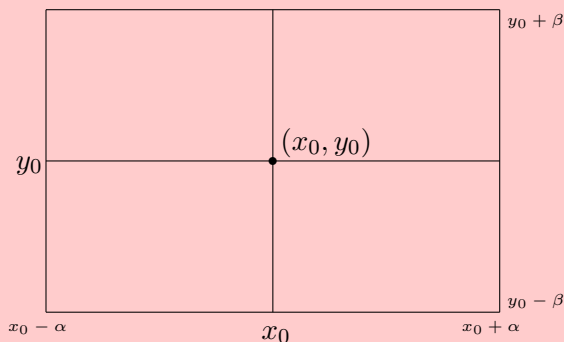
Beweis. Übungsaufgabe. □

Beispiel 4.8. Wir betrachten die Funktion $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^1$, $f(x, y) = \begin{cases} 1 & : y = x^2, \\ 0 & : \text{sonst.} \end{cases}$ Da in jeder beliebigen

Umgebung von $x_0 = (0, 0)$ die Werte 0 und 1 angenommen werden, hat f in x_0 keinen Grenzwert. Jeder Richtungsgrenzwert ist aber 0.



Definition 4.22. Sei $f: E \rightarrow \mathbb{R}^1$ mit $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < |x - x_0| < \alpha, 0 < |y - y_0| < \beta\}$, $\alpha, \beta > 0$, eine Funktion.



Man sagt, dass der **iterierte Grenzwert**

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y)$$

existiert und gleich g ist, wenn für jedes y mit $0 < |y - y_0| < \beta$ der Grenzwert $\varphi(y) := \lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y)$ existiert und $\lim_{y \rightarrow y_0} \varphi(y) = g$ gilt.

Beispiel 4.9. (1) Es gilt

$$\lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} (x^2 + 2xy + 5) = \lim_{y \rightarrow 0} 5 = 5,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} (x^2 + 2xy + 5) = \lim_{x \rightarrow 0} (x^2 + 5) = 5.$$

(2) Wir betrachten unseren neuen Freund $f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$ aus Beispiel 4.7 (3). Es gilt

$$\lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{xy}{x^2 + y^2} = \lim_{y \rightarrow 0} 0 = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{xy}{x^2 + y^2} = \lim_{x \rightarrow 0} 0 = 0,$$

d. h. beide iterierte Grenzwerte existieren und sind gleich 0. Allerdings existiert $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y)$ nicht (siehe Beispiel 4.7 (3)).

(3) Sei $f: E \rightarrow \mathbb{R}^1$, $f(x, y) = x \sin \frac{1}{y}$ mit $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq 0\}$. Hier gilt

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} x \sin \frac{1}{y} = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{y} = 0,$$

aber $\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{y}$ existiert nicht.

Satz 4.12. *Gilt*

1. $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y) = g$ und
2. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y) = \varphi(y)$ für alle $y \in \dot{U}_\varepsilon(y_0)$,

so folgt

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y) = \lim_{y \rightarrow y_0} \varphi(y) = g.$$

Beweis. Z. B. Fichtenholz I, Nr. 168. □

Das Beispiel 4.9 (3) zeigt, dass Bedingung 2. aus Satz 4.12 nicht aus Bedingung 1. folgt.

Definition 4.23. Seien $f: (E \subset \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}^1$ eine Funktion und $x_0 \in E \cap E'$. Die Funktion f heißt **stetig in x_0** , wenn

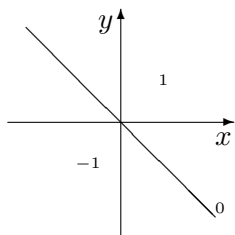
$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

gilt. Die Funktion f heißt **stetig auf E** , wenn f in jedem Punkt $x_0 \in E \cap E'$ stetig ist.

Beispiel 4.10. (1) Für eine endliche Menge E gilt $E' = \emptyset$. Daher ist jede Funktion auf E stetig.

(2) Die Funktion $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^1$, $f(x, y) = \sin(xy)$, ist auf ganz \mathbb{R}^2 stetig.

(3) Die Funktionen aus Beispiel 4.7 (1) und (3) sind nur auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ stetig, egal, wie sie in $(0, 0)$ definiert werden.



(4) Die Funktion $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^1$, $f(x, y) = \begin{cases} 1: & x + y > 0, \\ 0: & x + y = 0, \\ -1: & x + y < 0, \end{cases}$
ist in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(t, -t) \in \mathbb{R}^2\}$ stetig.

4.6 Vektorfelder

Dies sind Abbildungen der Form $f: (E \subset \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}^m$. Im vorangegangenen Abschnitt war $m = 1$. Skalarfelder sind also spezielle Vektorfelder.

Definition 4.24. Sei $f: (E \subset \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine Abbildung und sei $x_0 \in E'$. Man sagt, dass f in x_0 den **Grenzwert** g hat und schreibt

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = g,$$

wenn für jedes $\delta > 0$ ein $\varepsilon > 0$ existiert, so dass gilt

$$\|f(x) - g\| < \delta \quad \forall x \in E : 0 < \|x - x_0\| < \varepsilon.$$

Eine Funktion $f: (E \subset \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}^m$ hat m Komponenten, d. h.

$$f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, \dots, x_n) \\ f_2(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_m(x_1, \dots, x_n) \end{pmatrix}.$$

Dabei ist jede Komponente eine Abbildung

$$f_i: (E \subset \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}^1, \quad 1 \leq i \leq m.$$

Trivialerweise gilt:

Satz 4.13. Die Funktion $f: (E \subset \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}^m$ hat in $x_0 \in E$ den Grenzwert $a = (a_1, \dots, a_m) \in \mathbb{R}^m$ genau dann, wenn jede Komponente $f_i: (E \subset \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}^1$ in x_0 den Grenzwert a_i , $1 \leq i \leq m$, besitzt.

Definition 4.25. Seien $f: (E \subset \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine Funktion und $x_0 \in E \cap E'$. Die Funktion f heißt **stetig in x_0** , wenn

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

gilt. Sie heißt **stetig auf E** , wenn sie in jedem Punkt $x_0 \in E \cap E'$ stetig ist.

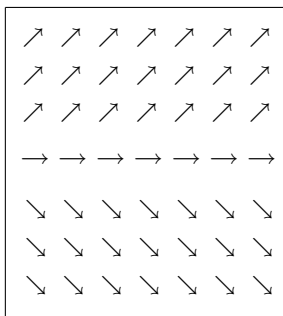
Mit Satz 4.13 folgt unmittelbar

Satz 4.14. Seien f und x_0 wie in Satz 4.13. Die Funktion f ist genau dann stetig in x_0 , wenn es jede der Komponenten f_i , $1 \leq i \leq m$, in x_0 ist.

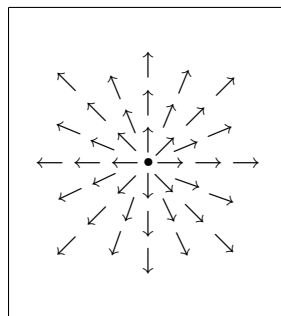
Veranschaulichung von Vektorfeldern

Wir betrachten nun einige Vektorfelder $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$. An jeden Punkt $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ wird also ein Vektor $f(x, y) \in \mathbb{R}^2$ „angeheftet“.

1. Unstetige Vektorfelder:

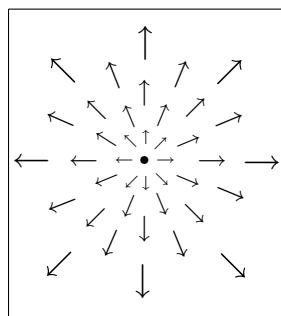
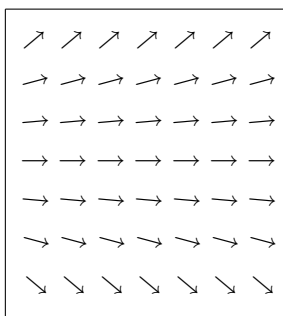


Dieses Vektorfeld ist auf der „ \rightarrow “-Geraden unstetig.



Alle Vektoren sind von der Länge 1.

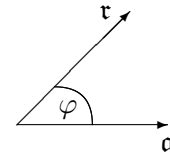
2. Stetige Vektorfelder:



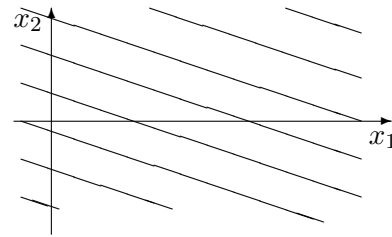
Vektorfelder entstehen z. B. in der Physik. Dort schreibt man aber $\vec{r} = \mathbf{r} = \mathbf{r}$ statt x und r statt $\|x\|$. Vektorfelder sind dann Funktionen $f(\mathbf{r}) = \vec{f}(\vec{r})$ etc.

Beispiel 4.11. (1) Es sei $f(\mathbf{r}) = \langle \mathbf{a}, \mathbf{r} \rangle$ mit $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)$ und $\mathbf{r} = (x_1, \dots, x_n)$. Dabei meint $\langle \mathbf{a}, \mathbf{r} \rangle$ das gewöhnliche **Skalarprodukt**:

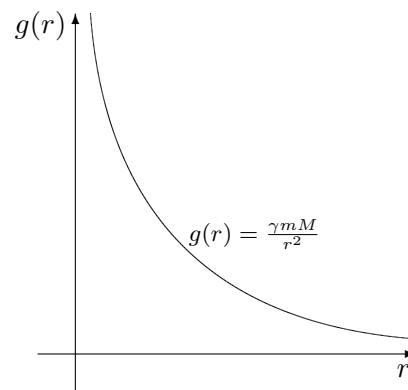
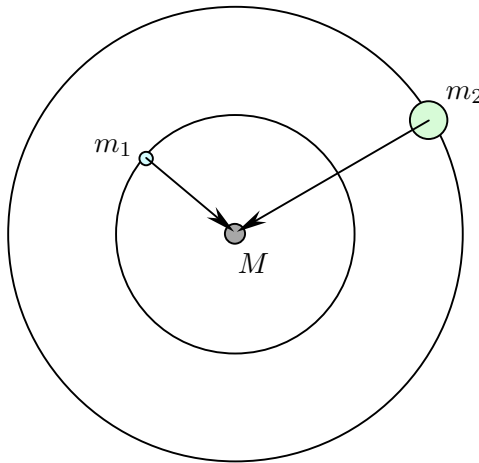
$$\begin{aligned} \langle \mathbf{a}, \mathbf{r} \rangle &= \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{r}\| \cos \varphi \\ &= a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n. \end{aligned}$$



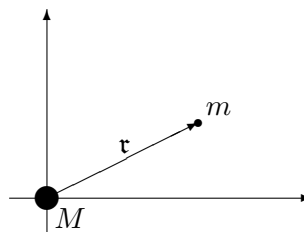
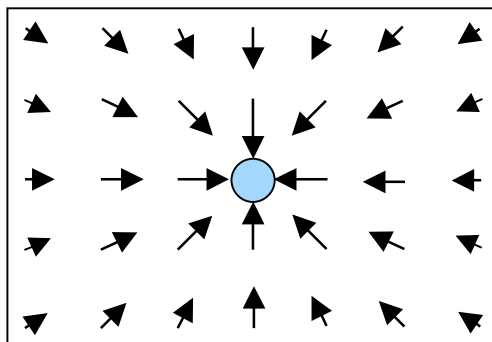
Wir erhalten also ein Skalarfeld. Für $n = 2$ können wir es durch nebenstehendes Höhenlinienbild darstellen. Die Höhenlinien sind dabei durch $a_1 x_1 + a_2 x_2 = \text{const}$ gegeben.



(2) Zentralfelder $f(\mathbf{r}) = g(r)$. Der Wert $f(\mathbf{r})$ ist also nur vom Abstand r zum Ursprung abhängig. Z. B. beschreibt $g(r) = \frac{\gamma m M}{r^2}$ ein Gravitationsfeld (dabei bedeuten γ die Gravitationskonstante und m, M die Massen betreffenden Körper). $g(r)$ gibt also den Betrag der Gravitationskraft an (nicht deren Richtung).



Die Gravitationskraft selbst wird beschrieben durch $f(\mathbf{r}) = -\gamma m M \frac{\mathbf{r}}{r^3}$. Dann ist $\|f(\mathbf{r})\| = \gamma m M \frac{r}{r^3} = g(r)$.

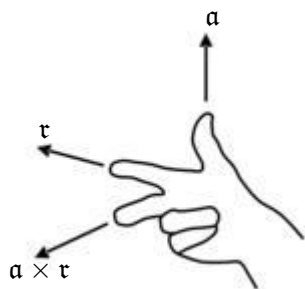


In Koordinaten:

$$f(\mathbf{r}) = \left(-\frac{\gamma m M}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} x, -\frac{\gamma m M}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} y, -\frac{\gamma m M}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} z \right).$$

Die Bewegung eines Planeten um die Sonne wird dann durch die Differentialgleichung $m \ddot{\mathbf{r}} = f(\mathbf{r})$ mit den Anfangsbedingungen $\mathbf{r}(0) = \mathbf{r}_0$ und $\dot{\mathbf{r}}(0) = \dot{\mathbf{r}}_0$ beschrieben.

- (3) Betrachte das **Vektorprodukt** $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $f(\mathbf{r}) = \mathbf{a} \times \mathbf{r}$. Es hat folgende Eigenschaften:



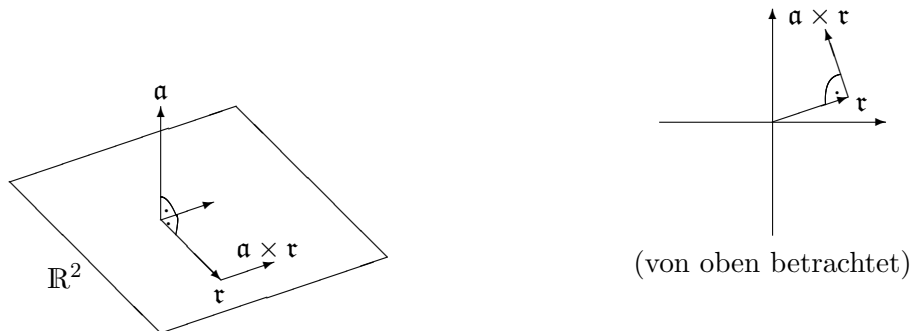
- (i) $\mathbf{a} \times \mathbf{r}$ steht senkrecht auf \mathbf{r} und \mathbf{a} ,
- (ii) seine Länge entspricht dem Wert der Fläche des von \mathbf{a} und \mathbf{r} aufgespannten Parallelogramms,
- (iii) „Rechte-Hand-Regel“ (siehe Abbildung).

In Koordinaten:

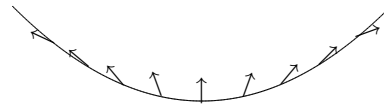
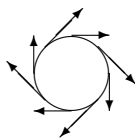
$$\mathbf{a} \times \mathbf{r} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{vmatrix} = (a_2 x_3 - a_3 x_2, a_3 x_1 - a_1 x_3, a_1 x_2 - a_2 x_1)$$

für $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ und $\mathbf{r} = (r_1, r_2, r_3)$.

Die Abbildung $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\mathbf{r} \mapsto \mathbf{a} \times \mathbf{r}$ mit $\mathbf{a} \perp \mathbb{R}^2$, d. h. $\mathbf{a} \perp \mathbf{v}$ für alle $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$, wirkt wie folgt:



Vektorfelder sind oft nicht im gesamten \mathbb{R}^n , sondern nur auf „dünnen“ Teilmengen erklärt:



Ein Satz aus dem Kuriositätenkabinett:

Satz 4.15 (Igelsatz). Sei $\mathbb{S}^2 := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^3$. Es gibt kein stetiges Vektorfeld $f: \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit

$$\|f(\tau)\| = 1, \quad \langle f(\tau), \tau \rangle = 0 \quad \forall \tau \in \mathbb{S}^2.$$

Mit anderen Worten: Ein Igel lässt sich nicht ohne Glatzenpunkt kämmen.

Satz 4.16. Sei $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine Abbildung. Dann gilt:

1. Die Abbildung f ist genau dann auf ganz \mathbb{R}^n stetig, wenn das Urbild jeder offenen Menge offen ist.
2. Ist f stetig und ist $E \subset \mathbb{R}^n$ eine abgeschlossene und beschränkte Menge, so ist $f(E) \subset \mathbb{R}^m$ abgeschlossen und beschränkt.

Beweis. 1. „ \Rightarrow “: Seien $V \subset \mathbb{R}^m$ und $x_0 \in f^{-1}(V)$. Dann ist $f(x_0) \in V$ und da V offen ist, gibt es ein $\varepsilon > 0$ mit $U_\varepsilon(f(x_0)) \subset V$. Wegen der Stetigkeit von f in x_0 existiert ein $\delta > 0$ mit $f(U_\delta(x_0)) \subset U_\varepsilon(f(x_0))$, woraus $U_\delta(x_0) \subset f^{-1}(U_\varepsilon(f(x_0))) \subset f^{-1}(V)$ folgt. Also ist $f^{-1}(V)$ offen.

„ \Leftarrow “: Sei $x_0 \in \mathbb{R}^n$ und betrachte $U_\varepsilon(f(x_0))$ zu gegebenem $\varepsilon > 0$. Nach Voraussetzung sind $U_\varepsilon(f(x_0))$ und $f^{-1}(U_\varepsilon(f(x_0)))$ offen. Es gilt $x_0 \in f^{-1}(U_\varepsilon(f(x_0)))$, weswegen ein $\delta > 0$ mit $U_\delta(x_0) \subset f^{-1}(U_\varepsilon(f(x_0)))$ existiert. Dies liefert $f(U_\delta(x_0)) \subset U_\varepsilon(f(x_0))$, d. h. f ist in x_0 stetig.

2. Wir nehmen die Unbeschränktheit von $f(E)$ an. Dann gibt es $x_n \in E$ mit $\|f(x_n)\| > n$. Da E abgeschlossen und beschränkt ist, existiert ein $x \in E$ mit $x_{n_k} \rightarrow x$ (nach Satz 2.10, BOLZANO-WEIERSTRASS). Aus der Stetigkeit von f ergibt sich $f(x_{n_k}) \rightarrow f(x)$, was wegen $\|f(x_n)\| \rightarrow \infty$ aber unmöglich ist. Also ist $f(E)$ doch beschränkt.

Wir zeigen noch, dass $f(E)$ abgeschlossen ist. Sei hierzu $y_n = f(x_n) \in f(E)$ und $y_n \rightarrow y$ für alle $n \geq 1$. Wir müssen $y \in f(E)$ zeigen. Wieder nach Satz 2.10 besitzt $\{x_n\}$ eine konvergente Teilfolge $\{x_{n_k}\}$ mit $x_{n_k} \rightarrow x$. Aus der Stetigkeit von f ergibt sich also $f(x_{n_k}) \rightarrow f(x)$. Wegen $y_{n_k} = f(x_{n_k}) \rightarrow y$ folgt $y = f(x)$, d. h. $y \in f(E)$. \square

Ist f stetig, so werden nicht notwendigerweise offene Mengen in offene und abgeschlossene Mengen in abgeschlossene überführt. So bildet etwa die Kosinusfunktion das offene Intervall $(\frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{2})$ auf das abgeschlossene Intervall $[-1, 1]$ ab; die Arkustangensfunktion bildet die abgeschlossene Menge \mathbb{R} auf das offene Intervall $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ ab.

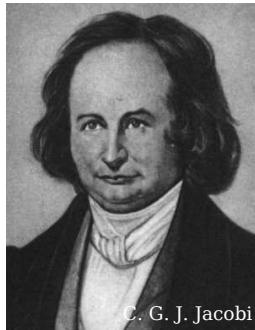
Korollar 4.2 (zu Satz 4.16, WEIERSTRASS für Skalarfelder). *Ist $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^1$ stetig und ist $E \subset \mathbb{R}^n$ eine nichtleere, abgeschlossene und beschränkte Menge, so besitzt f auf E ein Maximum und ein Minimum.*

Beweis. Nach Satz 4.16.2 ist $f(E)$ nichtleer, abgeschlossen und beschränkt im \mathbb{R}^1 . Dass solche Mengen ein Maximum und Minimum haben, wissen wir aus Satz 4.5. \square

Satz 4.16 gilt auch für Abbildungen $f: X \rightarrow Y$ zwischen metrischen (und sogar zwischen topologischen) Räumen. Statt Abgeschlossen- und Beschränktheit muss man dann aber **Kompaktheit** fordern.

5

Differentialrechnung



C. G. J. Jacobi



M. Rolle



P. de Fermat



G. F. Hospital



B. Taylor



J. Lagrange



G. Peano



H. Schwarz



O. Hesse

5.1 Lineare Abbildungen

Eine Abbildung $A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ heißt **linear** oder auch **linearer Operator**, wenn für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$ und $\alpha \in \mathbb{R}$

$$A(x + y) = Ax + Ay, \quad A(\alpha x) = \alpha Ax$$

gilt. Bezeichnet $E = \{e_1, \dots, e_n\}$ eine Basis im \mathbb{R}^n , so lässt sich jedes $x \in \mathbb{R}^n$ in der Form $x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$ mit $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ schreiben. Die Zahlen x_1, \dots, x_n heißen **Koordinaten** von x bezüglich der Basis E . Wir setzen

$$[x]_E := \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

d. h. $[x]_E$ ist die aus den Koordinaten gebildete Spalte. Die Basis E mit

$$e_1 = (1, 0, 0, \dots, 0), \quad e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0), \quad \dots, \quad e_n = (0, 0, \dots, 0, 1)$$

heißt **Standardbasis** von \mathbb{R}^n . Die Koordinaten von $x \in \mathbb{R}^n$ in der Standardbasis sind gerade die Komponenten von x , d. h.

$$[(x_1, \dots, x_n)]_{\{e_1, \dots, e_n\}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Seien nun $A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine lineare Abbildung, $E = \{e_1, \dots, e_n\}$ eine Basis im \mathbb{R}^n und $F = \{f_1, \dots, f_m\}$ eine Basis im \mathbb{R}^m . Dann existiert eine eindeutig bestimmte Matrix, die wir mit $[A]_{E,F}$ bezeichnen und **Matrixdarstellung** von A in den Basen E und F nennen, so dass

$$[Ax]_F = [A]_{E,F} [x]_E \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

gilt. Mit anderen Worten: Sind x_1, \dots, x_n die Koordinaten von x in der Basis E und y_1, \dots, y_m die Koordinaten von Ax in der Basis F , so gilt

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{mit } [A]_{E,F} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Merkregel: Die j -te Spalte von $[A]_{E,F}$ besteht aus den Koordinaten von Ae_j in der Basis F .

Ist $m = n$, so wählt man i. A. $E = F$. Für verschiedene Basen E und E' gilt dann

$$[A]_{E',E'} = C \cdot [A]_{E,E} \cdot C^{-1} \quad (5.1)$$

mit einer invertierbaren Matrix C .

Eine lineare Abbildung $A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt **invertierbar**, wenn sie bijektiv ist. Die **Determinante** $\det A$ ist definiert als $\det[A]_{E,E}$, wobei E eine beliebige Basis des \mathbb{R}^n ist. Wegen (5.1) hängt $\det A$ nicht von der konkreten Basiswahl ab. Es gilt

$$A \text{ ist invertierbar} \iff \det[A]_{E,E} \neq 0.$$

Für jede lineare Abbildung $A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ gibt es eine Konstante M mit

$$\|Ax\| \leq M \|x\| \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \quad (5.2)$$

z. B. gilt

$$\begin{aligned} \|Ax\|^2 &= \left\| \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right\|^2 = \left\| \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n \end{pmatrix} \right\|^2 \\ &= (a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n)^2 + \cdots + (a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n)^2 \\ &\stackrel{*}{\leq} (a_{11}^2 + \cdots + a_{1n}^2)(x_1^2 + \cdots + x_n^2) + \cdots + (a_{m1}^2 + \cdots + a_{mn}^2)(x_1^2 + \cdots + x_n^2) \\ &= \underbrace{\sum_{i,j=1}^{n,m} a_{ij}^2}_{=: M^2} \cdot \underbrace{(x_1^2 + \cdots + x_n^2)}_{=\|x\|^2}, \end{aligned}$$

unter Verwendung der CAUCHY-SCHWARZschen Ungleichung $(\sum_i a_i x_i)^2 \leq \sum_i a_i^2 \sum_i x_i^2$ an der Stelle *. Also gilt

$$\|Ax\|^2 \leq M^2 \|x\|^2 \quad \text{mit } M := \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n,m} a_{ij}^2}.$$

Man nennt M die **FROBENIUS¹-Norm** von A . Das Infimum aller M , für die die Ungleichung (5.2) gilt, wird mit $\|A\|$ bezeichnet und **Norm** (oder **Spektralnorm**) von A genannt. Wir haben also

$$\|Ax\| \leq \|A\| \|x\| \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Für eine lineare Abbildung $A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ gilt

$$A \text{ ist invertierbar} \iff \exists m \in (0, \infty) : m \|x\| \leq \|Ax\| \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Mit $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ bezeichnen wir die Menge aller linearen Abbildungen von \mathbb{R}^n nach \mathbb{R}^m . Zur Abkürzung setzen wir $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n) := \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$.

¹Ferdinand Georg FROBENIUS (1849 - 1917), deutscher Mathematiker. Sein Werk ist der Theorie der Gruppen und ihrer Darstellungstheorie gewidmet. Er wurde 1874 zum außerordentlichen Professor berufen, ohne promoviert zu haben.

5.2 Die Ableitung

Die Idee der Differentialrechnung ist die Linearisierung: Eine nichtlineare Abbildung $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ soll in der Umgebung eines Punktes $a \in \mathbb{R}^n$ möglichst gut durch eine lineare Abbildung $A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ersetzt werden.

Seien $G \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge, $f: G \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine Funktion und $a \in G$ ein Punkt. Für $h \in \mathbb{R}^n$ mit hinreichend kleinem $\|h\|$ ist dann auch $a + h \in G$. Damit gilt

$$f(a + h) = f(a) + \beta_a(h) \quad \text{und} \quad \|\beta_a(h)\| \rightarrow 0 \quad \text{für} \quad \|h\| \rightarrow 0$$

genau dann, wenn f in a stetig ist — mit anderen Worten:

$$f(a + h) - f(a) = o(1) \quad (h \rightarrow 0) \iff f \text{ ist stetig in } a.$$

In der Differentialrechnung geht es nun darum, dieses $o(1)$ zu präzisieren.

Definition 5.1. Seien $G \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f: G \rightarrow \mathbb{R}^m$ und $a \in G$. Die Funktion f heißt **differenzierbar in a** , falls es eine lineare Abbildung $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ so gibt, dass gilt:

$$f(a + h) = f(a) + Ah + \alpha_a(h) \quad \text{mit} \quad \|\alpha_a(h)\| = o(\|h\|) \quad (\|h\| \rightarrow 0).$$

Man schreibt oft $\alpha_a(h) = o(\|h\|)$ ($h \rightarrow 0$) statt $\|\alpha_a(h)\| = o(\|h\|)$ ($\|h\| \rightarrow 0$). In Zukunft werden wir selbst $(h \rightarrow 0)$ weglassen. Wir haben also

$$\alpha_a(h) = o(\|h\|) \quad (h \rightarrow 0) \iff \frac{\|\alpha_a(h)\|}{\|h\|} \rightarrow 0 \quad (h \rightarrow 0).$$

Satz 5.1. Ist $f: (G \subset \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}^m$ in a differenzierbar, so ist die lineare Abbildung A aus Definition 5.1 eindeutig bestimmt.

Beweis. Angenommen, es gibt zwei derartige Abbildungen A, B mit $Ah + o(\|h\|) = Bh + o(\|h\|)$. Für $C := A - B$ gilt dann auch $Ch = o(\|h\|)$. Wählt man Basen in \mathbb{R}^n und \mathbb{R}^m , so können wir Matrizen statt der linearen Abbildungen betrachten. Seien also

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & \cdots & c_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad h = \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix}.$$

Wähle speziell $h = (0, \dots, 0, t, 0 \dots, 0)^\top$ mit $t \in \mathbb{R}$ an j -ter Stelle. Dann ist $\|h\| = |t|$ und wir haben

$$Ch = \begin{pmatrix} c_{1j} t \\ \vdots \\ c_{mj} t \end{pmatrix},$$

d. h. $\|Ch\| = |t| \sqrt{c_{1j}^2 + \dots + c_{mj}^2}$. Aus $\frac{\|Ch\|}{\|h\|} \rightarrow 0$ erhalten wir

$$\frac{|t| \sqrt{c_{1j}^2 + \dots + c_{mj}^2}}{|t|} \rightarrow 0 \text{ für } t \rightarrow 0,$$

also $c_{1j} = \dots = c_{mj} = 0$. Da j beliebig gewählt war, folgt $C = 0$, d. h. in der Tat $A = B$. \square

Definition 5.2. Ist $f: (G \subset \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}^m$ in $a \in G$ differenzierbar, so nennt man die eindeutig bestimmte lineare Abbildung $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ aus Definition 5.1 die **Ableitung von f in a** und bezeichnet sie mit

$$f'(a) = df(a) = Df(a).$$

Im Fall der Differenzierbarkeit gilt also

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \mathcal{O}(\|h\|) \text{ oder } f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \mathcal{O}(\|x-a\|).$$

Definition 5.3. Eine Abbildung $f: (G \subset \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}^m$ heißt **differenzierbar in G** , wenn f in jedem Punkt $a \in G$ differenzierbar ist.

Ist f in G differenzierbar, so erhalten wir also eine neue Funktion

$$f': (G \subset \mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m), \quad a \longmapsto f'(a).$$

Ist f' ebenfalls in G differenzierbar, so erhalten wir eine Abbildung

$$f'': (G \subset \mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)), \quad a \longmapsto f''(a),$$

usw.

Funktionen aus \mathbb{R}^1 in \mathbb{R}^1

Seien also $G \subset \mathbb{R}^1$ ein offenes Intervall und $f: (G \subset \mathbb{R}^1) \rightarrow \mathbb{R}^1$ eine Funktion. Laut Definition 5.1 heißt f in $a \in G$ differenzierbar, wenn gilt:

$$\exists A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^1) : f(x) = f(a) + A(x-a) + \mathcal{O}(|x-a|).$$

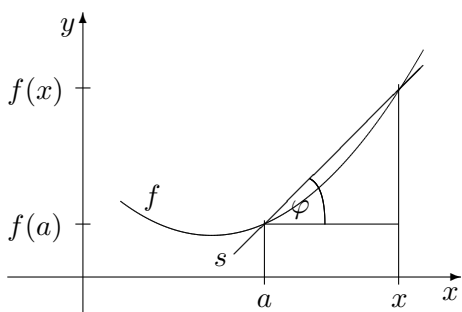
Lineare Abbildungen von \mathbb{R}^1 nach \mathbb{R}^1 sind stets von der Gestalt $Ay = cy$, $c \in \mathbb{R}^1$, also gilt:

$$\begin{aligned} f \text{ differenzierbar in } a &\iff \exists c \in \mathbb{R}^1 : f(x) = f(a) + c(x-a) + \mathcal{O}(|x-a|) \\ &\iff \exists c \in \mathbb{R}^1 : \frac{f(x) - f(a)}{x-a} = c + \frac{\mathcal{O}(|x-a|)}{x-a} \\ &\iff \exists c \in \mathbb{R}^1 : \frac{f(x) - f(a)}{x-a} = c + \mathcal{O}(1) \\ &\iff \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x-a} =: c \text{ existiert.} \end{aligned}$$

Man nennt dieses c ebenfalls **Ableitung von f in a** und bezeichnet c mit

$$f'(a) = df(a) = \frac{df}{dx}(a) = \left. \frac{df}{dx} \right|_{x=a}$$

etc. Für Funktionen aus \mathbb{R}^1 nach \mathbb{R}^1 haben wir streng genommen also zwei Ableitungsbegriffe: $f'(a)$ als lineare Abbildung von \mathbb{R}^1 nach \mathbb{R}^1 und die Zahl c . Da man aber $\mathcal{L}(\mathbb{R}^1)$ mit \mathbb{R}^1 identifizieren kann, können wir auch $f'(a)$ und c miteinander identifizieren.



Geometrische Veranschaulichung der Ableitung für Funktionen aus \mathbb{R}^1 nach \mathbb{R}^1 :

Die Gerade s durch die Punkte $(a, f(a))$ und $(x, f(x))$ heißt **Sekante**. Sie hat den Anstieg

$$\tan \varphi = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

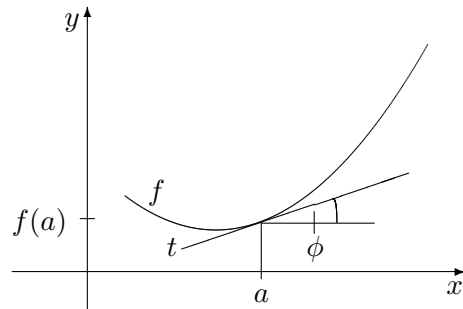
Für $x \rightarrow a$ geht die Sekante in die **Tangente** über.

Der Anstieg dieser Tangente ist (im Falle der Differenzierbarkeit) gerade

$$\tan \phi = f'(a).$$

Die Tangentengleichung lautet

$$y = t(x) = f(a) + f'(a)(x - a).$$



Physikalische Veranschaulichung der Ableitung für Funktionen aus \mathbb{R}^1 nach \mathbb{R}^1 :

Ein Massepunkt bewege sich auf einer Geraden nach dem Weg-Zeit-Gesetz $x = f(t)$, wobei x den Ort des Massepunkts zur Zeit t meint. Dann ist $f(t) - f(a)$ der im Zeitintervall $[a, t]$ zurückgelegte Weg und $t - a$ die dabei verflossene Zeit, d. h. $\frac{f(t) - f(a)}{t - a}$ ist die Durchschnittsgeschwindigkeit. Für $t \rightarrow a$ erhalten wir die Momentangeschwindigkeit $f'(a) = \dot{f}(a)$.

Berechnung von Ableitungen

An dieser Stelle sollen lediglich zwei Beispiele gebracht werden.

Beispiel 5.1. (1) Sei $f: \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^1$, $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$. Wir haben

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^n - a^n}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} (x^{n-1} + x^{n-2}a + x^{n-3}a^2 + \dots + a^{n-1}) = n a^{n-1}.$$

Also ist f in jedem Punkt $a \in \mathbb{R}^1$ differenzierbar mit $f'(a) = n a^{n-1}$. Man schreibt auch

$$f'(x) = n x^{n-1} \text{ oder } (x^n)' = n x^{n-1}.$$

(2) Affin-lineare Abbildung. Sei $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $x \mapsto c + Ax$, mit $c \in \mathbb{R}^m$ und $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$. Es gilt

$$f(a + h) = c + A(a + h) = c + Aa + Ah = f(a) + Ah,$$

d. h. f ist in jedem Punkt $a \in \mathbb{R}^n$ differenzierbar mit $f'(a) = A$.

Satz 5.2. Hat die Potenzreihe $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ einen positiven Konvergenzradius R , so ist $f(x)$ in $x = 0$ differenzierbar mit $f'(0) = a_1$.

Beweis. Wir haben

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots = a_0 + a_1 x + x^2 (a_2 + a_3 x + a_4 x^2 + \dots)$$

mit

$$\begin{aligned} |a_2 + a_3 x + a_4 x^2 + \dots| &\leq |a_2| + |a_3 x| + |a_4 x^2| + \dots \leq |a_2| + |a_3| \rho + |a_4| \rho^2 + \dots \\ &=: M < \infty, \end{aligned}$$

$|x| < \rho < R$, da der Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} |a_{n+2}| x^n$ nach CAUCHY-HADAMARD ebenfalls R ist. Also folgt $f(x) = a_0 + a_1 x + \mathcal{O}(x^2)$ ($x \rightarrow 0$), vgl. Satz 4.9. Damit erhalten wir

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{(a_0 + a_1 x + \mathcal{O}(x^2)) - a_0}{x} = a_1 + \mathcal{O}(x) \quad (x \rightarrow 0) \rightarrow a_1 \quad (x \rightarrow 0).$$

□

Noch einige Beispiele:

Beispiel 5.2. (1) $f: \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^1$, $f(x) = e^x$. Wir haben

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{e^x - e^a}{x - a} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{a+h} - e^a}{h} = e^a \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - e^0}{h - 0} = e^a,$$

denn $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - e^0}{h - 0} = f'(0) = a_1 = 1$ (zweiter Koeffizient der Exponentialreihe, vgl. Satz 5.2).

(2) $f: \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^1$, $f(x) = \sin x$. Es gilt

$$\begin{aligned} \frac{\sin(a+h) - \sin a}{h} &= \frac{\sin a \cos h + \cos a \sin h - \sin a}{h} = \sin a \underbrace{\frac{\cos h - 1}{h}}_{\rightarrow 0(*)} + \cos a \underbrace{\frac{\sin h}{h}}_{\rightarrow 1(*)} \\ &\rightarrow \cos a \end{aligned}$$

((*): Jeweils nach Satz 5.2 gilt $\frac{\cos h - 1}{h} \rightarrow (\cos x)'|_{x=0}$ bzw. $\frac{\sin h}{h} \rightarrow (\sin x)'|_{x=0} = 1$ für $h \rightarrow 0$), d. h. es gilt $(\sin x)' = \cos x$. Analog zeigt man $(\cos x)' = -\sin x$.

5.3 Partielle Ableitungen & JACOBI-Matrix

Definition 5.4. Seien $f: (G \subset \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}^m$ und a ein Punkt der offenen Menge G . Ist die Abbildung

$$t \mapsto f(a_1, \dots, a_{k-1}, a_k + t, a_{k+1}, \dots, a_n)$$

mit $a = (a_1, \dots, a_n)$ in $t = 0$ differenzierbar, so wird die Ableitung dieser Abbildung (interpretiert als Zahl) die **partielle Ableitung von f nach x_k** genannt und mit

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(a) = \partial_k f(a) = f_{x_k}$$

etc. bezeichnet.

Beispiel 5.3. Betrachte die Funktion $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^1$, $f(x, y, z) = e^y x^2 + \sin z$. Ihre partiellen Ableitungen sind

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2e^y x, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = e^y x^2, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = \cos z.$$

Beispielsweise ist dann $f_x(3, 0, 4) = 2e^0 \cdot 3 = 6$.

Definition 5.5. Seien $f: (G \subset \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}^m$ und $a \in G$. Besitzt jede der Komponenten von $f = (f_1, \dots, f_m)$ in a sämtliche partielle Ableitungen, so wird die Matrix

$$(Jf)(a) := \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a) \right)_{i,j=1}^{m,n} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix}$$

die **JACOBI²-Matrix** von f in a genannt.

Beispiel 5.4. Seien $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f(x, y, z) = (x^2 + 3yz, e^x y^3)$, und $a = (0, 1, 2)$. Die JACOBI-Matrix für einen beliebigen Punkt $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ lautet

$$(Jf)(x, y, z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x, y, z) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x, y, z) & \frac{\partial f_1}{\partial x_3}(x, y, z) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x, y, z) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x, y, z) & \frac{\partial f_2}{\partial x_3}(x, y, z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x & 3z & 3y \\ e^x y^3 & 3e^x y^2 & 0 \end{pmatrix}.$$

²Carl Gustav Jacob JACOBI (1804 - 1851). Entwicklung der Theorie elliptischer Funktionen, Untersuchungen zur Differentialgeometrie, zu partiellen Differentialgleichungen, Variationsrechnung, mathematische Physik.

Damit ist

$$(Jf)(a) = (Jf)(0, 1, 2) = \begin{pmatrix} 0 & 6 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die Standardbasis im \mathbb{R}^k ist die Basis $E_k = \{e_1, \dots, e_k\}$ mit $(e_i)_j = \delta_{ij}$, $1 \leq i, j \leq k$.

Satz 5.3. *Ist $f: (G \subset \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}^m$ in $a \in G$ differenzierbar, so besitzen alle Komponenten von f in a sämtliche partielle Ableitungen, und es gilt*

$$[f'(a)]_{E_n, E_m} = (Jf)(a),$$

d. h. die JACOBI-Matrix ist die Matrixdarstellung der Ableitung in den Standardbasen.

Beweis. Wir haben

$$f(a+h) - f(a) = f'(a)h + \mathcal{O}(\|h\|)$$

nach Definition der Differenzierbarkeit von f in a . Für $h := t e_j$, $1 \leq j \leq n$, gilt

$$\begin{aligned} & f(a + t e_j) - f(a) = f'(a)(t e_j) + \mathcal{O}(\|t e_j\|) \\ \implies & f(a + t e_j) - f(a) = t f'(a) e_j + \mathcal{O}(|t|) \\ \implies & \frac{f(a + t e_j) - f(a)}{t} = f'(a) e_j + \mathcal{O}(1) \\ \implies & \frac{f_i(a + t e_j) - f_i(a)}{t} = (f'(a) e_j)_i + \mathcal{O}(1). \end{aligned}$$

Die linke Seite konvergiert also mit dem Grenzwert $(f'(a) e_j)_i$. Nach Definition 5.4 bedeutet dies, dass f_i in a die j -te partielle Ableitung besitzt. Somit hat f_i in a sämtliche partielle Ableitungen und es gilt

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a) = (f'(a) e_j)_i.$$

Der (i, j) -te Eintrag der Matrixdarstellung von $f'(a)$ ist aber die i -te Koordinate von $f'(a) e_j$ in der Basis E_m , d. h. die i -te Komponente von $f'(a) e_j$. \square

Skalarfelder

Seien $f: (G \subset \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}^1$ und $a \in G$. Die JACOBI-Matrix ist dann die Zeile

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a) \quad \dots \quad \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \right).$$

Wählen wir in \mathbb{R}^n und \mathbb{R}^1 die jeweiligen Standardbasen und identifizieren wir lineare Abbildungen aus $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^1)$ mit Matrizen, so erhalten wir

$$f'(a)h = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix} = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)h_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)h_n.$$

Schreibt man $df(a)$ statt $f'(a)$, so entsteht

$$df(a)h = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)h_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)h_n. \quad (5.3)$$

Wir wenden diese Formel auf den Spezialfall an, in dem $f = \varphi_k: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^1$, $\varphi_k(x_1, \dots, x_n) = x_k$, die Abbildung ist, die aus (x_1, \dots, x_n) die k -te Koordinate auswählt. Damit haben wir

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_k}(a) \end{pmatrix} = (0, \dots, 0, \overset{k}{\underset{\downarrow}{1}}, 0, \dots, 0),$$

und somit $d\varphi_k(a)h = h_k$. Setzen wir dies in (5.3) ein, so ergibt sich

$$df(a)h = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)d\varphi_1(a)h + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)d\varphi_n(a)h.$$

Bezeichnet man φ_k einfach mit x_k , entsteht

$$df(a)h = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)dx_1(a)h + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)dx_n(a)h.$$

Durch Weglassen von h und a ergibt sich schließlich

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n.$$

Dies ist also eine 100 %-ig exakt definierte Gleichheit, zu deren Erklärung es nicht nötig ist, mit „unendlich kleinen Größen“ zu arbeiten.

Definition 5.6. Man nennt die Ableitung bzw. die JACOBI-Matrix eines Skalarfeldes auch den **Gradient** und bezeichnet ihn mit

$$\text{grad } f(a) := \nabla f(a) := f'(a) = (Jf)(a).$$

Z. B. schreibt man dann $\text{grad } f(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix}$.

Differenzierbarkeit & Existenz der partiellen Ableitungen

Satz 5.3 impliziert, dass aus der Differenzierbarkeit die Existenz aller partiellen Richtungsableitungen folgt. Der Witz ist, dass die Umkehrung nicht gilt wie folgendes Beispiel zeigt:

Beispiel 5.5. Sei $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^1$, $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}, \\ 0 & : (x, y) = (0, 0). \end{cases}$ Da f in

$(0, 0)$ bekanntlich nicht stetig ist, kann f dort auch nicht differenzierbar sein. Allerdings existieren alle partiellen Ableitungen von f . Für $(x, y) \neq (0, 0)$ ist das auch klar. In $(0, 0)$ selbst gilt

$$\begin{aligned} \frac{f(t, 0) - f(0, 0)}{t} &= \frac{0 - 0}{t} \rightarrow 0 = f_x(0, 0), \\ \frac{f(0, t) - f(0, 0)}{t} &= \frac{0 - 0}{t} \rightarrow 0 = f_y(0, 0). \end{aligned}$$

Satz 5.4. Wenn $f: (G \subset \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}^1$ in G stetig ist und dort sämtliche partielle Ableitungen besitzt, welche ebenfalls in G stetig sind, so ist f in G differenzierbar.

Den Beweis findet man in der Literatur. Dabei wird der Mittelwertsatz der Differentialrechnung (Abschnitt 5, Korollar 5.1) gebraucht.

Noch einmal zur Sprechweise:

| Mathematik | Physik |
|-------------------------------------|----------------------------|
| Differenzierbarkeit | totale Differenzierbarkeit |
| Existenz der partiellen Ableitungen | Differenzierbarkeit |

5.4 Rechenregeln für Ableitungen

Satz 5.5. Sind $f, g: (G \subset \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}^m$ in $a \in G$ differenzierbar, so gilt dies auch für $f \pm g$ und αf mit $\alpha \in \mathbb{R}$ und wir haben

$$(f \pm g)'(a) = f'(a) + g'(a), \quad (\alpha f)'(a) = \alpha f'(a).$$

Das Bilden der Ableitung ist also ein linearer Operator.

Dies ist offensichtlich (betrachte die Ableitung als lineare Abbildung bzw. als Matrix).

Satz 5.6 (Produktregel). Seien $f, g: (G \subset \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}^1$ in $a \in G$ differenzierbar. Dann ist die durch $(fg)(x) := f(x)g(x)$ definierte Funktion ebenfalls in a differenzierbar, wobei gilt:

$$(fg)'(a) = g(a)f'(a) + f(a)g'(a).$$

Andere Schreibweisen sind

$$\begin{aligned} (J(fg))(a) &= g(a)(Jf)(a) + f(a)(Jg)(a), \\ \text{grad}(fg) &= g \cdot \text{grad } f + f \cdot \text{grad } g, \\ \nabla(fg) &= g\nabla f + f\nabla g. \end{aligned}$$

Beweis. Wir haben

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \mathcal{O}(\|h\|), \quad g(a+h) = g(a) + g'(a)h + \mathcal{O}(\|h\|).$$

Multiplikation ergibt

$$\begin{aligned} f(a+h)g(a+h) &= f(a)g(a) + f(a)g'(a)h + g(a)f'(a)h + \underbrace{f'(a)hg'(a)h}_{=\mathcal{O}(\|h\|)} + \mathcal{O}(\|h\|) \\ &= f(a)g(a) + [g(a)f'(a) + f(a)g'(a)]h + \mathcal{O}(\|h\|), \end{aligned}$$

d. h. fg ist in a differenzierbar und die Ableitung ist der Operator in eckigen Klammern. \square

Satz 5.7 (Quotientenregel). Seien $f, g: (G \subset \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}^1$ in $a \in G$ differenzierbar und sei $g(a) \neq 0$. Dann ist die durch $\left(\frac{f}{g}\right)(x) := \frac{f(x)}{g(x)}$ definierte Funktion in a differenzierbar mit

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{g(a)f'(a) - f(a)g'(a)}{[g(a)]^2}.$$

Andere Schreibweisen sind

$$\begin{aligned} \left(J\frac{f}{g}\right)(a) &= \frac{1}{[g(a)]^2} (g(a)(Jf)(a) - f(a)(Jg)(a)), \\ \nabla\frac{f}{g} &= \frac{1}{g^2} (g\nabla f - f\nabla g). \end{aligned}$$

Beweis. Es ist $g(a+h) - g(a) = g'(a)h + \sigma(\|h\|)$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \frac{1}{g(a+h)} - \frac{1}{g(a)} &= \frac{g(a) - g(a+h)}{g(a+h)g(a)} = -\frac{g'(a)h + \sigma(\|h\|)}{[g(a)]^2 + \underbrace{g(a)g'(a)h + \sigma(\|h\|)}_{=\sigma(1)}} \\ &= -\frac{g'(a)h + \sigma(\|h\|)}{[g(a)]^2(1 + \sigma(1))} \stackrel{*}{=} -\frac{g'(a)h + \sigma(\|h\|)}{[g(a)]^2} (1 + \sigma(1)) \\ &= -\frac{g'(a)}{[g(a)]^2} h + \underbrace{\sigma(\|h\|) + \sigma(\|h\|)}_{=\sigma(\|h\|)}, \end{aligned}$$

unter Verwendung an der Stelle $*$, dass $\frac{1}{1 + \sigma(1)} = 1 + \sigma(1)$ gilt. Mithin ist $\frac{1}{g}$ in a differenzierbar und es gilt

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(a) = -\frac{1}{[g(a)]^2} g'(a).$$

Die Produktregel liefert schließlich

$$\begin{aligned} \left(\frac{f}{g}\right)'(a) &= \left(f \cdot \frac{1}{g}\right)'(a) = \left(\frac{1}{g}\right)'(a) \cdot f'(a) + f(a) \cdot \left(\frac{1}{g}\right)'(a) \\ &= \frac{1}{g(a)} f'(a) - \frac{f(a)}{[g(a)]^2} g'(a) = \frac{1}{[g(a)]^2} (g(a)f'(a) + f(a)g'(a)). \end{aligned}$$

□

Satz 5.8 (Kettenregel). *Gegeben seien Funktionen*

$$f: (G \subset \mathbb{R}^m) \rightarrow \mathbb{R}^k, \quad g: (H \subset \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}^m$$

mit $g(H) \subset G$. Seien g in $a \in H$ und f in $g(a) \in G$ differenzierbar. Dann ist die durch $f \circ g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$, $(f \circ g)(x) := f(g(x))$, definierte Funktion in a differenzierbar und es gilt

$$(f \circ g)'(a) = f'(g(a)) \cdot g'(a)$$

bzw.

$$(J(f \circ g))(a) = (Jf)(g(a)) \cdot (Jg)(a).$$

Beweis. Wir haben

$$\begin{aligned} f(g(a+h)) - f(g(a)) &= f(g(a) + \underbrace{g'(a)h + \mathcal{O}(\|h\|)}_{=\ell}) - f(g(a)) \\ &= f(g(a)) + f'(g(a))\ell + \mathcal{O}(\|\ell\|) - f(g(a)) \\ &= f'(g(a))g'(a)h + \underbrace{f'(g(a))\mathcal{O}(\|h\|) + \mathcal{O}(\|\ell\|)}_{=\mathcal{O}(\|h\|)}. \end{aligned}$$

□

Beispiel 5.6. (1) Wir betrachten die Funktion $h: \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^1$, $h(x) = e^{-x^2}$, und setzen $g(x) := x^2$, $f(x) := e^{-x}$. Dann ist $g'(x) = 2x$ und $f'(x) = -e^{-x}$, und die Kettenregel liefert

$$h'(x) = (f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x) = -e^{-x^2} \cdot 2x.$$

(2) Seien $z = f(x, y)$, $x = x(t)$ sowie $y = y(t)$, also $z = f(x(t), y(t))$. Uns interessiert $\frac{dz}{dt}$. Wir haben

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^1, & (x, y) &\longmapsto f(x, y), \\ g: \mathbb{R}^1 &\longrightarrow \mathbb{R}^2, & t &\longmapsto (x(t), y(t)), \\ f \circ g: \mathbb{R}^1 &\longrightarrow \mathbb{R}^1, & t &\longmapsto f(x(t), y(t)). \end{aligned}$$

Nach der Kettenregel ist $\frac{dz}{dt}(t) = (J(f \circ g))(t) = (Jf)(g(t)) \cdot (Jg)(t)$. Es gilt

$$(Jf)(x, y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right), \quad (Jg)(t) = \begin{pmatrix} \frac{dx}{dt}(t) \\ \frac{dy}{dt}(t) \end{pmatrix}.$$

Damit ergibt sich

$$\begin{aligned}\frac{dz}{dt}(t) &= \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t)) \frac{dx}{dt}(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t)) \frac{dy}{dt}(t) \text{ oder kurz} \\ \frac{dz}{dt} &= \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt}.\end{aligned}$$

(3) Seien $z = z(x, y)$, $x = x(r, s)$ und $y = y(r, s)$. Dann ist

$$z = z(r, s) = z(x(r, s), y(r, s)).$$

Uns interessieren $\frac{\partial z}{\partial r}$ und $\frac{\partial z}{\partial s}$. Nach der Kettenregel gilt $(Jz)(r, s) = (Jf)(x(r, s), y(r, s)) \cdot (Jg)(r, s)$ mit $f(x, y) = z(x, y)$ und $g(r, s) = (x(r, s), y(r, s))$. Wir haben

$$(Jf)(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial z}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial z}{\partial y}(x, y) \end{pmatrix}, \quad (Jg)(r, s) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r}(r, s) & \frac{\partial x}{\partial s}(r, s) \\ \frac{\partial y}{\partial r}(r, s) & \frac{\partial y}{\partial s}(r, s) \end{pmatrix},$$

$$(Jz)(r, s) = \begin{pmatrix} \frac{\partial z}{\partial r}(r, s) & \frac{\partial z}{\partial s}(r, s) \end{pmatrix}$$

und somit

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial r}(r, s) &= \frac{\partial z}{\partial x}(x(r, s), y(r, s)) \frac{\partial x}{\partial r}(r, s) + \frac{\partial z}{\partial y}(x(r, s), y(r, s)) \frac{\partial y}{\partial r}(r, s), \\ \frac{\partial z}{\partial s}(r, s) &= \frac{\partial z}{\partial x}(x(r, s), y(r, s)) \frac{\partial x}{\partial s}(r, s) + \frac{\partial z}{\partial y}(x(r, s), y(r, s)) \frac{\partial y}{\partial s}(r, s)\end{aligned}$$

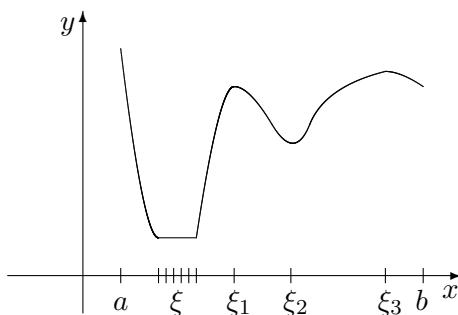
oder kurz

$$\frac{\partial z}{\partial r} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r}, \quad \frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s}.$$

5.5 Differenzierbare Funktionen einer Veränderlichen

Definition 5.7. Seien $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^1$ eine Funktion und $x_0 \in (a, b)$. Man sagt, dass f in x_0 ein **lokales Maximum** bzw. ein **lokales Minimum** hat, wenn es eine ε -Umgebung $U_\varepsilon(x_0) \subset (a, b)$ gibt mit

$$f(x) \leq f(x_0) \quad \forall x \in U_\varepsilon(x_0) \quad \text{bzw.} \quad f(x) \geq f(x_0) \quad \forall x \in U_\varepsilon(x_0).$$



ξ_1, ξ_3 ... lokale Maxima,
 ξ_2 ... lokales Minimum,
 ξ ... beides

Satz 5.9 (FERMAT³). Ist $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^1$ in $x_0 \in (a, b)$ differenzierbar und besitzt dort ein lokales Extremum (d. h. ein lokales Minimum oder Maximum), so gilt $f'(x_0) = 0$.

Beweis. Habe f in x_0 etwa ein lokales Maximum (betrachte im Falle eines lokalen Minimums die Funktion $-f$). Sei also $f(x) \leq f(x_0)$ für alle $x \in U_\varepsilon(x_0)$. Für $x \in U_\varepsilon(x_0)$ mit $x > x_0$ ist dann

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0.$$

Im Grenzwert $x \rightarrow x_0$ liefert dies $f'(x_0) \leq 0$. Für $x \in U_\varepsilon(x_0)$ mit $x < x_0$ gilt

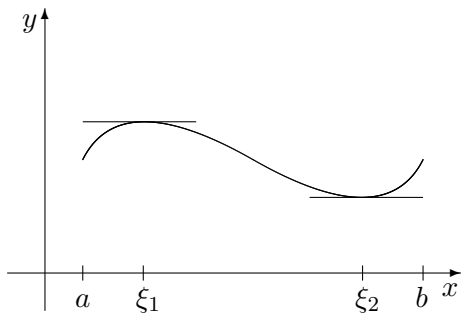
$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0,$$

also $f'(x_0) \geq 0$. Insgesamt ergibt sich demnach $0 \geq f'(x_0) \geq 0$, d. h. $f'(x_0) = 0$. \square

³Pierre de FERMAT (ca 1606 - 1665), französischer Mathematiker und Jurist. Beiträge zur Zahlentheorie, Wahrscheinlichkeits- und Differentialrechnung. Fermats letzter Satz: Die diophantische Gleichung $x^n + y^n = z^n$ mit $x, y, z \in \mathbb{N}$ ist für kein $n > 2$ erfüllt. (Literatur: Fermats letzter Satz von Simon Singh)

Die Umkehrung von Satz 5.9 gilt jedoch keineswegs. Z. B. hat $f: \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^1$, $f(x) = x^3$, in $x_0 = 0$ kein lokales Extremum, obwohl $f'(x_0) = 0$ gilt.

Satz 5.10 (ROLLE⁴). Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^1$ auf $[a, b]$ stetig und in (a, b) differenzierbar. Ist $f(a) = f(b)$, so gibt es ein ξ zwischen a und b mit $f'(\xi) = 0$.



Beweis. Nach Satz 4.5 (WEIERSTARSS) hat f auf $[a, b]$ ein Maximum, etwa in $x = \xi$. Ist $\xi \in (a, b)$, so ist $f'(\xi) = 0$ nach Satz 5.10.

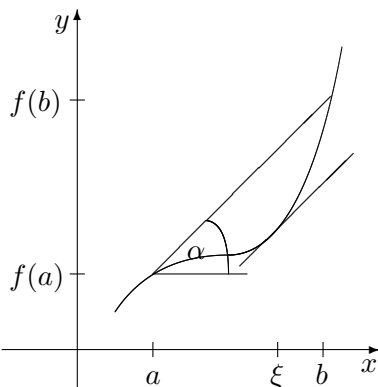
Sei nun $\xi = a$. Dann ist $f(a) \geq f(x)$ für alle $x \in [a, b]$. Nach Satz 4.5 besitzt f auf $[a, b]$ auch ein Minimum, etwa in $x = \eta$. Ist $\eta \in (a, b)$, so sind wir fertig. Sei also $\eta = a$. Dann folgt $f(a) \leq f(x)$ für alle $x \in [a, b]$. Also ist $f(x) = f(a) = \text{const}$ und damit $f'(\xi) = 0$ für

alle $\xi \in (a, b)$. Bleibt noch der Fall $\eta = b$. Dann ist $f(x) \geq f(b) = f(a)$ für jedes $x \in [a, b]$ und wir erhalten wieder $f(x) = f(a) = \text{const}$, d. h. $f'(\xi) = 0$ für alle $\xi \in (a, b)$.

Der Fall $\xi = b$ geht analog. □

Korollar 5.1 (zu Satz 5.10, Mittelwertsatz der Differentialrechnung). Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^1$ auf $[a, b]$ stetig und in (a, b) differenzierbar. Dann existiert ein $\xi \in (a, b)$ mit

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a).$$



Anschaulich ist dies vollkommen klar.

Geometrische Deutung: Es gibt mindestens eine Stelle ξ , in der die Tangente parallel zur Sekante durch die Punkte $(a, f(a))$ und $(b, f(b))$ verläuft,

$$\tan \alpha = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Physikalische Deutung: $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{\text{Weg}}{\text{Zeit}} = \text{Durchschnittsgeschwindigkeit}$. Es gibt

⁴Michel ROLLE (1652 - 1719), französischer Mathematiker. Der Satz von Rolle geht aus seiner *Theorie der Kaskaden* hervor. Rolle lehnte die Infinitesimalrechnung ab, die seiner Meinung nach fehlerhaft sei.

einen Punkt, in dem die Momentan- gleich der Durchschnittsgeschwindigkeit ist.

Beweis. Wir betrachten die Hilfsfunktion

$$g(x) := f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} (x - a) - f(a).$$

Dann ist $g(a) = g(b) = 0$. Nach Satz 5.10 gibt es also ein $\xi \in (a, b)$ mit $g'(\xi) = 0$ und wir haben

$$g'(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0.$$

□

Satz 5.11 (über Monotonie). *Ist $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^1$ in (a, b) differenzierbar, so gilt:*

- i) *f ist genau dann monoton wachsend auf (a, b) , wenn $f'(x) \geq 0$ für alle $x \in (a, b)$ gilt.*
- ii) *Ist $f'(x) > 0$ für alle $x \in (a, b)$, so ist f streng monoton wachsend in (a, b) .*
- iii) *Ist f außerdem stetig auf $[a, b]$ und gilt $f'(x) > 0$ für jedes $x \in (a, b)$, so ist die Umkehrfunktion in $(f(a), f(b))$ differenzierbar.*

Die Funktion $f: \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^1$, $f(x) = x^3$, zeigt, dass die Umkehrung von ii) nicht gilt.

Beweis. i) „ \Leftarrow “: Seien $x, y \in (a, b)$, $x < y$. Nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung gibt es ein $\xi \in (x, y)$ mit $f(y) - f(x) = f'(\xi)(y - x)$. Es folgt $f(x) \leq f(y)$ für $f'(\xi) \geq 0$ bzw. $f(x) < f(y)$ für $f'(\xi) > 0$, was auch ii) zeigt.

„ \Rightarrow “: Wir haben $f'(x) = \lim_{y \rightarrow x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x}$. Für $y > x$ ist $f(y) \geq f(x)$ und somit $\frac{f(y) - f(x)}{y - x} \geq 0$, also $f'(x) \geq 0$.

iii) Nach Satz 4.7 existiert die Umkehrfunktion $g: [f(a), f(b)] \rightarrow [a, b]$ von f . Für $x_0, x \in (a, b)$ ist $f(x) - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) + \sigma(x - x_0)$, da f in x_0 differenzierbar ist. Es folgt

$$x - x_0 = \frac{1}{f'(x_0)} (f(x) - f(x_0)) + \sigma(x - x_0).$$

Seien $y, y_0 \in (f(a), f(b))$ mit $x = g(y)$ und $y_0 = g(x_0)$. Wir erhalten

$$g(y) - g(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} (f(g(y)) - f(g(y_0))) + \sigma(x - x_0) \stackrel{*}{=} \frac{1}{f'(x_0)} (y - y_0) + \sigma(y - y_0)$$

unter Benutzung von *: Infolge des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung existiert ein ξ zwischen x und x_0 mit

$$x - x_0 = \frac{f(x) - f(x_0)}{f'(\xi)} = \frac{y - y_0}{f'(\xi)},$$

also ist $\sigma(x - x_0) = \sigma(y - y_0)$. □

Der Beweis von Satz 5.11 iii) bietet einem die Möglichkeit, die Ableitung der Umkehrfunktion g einer Funktion f zu bestimmen. Dazu startet man mit $f(g(x)) = x$.

Beispiel 5.7. (1) Logarithmus.

$$e^{\log x} = x \xrightarrow{\frac{d}{dx}} \underbrace{e^{\log x}}_{=x} (\log x)' = 1 \implies (\log x)' = \frac{1}{x}.$$

(2) Arkussinus. Es ist $\sin(\arcsin x) = x$, also $\cos(\arcsin x) \cdot (\arcsin x)' = 1$, d. h.

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\cos(\arcsin x)} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2(\arcsin x)}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

(3) Analog zu (2) erhält man $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$.

(4) Arkustangens. Wir haben

$$(\tan x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x} \right)' = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x.$$

Es ist $\tan(\arctan x) = x$, also

$$(1 + \tan^2(\arctan x)) \cdot (\arctan x)' = 1 \implies (\arctan x)' = \frac{1}{1 + x^2}.$$

Satz 5.12 (Regel von DE L'HÔSPITAL⁵). Seien $f, g: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^1$ in (a, b) differenzierbar und sei $g'(x) \neq 0$ für jedes $x \in (a, b)$. Gilt $f(a+0) = 0$, $g(a+0) = 0$ und

$$\lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = c, \quad c \in \mathbb{R},$$

so ist auch

$$\lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = c.$$

Beweis. Setzt man $f(a) = g(a) = 0$, so sind f und g in $[a, b - \varepsilon]$ stetig und in $(a, b - \varepsilon)$ differenzierbar. Wir wählen ein $t \in (a, b - \varepsilon)$ und betrachten die Funktion

$$\varphi(x) := f(x) - f(a) - \frac{f(t) - f(a)}{g(t) - g(a)} (g(x) - g(a)).$$

Wegen $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in (a, b)$ ist g streng monoton und damit $g(t) \neq g(a)$. Wir haben $\varphi(a) = \varphi(t) = 0$. Nach Satz 5.10 existiert also ein $\xi \in (a, t)$ mit

$$0 = \varphi'(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(t) - f(a)}{g(t) - g(a)} g'(\xi).$$

Somit ist

$$\lim_{t \rightarrow a+0} \frac{f(t)}{g(t)} = \lim_{t \rightarrow a+0} \frac{f(t) - f(a)}{g(t) - g(a)} = \lim_{t \rightarrow a+0} \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \lim_{\xi \rightarrow a+0} \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = c.$$

□

Satz 5.12 ist auch bei rechtsseitigen Limites anwendbar. Sie gilt auch im Falle von unbestimmten Ausdrücken der Form $\frac{\infty}{\infty}$ für rechts-, linksseitige und normale (d. h. beidseitige) Grenzwerte.

Beispiel 5.8. (1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{1} = 1.$

(2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{2} = \frac{1}{2}.$

(3) Sei $\alpha > 0$. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^\alpha}{\log x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\alpha x^{\alpha-1}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \alpha x^\alpha = \infty.$

Definition 5.8. Ist $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^1$ in (a, b) differenzierbar, und ist die Ableitung $f': (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^1$ in $x_0 \in (a, b)$ differenzierbar, so nennt man $(f')'(x_0)$ die **zweite Ableitung** von f in x_0 und bezeichnet sie mit

$$f''(x_0) = \frac{d^2 f}{dx^2}(x_0) = \left. \frac{d^2 f}{dx^2} \right|_{x=x_0} = \left(\frac{d}{dx} \right)^2 f \Big|_{x=x_0}$$

etc. Analog definiert man höhere Ableitungen

$$f'''(x_0), f^{(4)}(x_0), \dots, f^{(n)}(x_0).$$

⁵Guillaume François Antoine, Marquis de L'Hôpital (1661 - 1704), französischer Mathematiker. Autor des ersten Lehrbuchs über Differential- und Integralrechnung. Die Regel von de L'Hôpital wurde eigentlich von seinem Lehrer Bernoulli entdeckt.

Sie werden entsprechend bezeichnet:

$$\left. \frac{d^n f}{dx^n} \right|_{x=x_0} = \left(\frac{d}{dx} \right)^n f \Big|_{x=x_0}.$$

Beispiel 5.9. (1) Wir betrachten die Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$. Es gilt

$$(x^3)' = 3x^2, (x^3)'' = 6x, (x^3)''' = 6, (x^3)^{(4)} = 0, (x^3)^{(n)} = 0 \quad (n > 4).$$

Dann gilt beispielsweise

$$(x^3)'|_{x=2} = 12, (x^3)''|_{x=2} = 12, (x^3)'''|_{x=2} = 6.$$

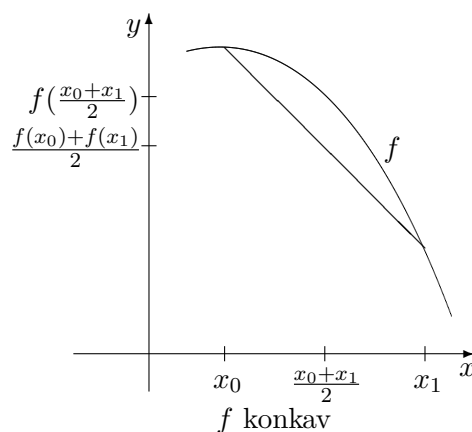
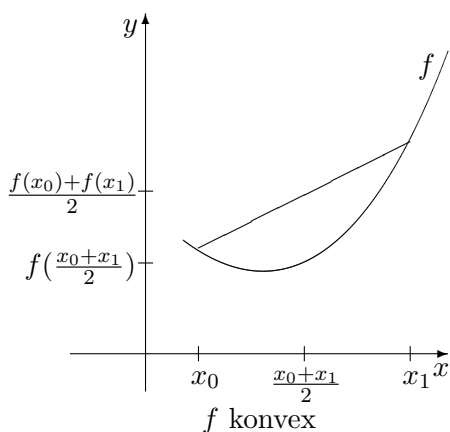
(2) Sei $x = x(t)$ ein Weg-Zeit-Gesetz. Dann bedeuten x den Ort zur Zeit t , $\dot{x} = x'(t)$ die Geschwindigkeit und $\ddot{x} = x''(t)$ die Beschleunigung.

Definition 5.9. Eine stetige Funktion $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^1$ heißt **konvex** auf (a, b) , wenn gilt:

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2} \quad \forall x, y \in (a, b),$$

bzw. **konkav** auf (a, b) , wenn gilt:

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \geq \frac{f(x)+f(y)}{2} \quad \forall x, y \in (a, b).$$



Lineare Funktionen sind sowohl konvex als auch konkav.

Satz 5.13 (Interpretation der zweiten Ableitung). Für $f \in \mathcal{C}^2(a, b)$, d. h. für eine zweimal stetig differenzierbare Funktion $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^1$, gilt: f ist auf (a, b) genau dann konvex bzw. konkav, wenn $f''(x_0) \geq 0$ bzw. $f''(x_0) \leq 0$ für alle $x \in (a, b)$ ist.

Wir wollen dies nicht beweisen; anschaulich ist der Satz aber klar:

f konvex \iff Tangente dreht sich nach links \iff Anstieg von f wächst $\iff f'(x)$ wächst $\iff f''(x) \geq 0$.

Physikalisch bedeutet das: f konvex \iff Bewegung erfolgt beschleunigt $\iff \ddot{x} \geq 0$.

Ein Punkt $x_0 \in (a, b)$ heißt **Wendepunkt** von f , wenn in ihm Konvexität in Konkavität (oder umgedreht) umschlägt. Es gilt die JENSENSche Ungleichung:

$$f \text{ konvex} \iff f\left(\frac{x_1 + \dots + x_n}{n}\right) \leq \frac{f(x_1) + \dots + f(x_n)}{n},$$

$$f \text{ konkav} \iff f\left(\frac{x_1 + \dots + x_n}{n}\right) \geq \frac{f(x_1) + \dots + f(x_n)}{n}.$$

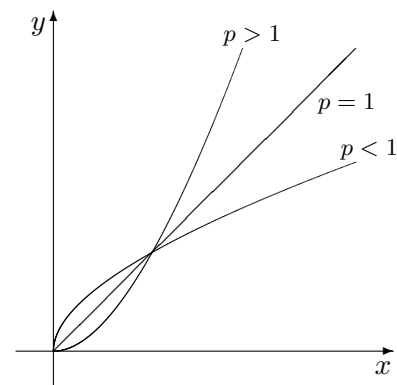
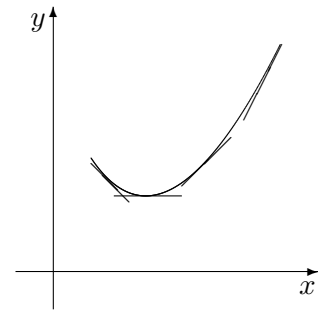
Beispiel 5.10. Sei $f(x) = x^p$, $x > 0$. Dann ist $f''(x) = (p-1)px^{p-2} \geq 0$, falls $p \geq 1$. Also gilt

$$\left(\frac{x_1 + \dots + x_n}{n}\right)^p \leq \frac{x_1^p + \dots + x_n^p}{n}.$$

Insbesondere für $p = 2$ erhält man die Aussage

$$\frac{x_1 + \dots + x_n}{n} \leq \sqrt{\frac{x_1^2 + \dots + x_n^2}{n}},$$

d. h. das arithmetische Mittel ist kleiner oder gleich dem quadratischen Mittel.

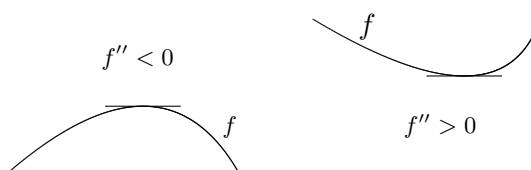


Satz 5.14 (Hinreichende Bedingung für lokale Extrema). Seien $f \in \mathcal{C}^2(a, b)$ und $x_0 \in (a, b)$. Dann gilt:

- i) $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) < 0 \implies x_0$ ist lokales Maximum,
- ii) $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) > 0 \implies x_0$ ist lokales Minimum.

Der Beweis wird im folgenden Abschnitt nachgeholt.

Auch das ist wieder anschaulich klar: Für $f'(x_0) = f''(x_0) = 0$ kann man ohne weitere Untersuchungen keine Aussage über Existenz und Art eines lokalen Extremums treffen.



5.6 TAYLOR-Entwicklung

Seien $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $a \in I$ ein Punkt. Sei ferner $f: I \rightarrow \mathbb{R}^1$ eine Funktion, die in I hinreichend oft differenzierbar (man sagt auch **glatt**) ist. Wir schreiben $f \in C^m(I)$, wenn $f^{(m)}$ existiert und stetig in I ist.

Unser Ziel ist es, f in einer Umgebung von a möglichst gut durch ein Polynom zu approximieren, etwa

$$P_n(x) = p_0 + p_1(x-a) + \cdots + p_n(x-a)^n;$$

vielleicht klappt es sogar mit einer Potenzreihe

$$f(x) = p_0 + p_1(x-a) + p_2(x-a)^2 + \cdots,$$

also einem Polynom vom Grad ∞ .

Nehmen wir an, wir hätten solch eine Reihe und diese ließe sich gliedweise differenzieren. Dann folgt $f(a) = p_0$ sowie

$$\begin{aligned} f'(x) &= p_1 + 2p_2(x-a) + 3p_3(x-a)^2 + 4p_4(x-a)^3 + \cdots && \implies f'(a) = p_1, \\ f''(x) &= 2p_2 + 3 \cdot 2p_3(x-a) + 4 \cdot 3p_4(x-a)^2 + \cdots && \implies f''(a) = 2p_2, \\ f'''(x) &= 3 \cdot 2p_3 + 4 \cdot 3 \cdot 2p_4(x-a) + \cdots && \implies f'''(a) = 3! p_3, \end{aligned}$$

usw. Allgemein erhält man $f^{(n)}(a) = n! p_n$. Versuchen wir es also mit der Reihe

$$f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k,$$

der sogenannten **TAYLOR⁶-Reihe von f in a** und dem Polynom

$$P_n(x) := f(a) + f'(a)(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k,$$

dem sogenannten **TAYLOR-Polynom von f in a** .

Satz 5.15 (TAYLOR-Formel mit Restglied von LAGRANGE⁷). *Seien $f \in C^{(n+1)}(I)$ und $a \in I$. Für $x \in I$ gilt dann*

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

mit ξ zwischen a und x .

⁶Brook TAYLOR (1685 - 1731), britischer Mathematiker. Singuläre Lösungen von Differentialgleichungen, Potenzreihenentwicklung differenzierbarer Funktionen.

Für $n = 0$ erhält man den Mittelwertsatz der Differentialrechnung (Korollar 5.1) $f(x) = f(a) + f'(\xi)(x - a)$.

Beweis. Wir setzen

$$P_n(t) := \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (t - a)^k \quad (5.4)$$

und bestimmen die Zahl M so, dass

$$f(x) = P_n(x) + \frac{M}{(n+1)!} (x - a)^{n+1}$$

gilt. Wir müssen also zeigen, dass ein ξ zwischen a und x mit $f^{(n+1)}(\xi) = M$ existiert. Dazu setzen wir

$$g(t) := f(t) - P_n(t) - \frac{M}{(n+1)!} (t - a)^{n+1}.$$

Wir haben $g^{(n+1)}(t) = f^{(n+1)}(t) - M$. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit sei $x > a$. Wir zeigen, dass es ein $\xi \in [a, x]$ gibt mit $g^{(n+1)}(\xi) = 0$. Es gilt

$$\begin{aligned} g(a) &= f(a) - P_n(a) = 0, \\ g'(a) &= f'(a) - P_n'(a) = 0, \\ g''(a) &= f''(a) - P_n''(a) = 0, \\ &\vdots \\ g^{(n)}(a) &= f^{(n)}(a) - P_n^{(n)}(a) = 0, \end{aligned}$$

und außerdem ist $g(x) = 0$. Nach Satz 5.10 (ROLLE) gibt es ein $\xi_1 \in [a, x]$ mit $g'(\xi_1) = 0$. Wieder nach Satz 5.10 ergibt sich die Existenz eines $\xi_2 \in [a, \xi_1]$ mit $g''(\xi_2) = 0$. Dann finden wir ein $\xi_3 \in [a, \xi_2]$ mit $g'''(\xi_3) = 0$ usw. Schließlich existiert ein $\xi_{n+1} \in [a, \xi_n]$ mit $g^{(n+1)}(\xi_{n+1}) = 0$. Der Satz gilt also mit $\xi := \xi_{n+1}$. \square

Beispiel 5.11. (1) Ist $|f^{(n+1)}(x)| \leq M$ für $x \in I$, so liefert Satz 5.15 die Abschätzung

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x - a)^k \right| \leq \frac{M}{(n+1)!} |I|^{n+1}.$$

Sei z. B. $f(x) = e^x$. Es ist $f^{(k)}(x) = e^x$ und $f^{(k)}(0) = 1$. Setzen wir $a := 0$, so erhalten wir als TAYLOR-Polynom (5.4)

$$P_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$$

⁷Joseph-Louis DE LAGRANGE (1736 - 1813), italienischer Mathematiker und Astronom. Begründer der analytischen Mechanik. Beschäftigte sich mit der Variationsrechnung, der Theorie komplexer Funktionen, Algebra (Gruppentheorie), dem Dreikörperproblem der Himmelsmechanik.

und

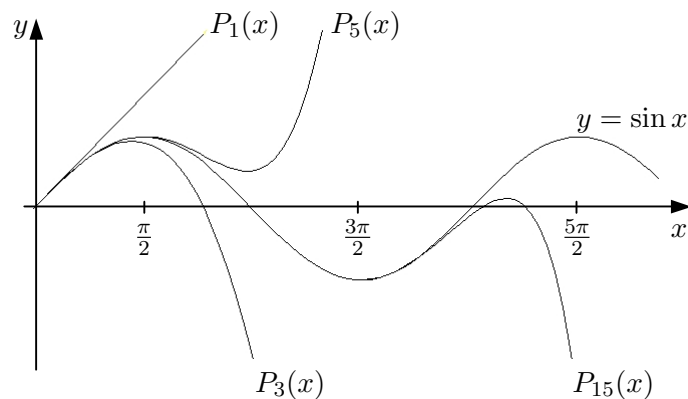
$$|e^x - P_n(x)| \leq \frac{M}{(n+1)!} |I|^{n+1}, \quad M := \sup_{x \in I} e^x.$$

Sei etwa $n = 5$ und wähle

a) $I = (-1, 1)$. Dann gilt $|e^x - P_5(x)| \leq \frac{e}{720} \cdot 2^6 = 0.0034$,

b) $I = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, so gilt $|e^x - P_5(x)| \leq \frac{\sqrt{e}}{720} = 0.000036$.

- (2) TAYLOR-Polynome sind hervorragend für lokale Approximation geeignet, nicht aber für globale. Betrachte beispielsweise die TAYLOR-Polynome von $f(x) = \sin x$ in $a = 0$:



Sehr suggestiv ist auch die Schreibweise

$$\begin{aligned} f(x + \Delta x) &= f(x) + f'(x) \Delta x + \frac{f''(x)}{2!} (\Delta x)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x)}{n!} (\Delta x)^n + \frac{f^{(n+1)}(x + \theta \Delta x)}{(n+1)!} (\Delta x)^{n+1} \end{aligned}$$

mit einem $\theta \in (0, 1)$. Hier übernimmt $x + \Delta x$ die Rolle von x , x die Rolle von a und $x + \theta \Delta x$ die Rolle von ξ in der ursprünglichen Fassung aus Satz 5.15.

TAYLOR-Polynome mit Entwicklungspunkt $a = 0$ werden manchmal **MACLAURIN⁸-Polynome** genannt.

Wir holen jetzt den ausstehenden Beweis des letzten Abschnitts nach.

⁸Colin MACLAURIN (1698 - 1726), schottischer Mathematiker. Beiträge zur theoretischen Geodäsie, Geophysik. Untersuchte die theoretische Erdfigur, definierte *Trisektrix* (ermöglicht Drittelung beliebiger Winkel).

Beweis von Satz 5.14. Nach Satz 5.15 haben wir mit $n = 1$

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(\xi)}{2}(x - a)^2.$$

Wegen $f'(a) = 0$ ergibt dies $f(x) = f(a) + \frac{f''(\xi)}{2}(x - a)^2$. Ist nun $f''(a) > 0$, so ist $f''(\xi) > 0$ für alle ξ , die hinreichend nahe bei a liegen, und damit auch für alle x hinreichend nahe bei a . Für diese x gilt also $f(x) \geq f(a)$, d. h. in a liegt ein lokales Minimum vor. Analog erhalten wir ein lokales Maximum im Falle $f''(a) < 0$. \square

Satz 5.16 (TAYLORSche Formel mit Restglied von PEANO⁹). Sei $f: U_\varepsilon(a) \rightarrow \mathbb{R}$, $f \in \mathcal{C}^{n-1}(U_\varepsilon(a))$, und möge $f^{(n)}(a)$ existieren. Für $x \rightarrow a$ gilt dann

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x - a)^k + \mathcal{O}((x - a)^n).$$

Beweis. Wir betrachten die durch

$$g(x) := f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x - a)^k$$

definierte Funktion. Es gilt $g(a) = g'(a) = \dots = g^{(n)}(a) = 0$. Wir wissen, dass f und damit auch g in \mathcal{C}^{n-1} in einer Umgebung von a sind. Satz 5.15 mit $n - 2$ liefert also

$$g(x) = \sum_{k=0}^{n-2} \frac{g^{(k)}(a)}{k!} (x - a)^k + \frac{g^{(n-1)}(\xi)}{(n-1)!} (x - a)^{n-1} = \frac{g^{(n-1)}(\xi)}{(n-1)!} (x - a)^{n-1},$$

und da $g^{(n-1)}$ differenzierbar ist, entspricht letzteres gerade (verwende Definition 5.1)

$$\frac{g^{(n-1)}(a) + g^{(n)}(a)(x - a) + \mathcal{O}(\xi - a)}{(n-1)!} (x - a)^{n-1} = \frac{\mathcal{O}(\xi - a)}{(n-1)!} (x - a)^{n-1} = \mathcal{O}((\xi - a)^n),$$

da ξ zwischen a und x liegt. \square

⁹Giuseppe PEANO (1858 - 1932), italienischer Mathematiker. Logik, Axiomatik der natürlichen Zahlen (PEANO-Axiome), Differentialgleichungen erster Ordnung.

Was passiert im Grenzwert $n \rightarrow \infty$? Wir betrachten die TAYLOR-Reihe von f in a :

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \dots$$

Diese Reihe können wir bloß für unendlich oft differenzierbare Funktionen aufschreiben. Sei also $f \in C^\infty$ in einer Umgebung von a . Dann ergeben sich zwei Fragen:

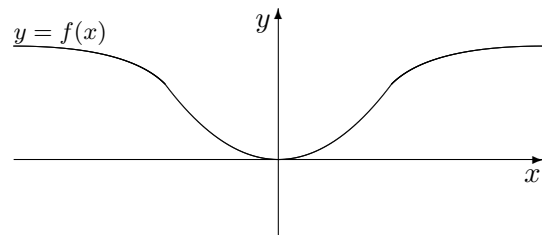
1. Konvergiert die TAYLOR-Reihe?
2. Was ist gegebenenfalls ihre Summe?

Wir erwarten, dass sie gleich $f(x)$ ist. Das ist leider nicht notwendigerweise so.

Beispiel 5.12. Wir betrachten $f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & : x \neq 0, \\ 0 & : x = 0. \end{cases}$

Es gilt $f \in C^\infty(\mathbb{R})$. Dass $f \in C^\infty(\mathbb{R} \setminus \{0\})$ gilt, ist klar. Wir müssen dies also nur noch für $x = 0$ untersuchen. Es ist

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-1/x^2}}{x} \quad \left(= \frac{0}{0} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-1/x^2} \cdot 2x^{-3}}{1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^{-1/x^2}}{x^3} = ? \end{aligned}$$



Dies führt also zu nichts. Besser ist es, vor Anwendung der Regel von DE L'HÔPITAL eine Substitution auszuführen:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-1/x^2}}{x} \stackrel{y:=\frac{1}{x}}{=} \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{e^{-y^2}}{\frac{1}{y}} = \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{y}{e^{y^2}} \quad \left(= \frac{\infty}{\infty} \right) \\ &= \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{1}{e^{y^2} \cdot 2y} = 0. \end{aligned}$$

Also ist f in 0 differenzierbar mit $f'(0) = 0$. Des weiteren gilt

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^{-3} e^{-1/x^2} - 0}{x - 0} = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-1/x^2}}{x^4} \stackrel{y:=\frac{1}{x}}{=} 2 \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{y^4}{e^{y^2}} \\ &= 2 \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{4y^3}{e^{y^2} \cdot 2y} = 4 \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{y^2}{e^{y^2}} = 0, \end{aligned}$$

d. h. f ist in 0 zweimal differenzierbar, $f''(0) = 0$. Insgesamt kann man zeigen, dass f in 0 beliebig oft differenzierbar ist und sämtliche Ableitungen dort 0 sind. Die TAYLOR-Reihe von f in 0 ist also

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = 0 + 0x + \frac{0}{2!} x^2 + \frac{0}{3!} x^3 + \dots$$

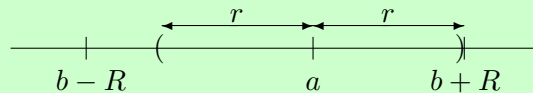
Sie konvergiert für alle $x \in \mathbb{R}$, hat aber die Summe 0 und nicht $f(x)$.

In der Funktionentheorie wird gezeigt:

Satz 5.17 (über Konvergenz der TAYLOR-Reihe, WEIERSTRASS). Sei $\sum_{k=0}^{\infty} b_k (x - b)^k$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $R > 0$ und sei $f(x)$ mit $x \in (b - R, b + R)$ ihre Summe. Dann gilt:

i) f ist in $(b - R, b + R)$ unendlich oft differenzierbar.

ii) Für beliebiges $a \in (b - R, b + R)$ konvergiert die TAYLOR-Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x - a)^k$ für $x \in (a - r, a + r)$ mit $r = \min(a - (b - R), b + R - a)$.



iii) Es gilt $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x - a)^k$ für $x \in (a - r, a + r)$.

Wendet man dies auf $a = b$ an, so folgt

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k (x - a)^k \implies f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x - a)^k \implies b_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}.$$

Beispiel 5.13. TAYLOR-Reihe von e^x in $x = a$.

$$\begin{aligned} e^x &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{d}{dx} e^x \right) (a) \frac{1}{k!} (x - a)^k \quad (\text{Satz 5.17 mit } b = 0, R = \infty \text{ anwenden}) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^a}{k!} (x - a)^k. \end{aligned}$$

Anders: $e^x = e^a e^{x-a} = e^a \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x-a)^k}{k!}$.

Die Berechnung von TAYLOR-Reihen per Definition, d. h. über $f'(a)$, $f''(a)$, usw. ist oftmals ungünstig. Man geht daher meist anders vor. In vielen Fällen reicht das Folgende:

Satz 5.18 (Rechnen mit Potenzreihen).

i) Ist $f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} f_j x^j$, $|x| < R$, und $g(x) = \sum_{j=0}^{\infty} g_j x^j$, $|x| < r$, so gilt

$$f(x) \pm g(x) = \sum_{j=0}^{\infty} (f_j \pm g_j) x^j, \quad |x| < \min(R, r)$$

und

$$f(x) g(x) = \left(\sum_{j=0}^{\infty} f_j x^j \right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} g_k x^k \right), \quad |x| < \min(R, r)$$

(durch Ausmultiplizieren und Ordnen nach Potenzen).

ii) Sind $f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} f_j x^j$, $g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} g_k x^k$ ($g(0) = 0$), und haben beide Reihen positive Konvergenzradien, so ergibt sich die Reihe für $f(g(x))$ in $x = 0$ durch formales Einsetzen der Reihe für g in die Reihe für f .

Beispiel 5.14. (1) Es gilt

$$\begin{aligned} e^x \sin x &= \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \cdots \right) \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} \mp \cdots \right) \\ &= \begin{array}{ccccccc} x & & -\frac{x^3}{6} & & +\frac{x^5}{120} & & \mp \cdots \\ & +x^2 & & -\frac{x^4}{6} & & +\frac{x^6}{120} & \mp \cdots \\ & & +\frac{x^3}{2} & & -\frac{x^5}{12} & & \pm \cdots \\ & & & +\frac{x^4}{6} & & -\frac{x^6}{36} & \pm \cdots \end{array} \\ &= x + x^2 + \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{30} + \mathcal{O}(x^6). \end{aligned}$$

(2) Für $|x| < 1$ gilt

$$(1-x)(1+x+x^2+\cdots) = (1+x+x^2+\cdots) - (x+x^2+x^3+\cdots) = 1,$$

also ist $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots$.

(3) Es gilt

$$\begin{aligned} e^{\sin x} &= 1 + \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} \mp \dots \right) + \frac{\left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} \mp \dots \right)^2}{2!} + \dots \\ &= 1 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} + \mathcal{O}(x^5). \end{aligned}$$

Einige wichtige TAYLOR-Reihen:

1. $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots, \quad x \in \mathbb{R},$
2. $\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \mp \dots, \quad x \in \mathbb{R},$
3. $\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \mp \dots, \quad x \in \mathbb{R},$
4. $\sinh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots, \quad x \in \mathbb{R},$
5. $\cosh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots, \quad x \in \mathbb{R},$
6. $\log(1-x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-x^n}{n} = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \dots, \quad -1 \leq x < 1,$
7. $(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n = 1 + \alpha x + \binom{\alpha}{2} x^2 + \binom{\alpha}{3} x^3 + \dots, \quad |x| < 1, \alpha \in \mathbb{R}.$

Zu 6. Ersetzt man $-x$ durch x , so erhält man die Potenzreihe

$$\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \pm \dots, \quad -1 < x \leq 1.$$

Zu 7. Man setzt

$$\binom{\alpha}{n} := \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}, \quad \binom{\alpha}{0} := 1.$$

Für $\alpha \in \{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\}$ bekommt man

$$(1+x)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{1/2}{n} x^n = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} \mp \dots,$$

$$(1+x)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{1+x}} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-1/2}{n} x^n = 1 - \frac{x}{2} + \frac{3x^2}{8} - \frac{5x^3}{16} \pm \dots.$$

Ersetzt man darin x durch $-x$, so bekommt man die Reihen für $\sqrt{1-x}$ bzw. für $\frac{1}{\sqrt{1-x}}$. Ist $\alpha \in \mathbb{N}$, so bricht die Reihe mit dem $(\alpha+1)$ -ten Glied, wegen $\binom{\alpha}{\alpha+k} = 0$ für $k \in \mathbb{N}$, ab. Man erhält also den binomischen Satz.

Definition 5.10. Seien $G \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f: G \rightarrow \mathbb{R}^1$. Falls $\frac{\partial f}{\partial x_k}$ in G existiert und in $a \in G$ nach x_j partiell differenzierbar ist, so bezeichnet man die letzte partielle Ableitung mit

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k} \right)(a) = \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_k} f \right)(a) = \left. \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k} \right|_{x=a} = f_{x_k x_j}(a) = (D_k D_j f)(a) = \dots$$

und sagt, dass f in a die **zweite partielle Ableitung** nach x_k und dann nach x_j hat. Analog definiert man $\left(\frac{\partial^3 f}{\partial x_\ell \partial x_j \partial x_k} \right)(a)$ usw. Man nennt dies **partielle Ableitungen höherer Ordnung**, wobei die **Ordnung** die Zahl der auftretenden Ableitungen meint.

Mit $\mathcal{C}^m(G)$ bezeichnet man die Menge aller Funktionen $f: G \rightarrow \mathbb{R}^1$, für die alle partiellen Ableitungen bis einschließlich der Ordnung m existieren und stetig sind.

Beispiel 5.15. I. A. gilt $\left(\frac{\partial f}{\partial x_j \partial x_k} \right)(a) \neq \left(\frac{\partial f}{\partial x_k \partial x_j} \right)(a)$. Beispielsweise für

$$f(x, y) = \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & : (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & : (x, y) = (0, 0), \end{cases}$$

ergibt sich

$$\begin{aligned} f_x(x, y) &= y \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} + x y \frac{2x(x^2 + y^2) - 2x(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2} \\ &= y \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} + \frac{4x^2 y^2}{(x^2 + y^2)^2} \text{ für } (x, y) \neq (0, 0), \\ f_x(0, 0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{x - 0} = 0, \\ f_{xy}(0, 0) &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f_x(0, y) - f_x(0, 0)}{y - 0} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{-y}{y} = -1. \end{aligned}$$

Analog zeigt man $f_{yx}(0, 0) = +1$.

Satz 5.19 (über die Gleichheit gemischter partieller Ableitungen, SCHWARZ¹⁰). Für $f \in \mathcal{C}^2(G)$ ist

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k} \right)(a) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j} \right)(a).$$

Allgemeiner ist für $f \in \mathcal{C}^m(G)$ beim Bilden der partiellen Ableitungen bis zu Ordnung einschließlich m die Reihenfolge der Differentiation belanglos.

Satz 5.20 (TAYLORSche Formel für Funktionen zweier Veränderlicher). Sei $G \subset \mathbb{R}^2$ offen und sei $f \in \mathcal{C}^{m+1}(G)$. Sind $(a, b), (x, y) \in G$ und liegt die Strecke zwischen (a, b) und (x, y) ganz in G , so gilt

$$f(x, y) = \sum_{j+k \leq m} \frac{1}{j! k!} \left(\frac{\partial^{j+k} f}{\partial x^j \partial y^k} \right)(a, b) (x - a)^j (y - b)^k + R(x, y)$$

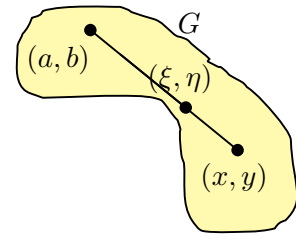
mit dem Restglied

$$R(x, y) := \sum_{j+k=m+1} \frac{1}{j! k!} \left(\frac{\partial^{j+k} f}{\partial x^j \partial y^k} \right)(\xi, \eta) (x - a)^j (y - b)^k,$$

wobei (ξ, η) auf der Strecke zwischen (a, b) und (x, y) liegt.

¹⁰Hermann Amandus SCHWARZ (1843 - 1921). Beschäftigte sich insbesondere mit Funktionentheorie, Arbeiten zur hypergeometrischen Differentialgleichung.

Dabei ist $\frac{\partial^{j+k} f}{\partial x^j \partial y^k} := \frac{\partial^{j+k} f}{\underbrace{\partial x \cdots \partial x}_{j \text{ mal}} \underbrace{\partial y \cdots \partial y}_{k \text{ mal}}}$.



Beweis. Wende Satz 5.15 auf $g(t) := f(a+t(x-a), b+t(y-b))$ an. \square

Die TAYLORSche Formel lautet für

$$m = 0: \quad f(x, y) = f(a, b) + f_x(\xi, \eta)(x - a) + f_y(\xi, \eta)(y - b),$$

$$m = 1: \quad f(x, y) = f(a, b) + f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b) \\ + \frac{1}{2}f_{xx}(\xi, \eta)(x - a)^2 + f_{xy}(\xi, \eta)(x - a)(y - b) + \frac{1}{2}f_{yy}(\xi, \eta)(y - b)^2,$$

$$m = 2: \quad f(x, y) = f(a, b) + f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b) + \frac{1}{2}f_{xx}(a, b)(x - a)^2 \\ + f_{xy}(a, b)(x - a)(y - b) + \frac{1}{2}f_{yy}(a, b)(y - b)^2 + \frac{1}{6}f_{xxx}(\xi, \eta)(x - a)^3 \\ + \frac{1}{2}f_{xxy}(\xi, \eta)(x - a)^2(y - b) + \frac{1}{2}f_{xyy}(\xi, \eta)(x - a)(y - b)^2 \\ + \frac{1}{6}f_{yyy}(\xi, \eta)(y - b)^3.$$

Definition 5.11. Ein Element $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}_+^n := (\mathbb{Z}_+)^n$ heißt **Multi-Index** und man setzt

$$|\alpha| := \alpha_1 + \dots + \alpha_n, \quad \alpha! := \alpha_1! \cdots \alpha_n!, \\ D^\alpha := \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \right)^{\alpha_1} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial x_n} \right)^{\alpha_n} = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

Für $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ und $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ definiert man

$$x^\alpha := x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}.$$

Beispiel 5.16. Für $\alpha = (3, 2) \in \mathbb{Z}_+^2$ gilt

$$\frac{1}{(3, 2)!} (D^{(3,2)} f)(x, y) (x, y)^{(3,2)} = \frac{1}{3!2!} \left[\left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^2 \left(\frac{\partial}{\partial y} \right)^2 \right] (x, y) x^3 y^2.$$

Satz 5.21 (TAYLORSche Formel für Funktionen mehrerer Veränderlicher). *Seien $G \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f \in \mathcal{C}^{m+1}(G)$ und $a, x \in G$ mit der Eigenschaft, dass die Strecke zwischen a und x ganz zu G gehört. Dann gilt*

$$f(x) = \sum_{|\alpha| \leq m} \frac{(D^\alpha f)(a)}{\alpha!} (x-a)^\alpha + \sum_{|\alpha|=m+1} \frac{(D^\alpha f)(\xi)}{\alpha!} (x-a)^\alpha$$

mit ξ auf der Strecke zwischen a und x .

Der Beweis gelingt ebenfalls mittels Satz 5.15.

Definition 5.12. *Sei $f: (G \subset \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}^1$ eine Funktion, deren partielle Ableitungen zweiter Ordnung existieren mögen. Für $a \in G$ heißt dann die Matrix*

$$[f''(a)] := \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}(a) \right)_{j,k=1}^n = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(a) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_n}(a) \end{pmatrix}$$

die **HESSE**¹¹-Matrix von f in a .

Aus Satz 5.19 folgt sofort, dass für $f \in \mathcal{C}^2(G)$ die Matrix $[f''(a)]$ symmetrisch ist. Setzen wir noch

$$[f'(a)] := \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a) \quad \cdots \quad \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \right) \quad \text{und} \quad x - a := \begin{pmatrix} x_1 - a_1 \\ \vdots \\ x_n - a_n \end{pmatrix},$$

so lautet der Anfang der TAYLOR-Reihe von f in a

¹¹Otto HESSE (1811 - 1874). Befasste sich v.a. mit analytischer Geometrie und Determinanten. Einführung der HESSE-Matrix und der HESSESchen Normalform der Ebenengleichung.

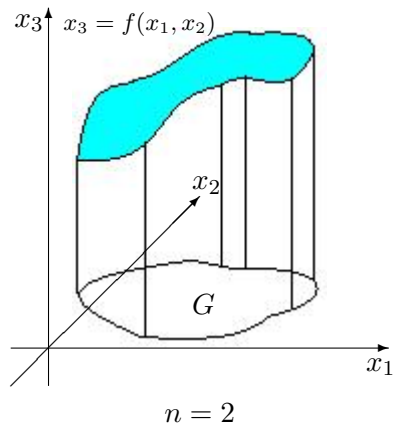
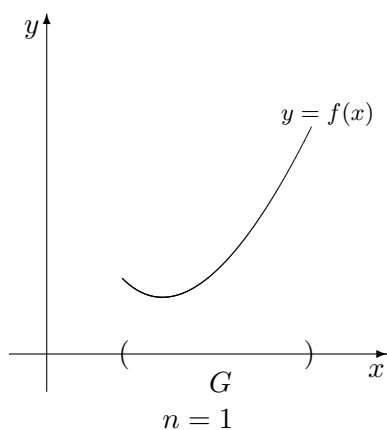
$$\begin{aligned}
f(x) &= f(a) + [f'(a)](x-a) + \frac{1}{2}(x-a)^\top [f''(a)](x-a) + \dots \\
&= f(a) + \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a) \quad \dots \quad \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \right) \begin{pmatrix} x_1 - a_1 \\ \vdots \\ x_n - a_n \end{pmatrix} \\
&\quad + \frac{1}{2} \underbrace{\left(x_1 - a_1 \quad \dots \quad x_n - a_n \right) \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(a) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(a) \\ \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_n}(a) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 - a_1 \\ \vdots \\ x_n - a_n \end{pmatrix}}_{=:Q} \\
&\quad + \dots
\end{aligned}$$

wobei gilt:

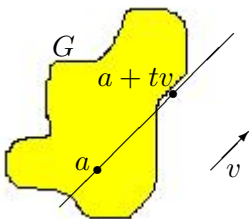
$$\begin{aligned}
Q &= \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}(a) (x_j - a_j) (x_k - a_k) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2}(a) (x_j - a_j)^2 + \sum_{j < k} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}(a) (x_j - a_j) (x_k - a_k).
\end{aligned}$$

5.7 Skalarfelder

Skalarfelder können wir uns für $n \in \{1, 2\}$ so vorstellen:



Für $n = 3$ stellt man sich z. B. ein Temperaturfeld vor: Jedem Punkt den $x \in \mathbb{R}^3$ wird eine Temperatur $T(x)$ zugeordnet.



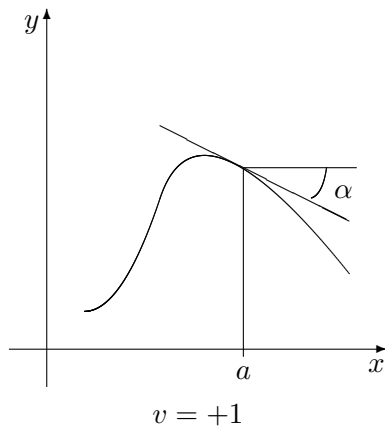
Seien $f: G \rightarrow \mathbb{R}^1$ ein Skalarfeld, $a \in G$ sowie $v \in \mathbb{R}^n$ ein Vektor mit $\|v\| = 1$. Für $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ ist auch $a + tv \in G$.

Definition 5.13. Wenn die Abbildung $(-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^1$, $t \mapsto f(a + tv)$, in $t = 0$ differenzierbar ist, so heißt

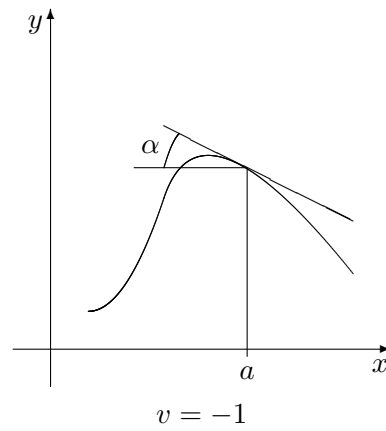
$$\left. \frac{d}{dt} f(a + tv) \right|_{t=0}$$

Ableitung von f in a in Richtung v und wird mit $\frac{\partial f}{\partial v}(a) = (\partial_v f)(a)$ etc. bezeichnet.

Für $n = 1$ bedeutet das

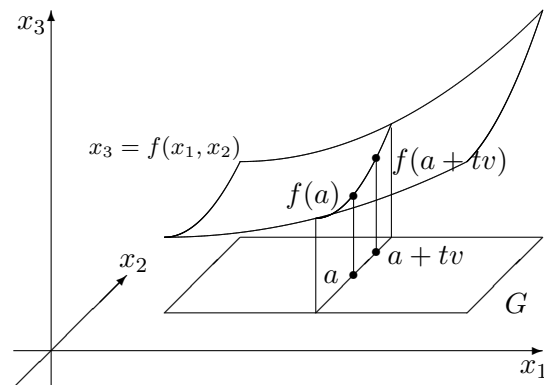


$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial v}(a) &= \left. \frac{d}{dt} f(a+t) \right|_{t=0} \\ &= f'(a+t) \Big|_{t=0} = f'(a) \\ &= \tan \alpha \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial v}(a) &= \left. \frac{d}{dt} f(a-t) \right|_{t=0} \\ &= f'(a-t)(-1) \Big|_{t=0} = -f'(a) \\ &= -\tan \alpha. \end{aligned}$$

Für $n = 2$ ist $\frac{\partial f}{\partial v}(a)$ der Anstieg längs des eingezeichneten Weges auf der Fläche $f(x_1, x_2)$ in Richtung v .



Beispiel 5.17. Für $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^1$, $f(x, y) = x^2 + 3y$ sowie $a = (0, 0)$ und $v = (v_1, v_2)$ ist

$$\frac{\partial f}{\partial v}(0, 0) = \left. \frac{d}{dt} \underbrace{((0 + tv_1)^2 + 3(0 + tv_2))}_{=f(0+tv_1, 0+tv_2)} \right|_{t=0} = (2v_1 t + 3v_2) \Big|_{t=0} = 3v_2.$$

Satz 5.22. Ist $f: G \rightarrow \mathbb{R}^1$ in $a \in G$ differenzierbar, so gilt

$$\frac{\partial f}{\partial v}(a) = \langle \text{grad } f(a), v \rangle = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) v_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) v_n.$$

Dabei ist $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das Standard-Skalarprodukt.

Beweis.

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial v}(a) &= \left. \frac{d}{dt} f(a + tv) \right|_{t=0} = \left. \frac{d}{dt} f(a + tv_1, \dots, a_n + tv_n) \right|_{t=0} \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a + tv) v_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(a + tv) v_n \right) \Big|_{t=0} = \langle \text{grad } f(a), v \rangle. \end{aligned}$$

□

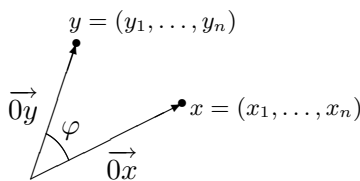
Für das Beispiel 5.17 bedeutet das

$$\frac{\partial f}{\partial v}(0, 0) = \langle (2x, 3) \Big|_{(0,0)}, (v_1, v_2) \rangle = \langle (0, 3), (v_1, v_2) \rangle = 3v_2.$$

Satz 5.23 (CAUCHY-SCHWARZsche Ungleichung). Für $x = (x_1, \dots, x_n)$ und $y = (y_1, \dots, y_n)$ aus \mathbb{R}^n gilt

$$(x_1 y_1 + \dots + x_n y_n)^2 \leq (x_1^2 + \dots + x_n^2)(y_1^2 + \dots + y_n^2)$$

mit Gleichheit genau dann, wenn x und y (oder besser die Ortsvektoren $\vec{0x}$ und $\vec{0y}$) parallel sind.



Parallelität von $\vec{0x}$ und $\vec{0y}$ meint:

$$\begin{aligned} \vec{0x} \parallel \vec{0y} &\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} : \vec{0x} = \lambda \vec{0y} \text{ oder } \vec{0y} = \lambda \vec{0x} \\ &\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} : x_j = \lambda y_j \quad \forall j \text{ oder } y_j = \lambda x_j \quad \forall j. \end{aligned}$$

Beweis. Anschaulich: Es gilt $x_1 y_1 + \dots + x_n y_n = \langle x, y \rangle = \|x\| \|y\| \cos \varphi$, wobei φ den von $\vec{0x}$ und $\vec{0y}$ eingeschlossenen Winkel bezeichnet. Damit ist

$$\langle x, y \rangle^2 = \|x\|^2 \|y\|^2 \cos^2 \varphi \leq \|x\|^2 \|y\|^2$$

wegen $0 \leq \cos^2 \varphi \leq 1$.

Rechnerisch: Es gilt

$$\begin{aligned} \sum_{j < k} (x_j y_k - x_k y_j)^2 \geq 0 &\implies \sum_{j < k} (x_j^2 y_k^2 + x_k^2 y_j^2) \geq 2 \sum_{j < k} x_j y_j x_k y_k \\ &\implies \sum_{j=1}^n x_j^2 y_j^2 + \sum_{j \neq k} x_j^2 y_k^2 \geq \sum_{j=1}^n x_j^2 y_j^2 + \sum_{j \neq k} x_j y_j x_k y_k \\ &\implies \left(\sum_{j=1}^n x_j^2 y_j^2 \right) \left(\sum_{k=1}^n x_k^2 y_k^2 \right) \geq \left(\sum_{j=1}^n x_j y_j \right) \left(\sum_{k=1}^n x_k y_k \right) \end{aligned}$$

Der Gleichheitsfall ist beim anschaulichen Beweis klar. Beim rechnerischen erfordert er eine kleine Zusatzüberlegung. \square

Satz 5.24. Seien $f: (G \subset \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}^1$ in $a \in G$ differenzierbar und $v \in \mathbb{R}^n$ ein Vektor. Dann gilt

$$\text{grad } f(a) = 0 \implies \frac{\partial f}{\partial v}(a) = 0 \quad \forall v \in \mathbb{R}^n,$$

$$\text{grad } f(a) \neq 0 \implies \frac{\partial f}{\partial v}(a) \text{ wird maximal genau für } v = \frac{\text{grad } f(a)}{\|\text{grad } f(a)\|},$$

$$\text{grad } f(a) \neq 0 \implies \frac{\partial f}{\partial v}(a) \text{ wird minimal genau für } v = -\frac{\text{grad } f(a)}{\|\text{grad } f(a)\|}.$$

Mit anderen Worten: Der Gradient zeigt stets in die Richtung des steilsten Anstiegs.

Beweis. Satz 5.22 liefert $\frac{\partial f}{\partial v}(a) = 0$ für $\text{grad } f(a) = 0$. Sei also $\text{grad } f(a) \neq 0$. Nach Satz 5.23 ist

$$\left| \frac{\partial f}{\partial v}(a) \right| = |\langle \text{grad } f(a), v \rangle| \leq \|\text{grad } f(a)\| \|v\| = \|\text{grad } f(a)\|.$$

Letzteres gilt wegen $\|v\| = 1$. Gleichheit tritt genau für $\text{grad } f(a) = \lambda v$ oder $v = \lambda \text{grad } f(a)$ für ein $\lambda \in \mathbb{R}$ ein.

Im ersten Fall ist $\|\text{grad } f(a)\| = |\lambda| \|v\| = |\lambda|$, d. h. $\lambda = +\|\text{grad } f(a)\|$ oder $\lambda = -\|\text{grad } f(a)\|$. Für $\lambda = +\|\text{grad } f(a)\|$ ist

$$v = \frac{\text{grad } f(a)}{\lambda} = \frac{\text{grad } f(a)}{\|\text{grad } f(a)\|},$$

und für $\lambda = -\|\text{grad } f(a)\|$ ist dann

$$v = -\frac{\text{grad } f(a)}{\|\text{grad } f(a)\|}.$$

Im zweiten Fall haben wir $1 = \|v\| = |\lambda| \|\text{grad } f(a)\|$, d. h. $\lambda = +\frac{1}{\|\text{grad } f(a)\|}$ oder $\lambda = -\frac{1}{\|\text{grad } f(a)\|}$, woraus wieder $v = \frac{\text{grad } f(a)}{\|\text{grad } f(a)\|}$ folgt. Schließlich ist

$$\left\langle \text{grad } f(a), \frac{\text{grad } f(a)}{\|\text{grad } f(a)\|} \right\rangle = \frac{\|\text{grad } f(a)\|^2}{\|\text{grad } f(a)\|} = \|\text{grad } f(a)\|.$$

\square

Der Beweis zeigt, dass der Maximalwert von $\frac{\partial f}{\partial v}(a)$ gleich $\|\text{grad } f(a)\|$ und dessen Minimalwert gleich $-\|\text{grad } f(a)\|$ ist.

Definition 5.14. Seien $f: G \rightarrow \mathbb{R}^1$ und $a \in G$. Man sagt, dass f in a ein **lokales Minimum** bzw. ein **lokales Maximum** hat, wenn es eine offene Umgebung $U(a) \subset G$ gibt mit

$$f(a) \leq f(x) \quad \forall x \in U(a) \quad \text{bzw.} \quad f(a) \geq f(x) \quad \forall x \in U(a).$$

Wenn f in a differenzierbar ist und $\text{grad } f(a) = 0$ gilt, so heißt a **stationär** oder auch **kritischer Punkt** von f .

Satz 5.25. Ist $f: G \rightarrow \mathbb{R}^1$ in $a \in G$ differenzierbar und besitzt dort ein lokales Extremum, so ist $\text{grad } f(a) = 0$.

Beweis. Wir betrachten die durch $\varphi(t) := f(a_1, \dots, a_{j-1}, a_j + t, a_{j+1}, \dots, a_n)$ definierte Funktion. Diese hat für $t = 0$ ein lokales Extremum, weshalb

$$0 = \varphi'(0) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(a)$$

gilt. □

Definition 5.15. Eine Matrix $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n \in \mathbb{R}^{n \times n}$ heißt **positiv definit**, falls A symmetrisch ist und

$$x^\top A x > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$$

gilt.

Wir haben

$$x^\top A x = (x_1 \quad \dots \quad x_n) \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i x_j.$$

Aus der linearen Algebra ist bekannt, dass folgende Bedingungen äquivalent sind:

- i) A ist positiv definit.

- ii) $A = A^\top$ und alle Eigenwerte von A sind positiv.
 iii) Satz von SYLVESTER¹²: $A = A^\top$ und $\Delta_k > 0$ für alle k mit $1 \leq k \leq n$, wobei

$$\Delta_k := \det \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{pmatrix}.$$

Satz 5.26. Sei $f: (G \subset \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}^1$ aus $\mathcal{C}^2(G)$. Für $a \in G$ gilt dann:

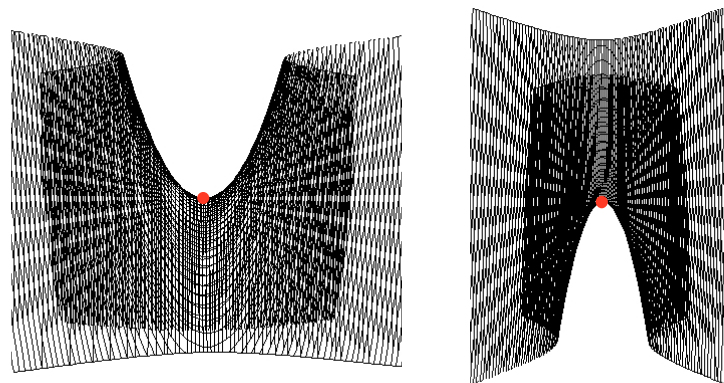
1. $\text{grad } f(a) = 0$ und $[f''(a)]$ positiv definit $\implies f$ hat in a ein lokales Minimum.
2. $\text{grad } f(a) = 0$ und $-[f''(a)]$ positiv definit $\implies f$ hat in a ein lokales Maximum.
3. $\text{grad } f(a) = 0$, $[f''(a)]$ hat sowohl positive als auch negative Eigenwerte $\implies f$ hat in a kein lokales Extremum.

Beweis. Mit Satz 5.21 (TAYLORSche Formel für Funktionen mehrerer Veränderlicher) ergibt sich

$$f(x) = f(a) + \underbrace{\text{grad } f(a)}_{=0} (x - a) + \frac{1}{2}(x - a)^\top [f''(\xi)] (x - a),$$

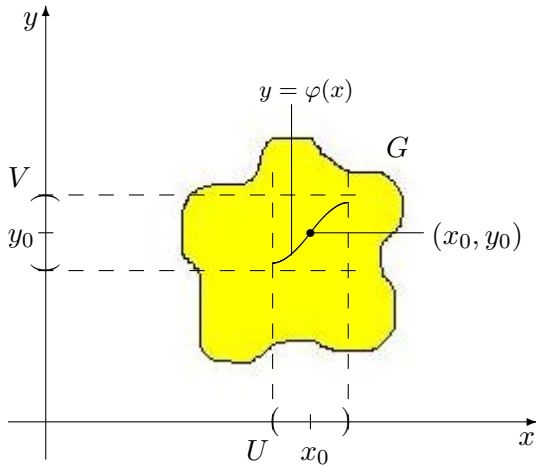
wobei ξ wie in Satz 5.21 gewählt ist. □

Punkt 3. aus Satz 5.26 liegt z. B. bei Sattelpunkten vor. Das Bild zeigt die Funktion $f(x, y) = x^2 - y^2$ aus zwei verschiedenen Richtungen. Der rot markierte Punkt $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ ist ein Sattelpunkt.



¹²James Joseph SYLVESTER (1814 - 1897), englischer Mathematiker. Erfinder geometrischer Instrumente. Theorie von Matrizen und Determinanten (zusammen mit Arthur CAYLEY). Auf ihn geht die Bezeichnung „Matrix“ zurück.

5.8 Implizite Funktionen

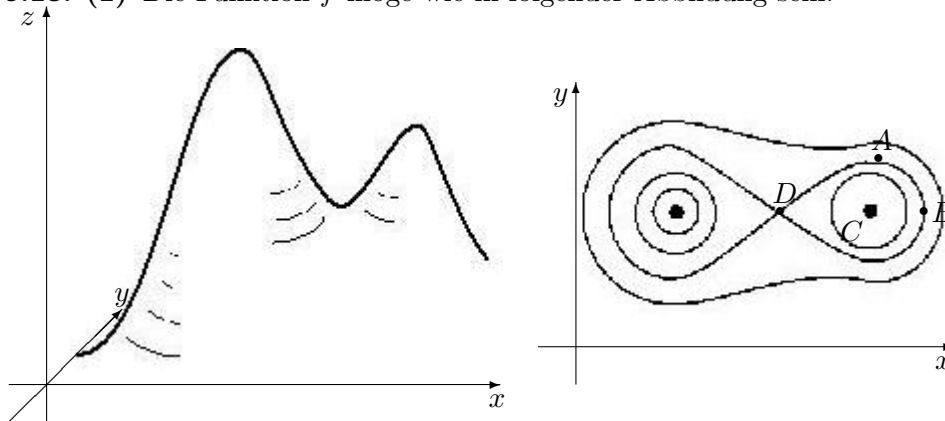


Gegeben sei eine Funktion $f: (G \subset \mathbb{R}^2) \rightarrow \mathbb{R}^1$ und ein Punkt $(x_0, y_0) \in G$ mit $f(x_0, y_0) = 0$. Sei ferner $f \in \mathcal{C}^k(G)$.

Frage: Kann man die Gleichung $f(x_0, y_0) = 0$ in einer Umgebung von (x_0, y_0) nach y auflösen? Genauer: Existieren offene Umgebungen U von x_0 und V von y_0 sowie eine \mathcal{C}^k -Funktion $\varphi: U \rightarrow V$ mit

$$U \times V \subset G, \quad \varphi(x_0) = y_0 \quad \text{und} \\ f(x, \varphi(x)) = 0 \quad \forall x \in U?$$

Beispiel 5.18. (1) Die Funktion f möge wie in folgender Abbildung sein:



Im Punkt A: $f(x, y) - c_1 = 0$, wobei c_1 die Höhe in $A = (x_0, y_0)$ bezeichnet. Diese Gleichung lässt sich in einer Umgebung von x_0 nach y auflösen, so dass y in einer Umgebung von y_0 liegt. Damit erhalten wir $y = \varphi(x)$, wobei φ glatt und eindeutig bestimmt ist.

Im Punkt B: $f(x, y) - c_1 = 0$ lässt sich rechts von x_0 nicht nach y auflösen.

Im Punkt C: $f(x, y) - c_2 = 0$, wobei c_2 die Höhe von $C = (x_0, y_0)$ meint, lässt sich für $x \neq x_0$ nicht nach y auflösen.

Im Punkt D: $f(x, y) - c_1 = 0$ besitzt überabzählbar viele Lösungen $y = \varphi(x)$ mit $x \in U, y \in V$ (genau vier stetige und genau zwei glatte Lösungen).

- (2) $f(x, y) = 3x + 2y - 1 = 0$ definiert implizit die Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $y = f(x) = \frac{1}{2}(1 - 3x)$.
- (3) $f(x, y) = e^y + y^3 + x^3 + x^2 - 1 = 0$. Die Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $y \mapsto e^y + y^3$, ist streng monoton wachsend und stetig. Für jedes $x \in \mathbb{R}$ gibt es also genau ein $y \in \mathbb{R}$ mit $e^y + y^3 = 1 - x^2 - x^3$, d. h. $f(x, y) = 0$. Wir erhalten so eine Funktion $y = \varphi(x)$, die sich jedoch nicht über elementare Funktionen explizit angeben lässt.
- (4) $f(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$. Ob und wie sich diese Gleichung in einer Umgebung von x_0 nach y auflösen lässt, hängt von der y_0 -Koordinate des Punktes (x_0, y_0) ab:

$$\begin{aligned} y_0 > 0: & \quad y = \sqrt{1 - x^2}, \\ y_0 < 0: & \quad y = -\sqrt{1 - x^2}, \\ y_0 = 0: & \quad \text{geht nicht.} \end{aligned}$$

Satz 5.27 (über implizite Funktionen von \mathbb{R}^1 nach \mathbb{R}^1). *Seien $G \subset \mathbb{R}^2$ offen, $f: G \rightarrow \mathbb{R}^1$ aus $\mathcal{C}^k(G)$ für $k \geq 1$ und $(x_0, y_0) \in G$ mit $f(x_0, y_0) = 0$. Ist $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$, so existieren offene Umgebungen U von x_0 und V von y_0 sowie eine \mathcal{C}^k -Funktion $\varphi: U \rightarrow V$ mit*

$$U \times V \subset G, \quad \varphi(x_0) = y_0, \quad f(x, \varphi(x)) = 0 \quad \forall x \in U.$$

Die Funktion φ ist eindeutig bestimmt in folgendem Sinne: Sind $\varphi_1: U_1 \rightarrow V_1$ und $\varphi_2: U_2 \rightarrow V_2$ zwei Funktionen mit obigen Eigenschaften, so gilt $\varphi_1|_{U_1 \cap U_2} = \varphi_2|_{U_1 \cap U_2}$.

Für das Beispiel 5.18 (2) gilt $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 2 \neq 0$.

Zusatz zu Satz 5.27.

$$f(x, \varphi(x)) = 0 \xrightarrow{\frac{\partial}{\partial x}} f_x \cdot 1 + f_y \cdot \varphi'(x) = 0 \iff \varphi'(x) = -\frac{f_x(x, \varphi(x))}{f_y(x, \varphi(x))}.$$

Zurück zum Beispiel 5.18 (3). Es gilt

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = (e^y + 3y^2)|_{(x_0, y_0)} > 0,$$

d. h. Satz 5.27 liefert die Existenz einer impliziten Funktion $y = \varphi(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ sowie deren Eindeutigkeit. Wir haben

$$\varphi'(x) = -\frac{3x^2 + 2x}{e^y + 3y^2} \quad \text{mit } y = \varphi(x)$$

nach dem Zusatz zu Satz 5.27. Es gilt $\varphi'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ oder $x = -\frac{2}{3}$. Des weiteren ist

$$\varphi'(x) = -\frac{(3x+2)x}{e^y+3y^2} \begin{cases} < 0 : & x < -\frac{2}{3}, \\ > 0 : & -\frac{2}{3} < x < 0, \\ < 0 : & x > 0. \end{cases}$$

In $x = 0$ liegt also ein lokales Maximum und in $x = -\frac{2}{3}$ ein lokales Minimum vor.

Nochmals das Beispiel 5.18 (4). Für $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 2y_0 \neq 0$ geht alles gut, für $y_0 = 0$ indes nicht.

Beweisidee von Satz 5.27. Die TAYLOR-Entwicklung

$$f(x, y) = \underbrace{f(x_0, y_0)}_{=0} + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) + \dots = 0$$

lässt sich für $f_y(x_0, y_0) \neq 0$ eindeutig nach y auflösen.

Satz 5.28 (über implizite Funktionen von \mathbb{R}^n nach \mathbb{R}^m). Seien $G \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ offen, $f: G \rightarrow \mathbb{R}^m$ aus $C^k(G)$ für $k \geq 1$ und $(x_0, y_0) \in G$ (also $x_0 \in \mathbb{R}^n$ und $y_0 \in \mathbb{R}^m$) mit $f(x_0, y_0) = 0$, d. h. die Gleichungen

$$\begin{cases} f_1(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) = 0 \\ \vdots \\ f_m(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) = 0 \end{cases}$$

sind für $x = (x_1^0, \dots, x_n^0)$ und $y = (y_1^0, \dots, y_m^0)$ erfüllt. Gilt nun

$$\det \left(\frac{\partial f_i}{\partial y_j}(x_0, y_0) \right)_{i,j=1}^m \neq 0,$$

so existieren offene Umgebungen $U \subset \mathbb{R}^n$ von x_0 und $V \subset \mathbb{R}^m$ von y_0 sowie eine C^k -Funktion $\varphi: U \rightarrow V$ mit

$$U \times V \subset G, \quad \varphi(x_0) = y_0, \quad f(x, \varphi(x)) = 0 \quad \forall x \in U.$$

Die Funktion φ ist eindeutig bestimmt in folgendem Sinne: Sind $\varphi_1: U_1 \rightarrow V_1$ und $\varphi_2: U_2 \rightarrow V_2$ zwei Funktionen mit obigen Eigenschaften, so gilt $\varphi_1|_{U_1 \cap U_2} = \varphi_2|_{U_1 \cap U_2}$.

Beispiel 5.19. Sei $f(x, y, z) = x \cos y + y \cos z + z \cos x - 2 = 0$. Es gilt $f(0, 0, 2) = 0$. Wegen

$$\det\left(\frac{\partial f}{\partial z}(0, 0, 2)\right) = \frac{\partial f}{\partial z}(0, 0, 2) = (-y \sin z + \cos x)|_{(0,0,2)} = 1 \neq 0$$

ist $z = \varphi(x, y)$ in einer Umgebung von $(0, 0)$. Es ergibt sich

$$f(x, y, \varphi(x, y)) = 0 \quad (5.5)$$

und

$$\begin{aligned} (5.5) &\stackrel{\frac{\partial}{\partial x}}{\implies} f_x \cdot 1 + f_y \cdot 0 + f_z \cdot \varphi_x = 0 \\ &\iff \cos y - z \sin x + (-y \sin z + \cos x) \varphi_x = 0 \\ &\iff \varphi_x(x, y) = \frac{z \sin x - \cos y}{\cos x - y \sin z}; \end{aligned}$$

insbesondere gilt $\varphi_x(0, 0) = -1$.

$$\begin{aligned} (5.5) &\stackrel{\frac{\partial}{\partial y}}{\implies} f_x \cdot 0 + f_y \cdot 1 + f_z \cdot \varphi_y = 0 \\ &\iff -x \sin y + \cos z + (-y \sin z + \cos x) \varphi_y = 0 \\ &\iff \varphi_y(x, y) = \frac{x \sin y - \cos z}{\cos x - y \sin z}; \end{aligned}$$

insbesondere ist $\varphi_y(0, 0) = -\cos 2$. TAYLOR-Entwicklung liefert uns also

$$\begin{aligned} \varphi(x, y) &= \varphi(0, 0) + \varphi_x(0, 0)x + \varphi_y(0, 0)y + \mathcal{O}(x^2) + \mathcal{O}(xy) + \mathcal{O}(y^2) \\ &= 2 - x - \cos 2 \cdot y + \mathcal{O}(x^2) + \mathcal{O}(xy) + \mathcal{O}(y^2). \end{aligned}$$

Satz 5.29 (über die Umkehrfunktion). Seien $G \subset \mathbb{R}^n$ offen und $g: G \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine \mathcal{C}^k -Funktion, $k \geq 1$. Wenn für $x_0 \in G$ die Ableitung $g'(x_0)$ invertierbar ist ($\iff \det((Jg)(x_0)) \neq 0 \iff \det\left(\frac{\partial g_i}{\partial x_j}(x_0)\right)_{i,j=1}^n \neq 0$), so existieren eine Umgebung $V \subset G$ von x_0 und eine Umgebung U von $g(x_0)$ sowie eine \mathcal{C}^k -Funktion $\varphi: U \rightarrow V$ mit

$$g(\varphi(y)) = y \quad \forall y \in U, \quad \varphi(g(x)) = x \quad \forall x \in V.$$

Mit anderen Worten: Das Gleichungssystem

$$\begin{cases} g_1(x_1, \dots, x_n) = y_1 \\ \vdots \\ g_n(x_1, \dots, x_n) = y_n \end{cases}$$

lässt sich auflösen als

$$\begin{aligned} x_1 &= \varphi_1(y_1, \dots, y_n), \\ &\vdots \\ x_n &= \varphi_n(y_1, \dots, y_n), \end{aligned}$$

falls $\det \left(\frac{\partial g_i}{\partial x_j} \right)_{i,j=1}^n \neq 0$ gilt.

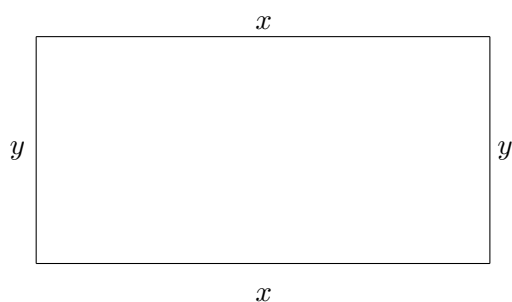
Beweis. Die Behauptung folgt aus Satz 5.28 mit $f(x, y) := g(x) - y$ und x als impliziter Funktion von y . \square

Wir betrachten noch **Extremwertaufgaben mit Nebenbedingungen**. Seien dazu $G \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge und

$$g, f_1, \dots, f_m: G \xrightarrow{C^1} \mathbb{R}^1.$$

Wir setzen $N := \{x \in G : f_i(x) = 0, 1 \leq i \leq m\}$. Gesucht werden lokale Maxima und Minima von g auf N .

Beispiel 5.20. (1) Von allen Rechtecken gegebenen Umfangs U ist das mit größtem Flächeninhalt gesucht.



$$g(x, y) = xy \rightarrow \max,$$

$$\text{Nebenbedingung: } 2(x + y) = U.$$

Aus der Nebenbedingung ergibt sich $y = \frac{U}{2} - x$. Setzt man dies in $g(x, y)$ ein, so wird

$$f(x) := x \left(\frac{U}{2} - x \right) \rightarrow \max.$$

Es folgt

$$f'(x) = \frac{U}{2} - 2x = 0 \iff x = \frac{U}{4}, \quad f''(x) = -2 < 0,$$

d. h. in $x = \frac{U}{4}$ liegt ein lokales Maximum vor. Die gesuchte Lösung ist mit $x = y = \frac{U}{4}$ das Quadrat.

(2) $g(x, y) = 2x + 4y \rightarrow \max$, Nebenbedingung: $f(x, y) = e^y + y^3 + x^3 + x^2 - 1 = 0$. Hier lässt sich die Nebenbedingung nicht so einfach nach einer Variablen auflösen.

Wir vermerken noch, dass dieses Problem nur für $m < n$ sinnvoll ist. Ansonsten erhält man für N typischerweise eine endliche oder gar die leere Menge.

Satz 5.30 (Multiplikatorenregel von LAGRANGE). Seien g, f_1, \dots, f_m wie oben und sei $m < n$. Wenn für jedes $x \in N$ die Vektoren $\text{grad } f_1(x), \dots, \text{grad } f_m(x)$ linear unabhängig sind und g auf N in $a \in N$ ein lokales Maximum bzw. Minimum hat, so gibt es $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ (die sogenannten **LAGRANGESchen Multiplikatoren**) mit

$$\text{grad } g(a) + \lambda_1 \text{grad } f_1(a) + \dots + \lambda_m \text{grad } f_m(a) = 0.$$

Wor kommt dies her? Wir betrachten den Fall $n = 2, m = 1$, also

$$g(x, y) \rightarrow \max / \min, \quad \text{Nebenbedingung: } f(x, y) = 0.$$

Die Nebenbedingung beschreibt eine Kurve in der Ebene und diese sei durch die Parameterdarstellung $x = x(t), y = y(t)$ gegeben. Wir haben also das Extremwertproblem

$$g(x(t), y(t)) \rightarrow \max / \min.$$

Es ergibt sich

$$\frac{d}{dt} g(x(t), y(t)) = g_x \dot{x} + g_y \dot{y} = 0,$$

d. h.

$$\langle (g_x, g_y), (\dot{x}, \dot{y}) \rangle = 0 \iff \text{grad } g \perp \text{Tangentialvektor.}$$

Wir haben außerdem $f(x(t), y(t)) = 0$, also

$$\frac{d}{dt} f(x(t), y(t)) = f_x \dot{x} + f_y \dot{y} = 0$$

und damit

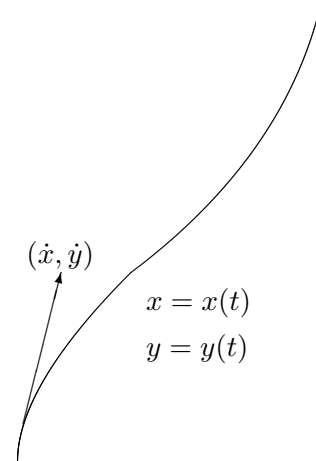
$$\langle (f_x, f_y), (\dot{x}, \dot{y}) \rangle = 0 \iff \text{grad } f \perp \text{Tangentialvektor.}$$

Insgesamt folgt

$$\text{grad } g \parallel \text{grad } f \implies \text{grad } g = \mu \text{grad } f, \mu \in \mathbb{R} \implies \text{grad } g + \lambda \text{grad } f = 0 \text{ für } \lambda := -\mu.$$

Dies funktioniert auch für allgemeines n und $m < n$.

Aus Satz 5.30 ergibt sich folgende Vorgehensweise für das Lösen von Extremwertaufgaben unter Nebenbedingungen.



1. Man bilde die Hilfsfunktion

$$\mathcal{L}(x_1, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_m) := g(x_1, \dots, x_n) + \sum_{i=1}^m \lambda_i f_i(x_1, \dots, x_n).$$

Dies ist eine Funktion von $n + m$ Veränderlichen.

2. Man bilde die $n + m$ partiellen Ableitungen von \mathcal{L} und setze diese gleich Null:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} = 0, \quad \dots, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_n} = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_1} = 0, \quad \dots, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_m} = 0.$$

Löse das entstandene Gleichungssystem in den $n + m$ Unbekannten $x_1, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_m$ zumindest in x_1, \dots, x_n .

3. In den Lösungen x_1, \dots, x_n aus 2. untersuche man, ob lokale Maxima oder Minima vorliegen.

Erläuterung zu Schritt 2:

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} = \frac{\partial g}{\partial x_1} + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \dots + \lambda_m \frac{\partial f_m}{\partial x_1} = 0 \\ \vdots \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_n} = \frac{\partial g}{\partial x_n} + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_n} + \dots + \lambda_m \frac{\partial f_m}{\partial x_n} = 0 \end{cases}$$

$$\iff \text{grad } g + \lambda_1 \text{grad } f_1 + \dots + \lambda_m \text{grad } f_m = 0$$

und

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_1} = f_1(x_1, \dots, x_n) = 0 \\ \vdots \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_m} = f_m(x_1, \dots, x_n) = 0 \end{cases} \iff \text{Nebenbedingungen.}$$

Nochmals Beispiel 5.20 (1). Die Hilfsfunktion ist $\mathcal{L}(x, y, \lambda) = xy + \lambda(2x + 2y - U)$. Das Gleichungssystem aus Schritt 2 ist

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = y + 2\lambda = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = x + 2\lambda = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = 2x + 2y - U = 0 \end{cases}$$

Daraus folgt unmittelbar $x = y$, dass also unter den gesuchten Rechtecken das Quadrat die Lösung sein muss. Eine rechnerische Überprüfung (Schritt 3), dass tatsächlich ein Maximum vorliegt, gelingt z. B. so: Sei $\delta > 0$. Mit $x = \frac{U}{4} + \delta$, $y = \frac{U}{4} - \delta$ ist die Nebenbedingung erfüllt und es gilt

$$xy = \frac{U^2}{16} - \delta^2 < \frac{U^2}{16}.$$

Daher ist die gefundene Lösung ein Maximum.

Nochmals das Beispiel 5.20 (2). Es ergibt sich $\mathcal{L}(x, y, \lambda) = 2x + 3y + \lambda(e^y + y^3 + x^3 + x^2 - 1)$ und damit

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 2 + \lambda(3x^2 + 2y) = 0 & (1) \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = 3 + \lambda(e^y + 3y^2) = 0 & (2) \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = -1 + e^y + y^3 + x^3 + y^2 = 0. \end{cases}$$

Es gilt

$$\begin{aligned} (1) &\iff \lambda = -\frac{2}{3x^2 + 2y}, \\ (2) &\iff \lambda = -\frac{3}{e^y + 3y^2}. \end{aligned}$$

Damit erhalten wir das Gleichungssystem

$$\begin{cases} e^y + y^3 + x^3 + x^2 - 1 = 0 \\ 2e^y + 6y^2 + 9x^2 - 6x = 0, \end{cases}$$

was der Computer in Null Komma Nix auf 20 Nachkommastellen genau löst.

Beispiel 5.21. Wie groß kann ein quaderförmiges Eigelb in einem Osterei sein? Oder anders: Man beschreibe einem Ellipsoid einen achsenparallelen Quader maximalen Volumens ein.

$$\text{Quadervolumen: } g(x, y, z) = (2x)(2y)(2z) = 8xyz \rightarrow \max,$$

$$\text{Nebenbedingung: } f(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0.$$

Die Hilfsfunktion lautet

$$\mathcal{L}(x, y, z, \lambda) = 8xyz + \lambda \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 \right)$$

und es gilt

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 8yz + \frac{2\lambda}{a^2}x = 0 &\iff -8xyz = 2\lambda \frac{x^2}{a^2}, \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = 8xz + \frac{2\lambda}{b^2}y = 0 &\iff -8xyz = 2\lambda \frac{y^2}{b^2}, \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z} = 8xy + \frac{2\lambda}{c^2}z = 0 &\iff -8xyz = 2\lambda \frac{z^2}{c^2}, \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0 & \end{aligned}$$

Wir erhalten also $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$. Setzt man dies in die Nebenbedingung ein, ergibt sich $x = \frac{a}{\sqrt{3}}$, $y = \frac{b}{\sqrt{3}}$ und $z = \frac{c}{\sqrt{3}}$. Das maximale Volumen ist also $g(x, y, z) = \frac{8}{3\sqrt{3}} abc$. Das Volumen des Ellipsoids ist $\frac{4\pi}{3} abc$. Unabhängig von den Halbachsen a , b und c ergibt sich also, dass der maximale Quader $\frac{2}{\sqrt{3}\pi} \approx 36.8\%$ des Gesamtvolumens einnimmt.

6

Das unbestimmte Integral

In diesem Kapitel sei stets $I = (a, b) \subset \mathbb{R}$ ein Intervall.

6.1 Die Stammfunktion

Definition 6.1. Sei $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Eine Funktion $F: I \rightarrow \mathbb{R}$ heißt **Stammfunktion** (oder auch **primitive Funktion**) von f , falls F in I differenzierbar ist und

$$F'(x) = f(x) \quad \forall x \in I$$

gilt.

Die Theorie der unbestimmten Integrale befasst sich also mit der Lösung der Differentialgleichung $y' = f$.

Beispiel 6.1. Die auf ganz \mathbb{R} definierten Funktionen $F_1(x) = \frac{1}{3}x^3$ und $F_2(x) = \frac{1}{3}x^3$ sind beide Stammfunktionen von $f(x) = x^2$.

Es entstehen u. a. folgende Fragen:

1. Existiert überhaupt eine Stammfunktion?

Ist beispielsweise $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 0 & x < 0, \\ 1 & x \geq 0, \end{cases}$ so besitzt F keine Stammfunktion F , wenn I die Null enthält. Denn $F'(0)$ würde nicht existieren, da F in $x = 0$ nicht glatt wäre.

2. Wenn eine Stammfunktion existiert, inwieweit ist sie dann eindeutig?
3. Wie bestimmt man im Existenzfall alle Stammfunktionen zu einer gegebenen Funktion?

Die erste Frage ist am schwierigsten zu beantworten. Damit beschäftigen wir uns später. Die zweite Frage erledigen wir gleich, und der dritten sei dieses Kapitel gewidmet.

Die Antwort auf Frage 2 liefert folgender Satz.

Satz 6.1. *Sind $F_1, F_2: I \rightarrow \mathbb{R}$ Stammfunktionen von $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, so gibt es eine reelle Konstante C mit*

$$F_2(x) = F_1(x) + C \quad \forall x \in I.$$

Beweis. Wir setzen $g(x) := F_2(x) - F_1(x)$. Für $[\alpha, \beta] \subset I$ ist dann g in (α, β) differenzierbar und auf $[\alpha, \beta]$ stetig. Der Mittelwertsatz der Differentialrechnung liefert

$$g(\beta) - g(\alpha) = g'(\xi)(\beta - \alpha) = 0$$

für ein $\xi \in (\alpha, \beta)$, d. h. g ist auf I konstant. □

Die Umkehrung dieses Satzes ist trivial.

Definition 6.2. *Die Menge aller Stammfunktionen einer Funktion $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ bezeichnet man mit*

$$\int f(x) dx$$

*und nennt sie das **unbestimmte Integral** von f auf I .*

Die Abhängigkeit des unbestimmten Integrals von I wird in der Bezeichnung unterdrückt. Außerdem ist das Symbol $\int f(x) dx$ an dieser Stelle noch durch nichts motiviert (dies wird erst bei der Behandlung bestimmter Integral plausibel). Daher hätten wir genauso gut $UB(f)$ oder \otimes_f nehmen können.

Besitzt $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ keine Stammfunktion, so gilt

$$\int f(x) dx = \emptyset.$$

Hat f anderenfalls eine Stammfunktion $F: I \rightarrow \mathbb{R}$, so ist

$$\int f(x) dx = \{F + C : C \in \mathbb{R}\},$$

wofür man kurz $\int f(x) dx = F(x) + C$ notiert.

6.2 Grundintegrale

Jede Differentiationsformel, z. B. $(\frac{x^{n+1}}{n+1})' = x^n$, liefert eine Formel für Integrale, hier also

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C.$$

Einige dieser Formeln für Integrale (die sogenannten **Grundintegrale**) sollte man sofort parat haben, was einem die durchaus lästige Suche in Integraltabellen erspart.

i) $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \alpha \neq -1.$

Der Integrationsbereich I ist dabei wie folgt von α abhängig:

$$\begin{aligned} \alpha \in \{0, 1, 2, 3, \dots\}: & \quad I \subset \mathbb{R} \text{ beliebig.} \\ \alpha \in \{-2, -3, -4, -5, \dots\}: & \quad I \subset (-\infty, 0) \text{ oder } I \subset (0, \infty), \\ \alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}: & \quad I \subset (0, \infty). \end{aligned}$$

ii) $\int \frac{1}{x} dx = \log |x| + C, x \neq 0.$

Es gilt

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x} dx &= \log x + C \quad \text{für } I \subset (0, \infty), \\ \int \frac{1}{x} dx &= \log(-x) + C \quad \text{für } I \subset (-\infty, 0). \end{aligned}$$

Statt $\int \frac{1}{x} dx$ und dergleichen schreibt man auch $\int \frac{dx}{x}$. Der Physiker schreibt oft auch $\int dx f(x)$.

iii) $\int e^{\alpha x} dx = \frac{e^{\alpha x}}{\alpha} + C, \alpha \neq 0.$

Daraus folgt sofort $\int a^x dx = \int e^{x \log a} dx = \frac{a^x}{\log a} + C$ für $a > 0, a \neq 1$.

iv) $\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C.$

v) $\int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2} \log \left| \frac{1+x}{1-x} \right| + C, |x| \neq 1.$

Es gilt

$$\frac{1}{2} \log \left| \frac{1+x}{1-x} \right| = \frac{1}{2} \log \frac{1+x}{x-1} \quad \text{für } I \subset (-\infty, -1),$$

$$\frac{1}{2} \log \left| \frac{1+x}{1-x} \right| = \frac{1}{2} \log \frac{1+x}{1-x} \quad \text{für } I \subset (-1, 1),$$

$$\frac{1}{2} \log \left| \frac{1+x}{1-x} \right| = \frac{1}{2} \log \frac{1+x}{x-1} \quad \text{für } I \subset (1, \infty).$$

$$\text{vi) } \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C, \quad |x| < 1.$$

Hingegen gilt

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \log|x + \sqrt{x^2-1}| + C, \quad |x| > 1,$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \log(x + \sqrt{1+x^2}) + C.$$

$$\text{vii) } \int \sin x \, dx = -\cos x + C, \quad \int \cos x \, dx = \sin x + C.$$

$$\text{viii) } \int \sinh x \, dx = \cosh x + C, \quad \int \cosh x \, dx = \sinh x + C.$$

6.3 Integrationsregeln

Linearität

Besitzen die Funktionen $f, g: I \rightarrow \mathbb{R}$ auf I eine Stammfunktion, so gilt trivialerweise

$$\begin{aligned}\int (f(x) + g(x)) \, dx &= \int f(x) \, dx + \int g(x) \, dx, \\ \int \alpha f(x) \, dx &= \alpha \int f(x) \, dx, \quad \alpha \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Beispiel 6.2. Das Grundintegral $\int \frac{dx}{1-x^2}$ ergibt sich nach der Partialbruchzerlegung

$$\frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} \right)$$

so:

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{1-x^2} &= \int \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} \right) dx = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{1-x} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{1+x} \\ &= -\frac{1}{2} \log |1-x| + \frac{1}{2} \log |1+x| + C.\end{aligned}$$

Variablensubstitution

Seien $J \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $g: J \rightarrow I$ differenzierbar und $f: I \rightarrow \mathbb{R}$. Es gilt

$$\int f(g(x)) g'(x) \, dx = F(g(x)) + C,$$

falls die Stammfunktion F von f existiert.

Beweis. Das ist die Umkehrung der Kettenregel. Differentiation der rechten Seite ergibt

$$(F(g(x)) + C)' = (F(g(x)))' = F'(g(x)) g'(x).$$

□

Man wendet diese Formel meist in der Form

$$\int f(g(x)) \, dg(x) = F(g(x)) + C$$

mit $g'(x) \, dx = dg(x)$ an.

Beispiel 6.3. (1) $\int e^{\sin x} \cos x \, dx = \int e^{\sin x} \, d \sin x = e^{\sin x} + C.$

$$(2) \int \frac{(\log x)^2}{x} dx = \int (\log x)^2 d \log x = \frac{(\log x)^3}{3} + C.$$

Oftmals ist es günstiger wie folgt vorzugehen, um das unbestimmte Integral $\int f(x) dx$ zu bestimmen.

1. Führe die Substitution $x = \varphi(t)$, $t = \psi(x)$ durch, also

$$\int f(\varphi(t)) d\varphi(t) = \int f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt =: \int h(t) dt.$$

2. Berechne $\int h(t) dt = H(t) + C$.

3. Mache die Substitution aus 1. mit $t = \psi(x)$ rückgängig:

$$H(t) + C = H(\psi(x)) + C.$$

Nochmals Beispiel 6.3 (1). Setze $t := \sin x \Leftrightarrow x = \arcsin t$. Wegen $\cos x = \sqrt{1 - x^2}$ folgt damit $\cos x = \sqrt{1 - t^2}$. Infolge $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$ gilt $dx = x' dt$, also

$$\int e^{\sin x} \cos x dx = \int e^t \sqrt{1 - t^2} \frac{dt}{\sqrt{1 - t^2}} = \int e^t dt = e^t + C = e^{\sin x} + C.$$

Nochmals Beispiel 6.3 (2). Mit $t := \log x$ ist $x = e^t$, also $dx = d e^t = e^t dt$. Damit ergibt sich

$$\int \frac{(\log x)^2}{x} dx = \int \frac{t^2}{e^t} e^t dt = \int t^2 dt = \frac{t^3}{3} + C = \frac{(\log x)^3}{3} + C.$$

Beispiel 6.4. (1) Es soll $\int \frac{dx}{a^2 + x^2}$, $a \neq 0$, bestimmt werden. Wir setzen $t := \frac{x}{a} \Leftrightarrow x = at$. Dann ist $dx = a dt$, also

$$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \int \frac{a dt}{a^2(1 + t^2)} = \frac{1}{a} \int \frac{dt}{1 + t^2} = \frac{1}{a} \arctan t + C = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C.$$

(2) Berechnung von $\int \frac{dx}{\sqrt{x}(1 + \sqrt[3]{x})}$. Mit $t := \sqrt[6]{x} \Leftrightarrow x = t^6$, $dx = 6t^5 dt$, ergibt sich

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{x}(1 + \sqrt[3]{x})} &= \int \frac{6t^5 dt}{t^3(1 + t^2)} = \int \frac{6t^2}{1 + t^2} dt = 6 \int \frac{1 + t^2 - 1}{1 + t^2} dt \\ &= 6 \int dt - 6 \int \frac{dt}{1 + t^2} = 6t - 6 \arctan t + C \\ &= 6\sqrt[6]{x} - 6 \arctan \sqrt[6]{x} + C. \end{aligned}$$

(3) Mit $t := \arcsin \frac{x}{a} \Leftrightarrow x = a \sin t$, $dx = a \cos t dt$, folgt

$$\begin{aligned} \int \sqrt{a^2 - x^2} dx &= \int \sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 t} a \cos t dt = a^2 \int \cos^2 t dt \stackrel{*}{=} a^2 \int \frac{1 + \cos(2t)}{2} dt \\ &= \frac{a^2 t}{2} + \frac{a^2}{2} \frac{\sin(2t)}{2} + C = \frac{a^2 \arcsin \frac{x}{a}}{2} + \frac{a^2}{4} \sin\left(2 \arcsin \frac{x}{a}\right) + C \\ &\stackrel{*\prime}{=} \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + \frac{x}{a} \sqrt{a^2 - x^2} + C, \end{aligned}$$

unter Verwendung von

* (Verdopplung des Winkels): Es gilt $\cos(2t) = 2 \cos^2 t - 1$,

*': Es gilt $\sin\left(2 \arcsin \frac{x}{a}\right) = 2 \sin\left(\arcsin \frac{x}{a}\right) \cos\left(\arcsin \frac{x}{a}\right) = \frac{2x}{a} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$.

Partielle Integration

Hat man keine andere Idee ein Integral zu bestimmen, so hilft einem in den meisten Fällen die partielle Integration. Sie lautet

$$\int u v' dx = u v - \int u' v dx$$

oder in der gebräuchlichen Form $\int u dv = u v - \int v du$.

Beweis. Es handelt sich um die Umkehrung der Produktregel:

$$(uv)' = u'v + uv' \implies uv = \int u'v dx + \int uv' dx.$$

□

Beispiel 6.5. (1) $\int x \cos x dx = \int x d \sin x = x \sin x - \int \sin x dx = x \sin x + \cos x + C$.

(2) $\int x^2 \sin x dx = - \int x^2 d \cos x = -x^2 \cos x + \int \cos x dx^2$
 $= -x^2 \cos x + 2 \int x \cos x dx$
 $= -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x + C$ nach (1).

(3) $\int \log x dx = x \log x - \int x d \log x = x \log x - \int dx = x (\log x - 1) + C$.

$$\begin{aligned}
(4) \quad \int e^{ax} \sin(bx) \, dx &= \int \sin(bx) \, d\frac{e^{ax}}{a} = \frac{e^{ax}}{a} \sin(bx) - \int \frac{e^{ax}}{a} \, d\sin(bx) \\
&= \frac{e^{ax}}{a} \sin(bx) - \frac{b}{a} \int e^{ax} \cos(bx) \, dx \\
&= \frac{e^{ax}}{a} \sin(bx) - \frac{b}{a} \int \cos(bx) \, d\frac{e^{ax}}{a} \\
&= \frac{e^{ax}}{a} \sin(bx) - \frac{b}{a^2} e^{ax} \cos(bx) + \frac{b}{a^2} \int e^{ax} \, d\cos(bx) \\
&= \frac{e^{ax}}{a} \left(\sin(bx) - \frac{b}{a} \cos(bx) \right) - \frac{b^2}{a^2} \int e^{ax} \sin(bx) \, dx.
\end{aligned}$$

Daraus ergibt sich

$$\left(1 + \frac{b^2}{a^2}\right) \int e^{ax} \sin(bx) \, dx = \frac{e^{ax}}{a} \left(\sin(bx) - \frac{b}{a} \cos(bx) \right) + C',$$

also

$$\int e^{ax} \sin(bx) \, dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} (\sin(bx) - b \cos(bx)) + C$$

mit $C' = \frac{a^2}{a^2 + b^2} C$.

Übergang ins Komplexe

Man definiert

$$\int (u + iv) \, dx := \int u \, dx + i \int v \, dx.$$

Dies hilft, falls sich $u + iv$ „geschlossen“ integrieren lässt.

Nochmals Beispiel 6.4 (4). Wegen $e^{ibx} = \cos(bx) + i \sin(bx)$ ergibt sich

$$\begin{aligned}
\int e^{ax} \sin(bx) \, dx &= \Im \left(\int e^{ax} e^{ibx} \, dx \right) = \Im \left(\int e^{(a+ib)x} \, dx \right) = \Im \left(\frac{e^{(a+ib)x}}{a+ib} \right) + C \\
&= \Im \left(\frac{e^{ax} (\cos(bx) + i \sin(bx)) (a-ib)}{a^2 + b^2} \right) + C \\
&= \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} (a \sin(bx) - b \cos(bx)) + C.
\end{aligned}$$

Man bekommt folgendes Integral dazugeschenkt:

$$\int e^{ax} \cos(bx) \, dx = \Re \left(\int e^{ax} e^{ibx} \, dx \right) = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} (a \cos(bx) + b \sin(bx)).$$

6.4 Integration rationaler Funktionen

Eine rationale Funktion ist bekanntlich von der Gestalt

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{p_0 + p_1 x + \cdots + p_m x^m}{q_0 + q_1 x + \cdots + q_n x^n}, \quad p_i, q_j \in \mathbb{R}.$$

Wir wollen $\int \frac{p(x)}{q(x)} dx$ bestimmen und nehmen dazu an, dass $p(x)$ und $q(x)$ keine gemeinsamen Nullstellen haben (ansonsten kürzen), und des weiteren sei $\deg p < \deg q$, also $m < n$ (ansonsten Polynomdivision mit Rest, z. B.

$$\frac{x^3}{x^2 + 1} = \frac{x^3 + x - x}{x^2 + 1} = \frac{x(x^2 + 1) - x}{x^2 + 1} = x - \frac{x}{x^2 + 1}$$

ausführen). Die Integration erfolgt dann unter Verwendung des folgenden Satzes:

Satz 6.2 (über die Partialbruchzerlegung). *Sei $q(x) = (x - \alpha)^k (x - \beta)^\ell \cdots$ die Zerlegung des Nennerpolynoms von $\frac{p(x)}{q(x)}$ in Linearfaktoren. Seien dabei $\alpha, \beta, \dots \in \mathbb{C}$ paarweise verschieden und k, ℓ, \dots deren Vielfachheiten als Nullstellen. Dann existieren eindeutig bestimmte komplexe Zahlen $A_1, \dots, A_k, B_1, \dots, B_\ell, \dots$ mit*

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{1}{q_n} \left(\frac{A_1}{x - \alpha} + \cdots + \frac{A_k}{(x - \alpha)^k} + \frac{B_1}{x - \beta} + \cdots + \frac{B_\ell}{(x - \beta)^\ell} + \cdots \right) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Der Beweis wird am einfachsten mit Mitteln aus der Funktionentheorie geführt.

Beispiel 6.6. (1) Für $\frac{1}{(x-1)(x-2)(x-3)}$ macht man den Ansatz

$$\frac{1}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x-3}.$$

Multiplikation mit $(x-1)(x-2)(x-3)$ ergibt

$$\begin{aligned} 1 &= A(x-2)(x-3) + B(x-1)(x-3) + C(x-1)(x-2) \\ &= (A+B+C)x^2 + (-5A-4B-3C)x + 6A+3B+2C. \end{aligned} \quad (6.1)$$

Koeffizientenvergleich: Wegen $1 = 0x^2 + 0x + 1$ ergibt sich aus (6.1) nun folgendes lineares Gleichungssystem in den Unbekannten A, B und C :

$$\begin{cases} A + B + C = 0 \\ -5A - 4B - 3C = 0 \\ 6A + 3B + 2C = 1. \end{cases}$$

Eleganter ist hier die **Einsetzungsmethode**: Setzt man in (6.1) die Nullstellen von $(x-1)(x-2)(x-3)$ ein, ergibt sich sofort

$$\begin{aligned} x=1: \quad 1 &= A(1-2)(1-3) = 2A & \implies A = \frac{1}{2}, \\ x=2: \quad 1 &= B(2-1)(2-3) = -B & \implies B = -1, \\ x=3: \quad 1 &= C(3-1)(3-2) = 2C & \implies C = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

(2) Für $\frac{x^2+x+1}{(x-1)^3(x-2)}$ setzt man gemäß Satz 6.2

$$\frac{x^2+x+1}{(x-1)^3(x-2)} = \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{(x-1)^2} + \frac{A_3}{(x-1)^3} + \frac{B}{x-2}.$$

Multiplikation mit $(x-1)^3(x-2)$ liefert

$$x^2+x+1 = A_1(x-1)^2(x-2) + A_2(x-1)(x-2) + A_3(x-2) + B(x-1)^3. \quad (6.2)$$

Setzt man hier $x=1$ und $x=2$ ein, erhält man

$$\begin{aligned} x=1: \quad 3 &= A_3(-1) & \implies A_3 = -3, \\ x=2: \quad 7 &= B & \implies B = 7. \end{aligned}$$

Man könnte jetzt beispielsweise noch $x=0$ und $x=3$ einsetzen und bekäme zwei Gleichungen für A_1 und A_2 . Stattdessen leiten wir (6.2) ab:

$$2x+1 = 2A_1(x-1)(x-2) + A_1(x-1)^2 + A_2(x-2) + A_2(x-1) - 3 + 21(x-1)^2. \quad (6.3)$$

Setzt man $x=1$ ein, ergibt sich $3 = -A_2 - 3$, also $A_2 = -6$. Ableiten von (6.3) bringt

$$2 = 2A_1(x-2) + 2A_1(x-1) + 2A_1(x-1) - 6 - 6 + 42(x-1).$$

Einsetzen von $x=1$ liefert $2 = -2A_1 - 12$, also $A_1 = -7$.

(3) Für $\frac{1}{(x^2+1)^2} = \frac{1}{(x-i)^2(x+i)^2}$ liefert Satz 6.2 folgenden Ansatz:

$$\frac{1}{(x-i)^2(x+i)^2} = \frac{A_1}{x-i} + \frac{A_2}{(x-i)^2} + \frac{B_1}{x+i} + \frac{B_2}{(x+i)^2},$$

also

$$1 = A_1(x-i)(x+i)^2 + A_2(x+i)^2 + B_1(x-i)^2(x+i) + B_2(x-i)^2. \quad (6.4)$$

Setzt man

$$\begin{aligned} x = i: \quad 1 &= A_2(-4) && \implies A_2 = -\frac{1}{4}, \\ x = -i: \quad 1 &= B_2(-4) && \implies B_2 = -\frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Ableiten von (6.4) ergibt

$$0 = A_1(x+i)^2 + 2A_1(x-i)(x+i) - \frac{1}{2}(x+i) + 2B_1(x-i)(x+i) + B_1(x-i)^2 - \frac{1}{2}(x-i).$$

Setze

$$\begin{aligned} x = i: \quad 0 &= A_1(-4) - i && \implies A_1 = -\frac{i}{4}, \\ x = -i: \quad 0 &= B_1(-4) + i && \implies B_1 = \frac{i}{4}. \end{aligned}$$

Jetzt kann man (wegen der Linearität des Integrals) die einzelnen Partialbrüche integrieren. Dazu benötigen wir:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x-\alpha} &= \log|x-\alpha| + C, && \alpha \in \mathbb{R}, \\ \int \frac{dx}{(x-\alpha)^k} &= \frac{(x-\alpha)^{-k+1}}{-k+1} + C, && \alpha \in \mathbb{C}, k \geq 2. \end{aligned}$$

Für $\alpha \in \mathbb{C}$ setzen wir zunächst $\int \frac{dx}{x-\alpha} = \log(x-\alpha) + C$. Für $\log(x-\alpha)$ benötigen wir die Zauberformel.

Wir integrieren die Ausdrücke aus Beispiel 6.6.

$$\begin{aligned} (1) \quad \int \frac{dx}{(x-1)(x-2)(x-3)} &= \int \left(\frac{1}{2(x-1)} - \frac{1}{x-2} + \frac{1}{2(x-3)} \right) dx \\ &= \frac{1}{2} \log|x-1| - \log|x-2| + \frac{1}{2} \log|x-3| + C \\ &= \frac{1}{2} \log \left| \frac{(x-1)(x-3)}{(x-2)^2} \right| + C. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad \int \frac{x^2+x+1}{(x-1)^3(x-2)} dx &= \int \left(\frac{-7}{x-1} - \frac{6}{(x-1)^2} - \frac{3}{(x-1)^3} + \frac{7}{x-2} \right) dx \\ &= -7 \log|x-1| - 6 \frac{(x-1)^{-1}}{-1} - 3 \frac{(x-1)^{-2}}{-2} + 7 \log|x-2| + C \\ &= 7 \log \left| \frac{x-2}{x-1} \right| + \frac{6}{x-1} + \frac{3}{2(x-1)^2} + C. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) \quad \int \frac{dx}{(x^2+1)^2} &= \int \left(-\frac{i}{4} \frac{1}{x-1} + \frac{i}{4} \frac{1}{x+1} - \frac{1}{4} \frac{1}{(x-i)^2} - \frac{1}{4} \frac{1}{(x+i)^2} \right) dx \\ &= -\frac{i}{4} \log(x-i) + \frac{i}{4} \log(x+i) - \frac{1}{4} \frac{(x-i)^{-1}}{-1} - \frac{1}{4} \frac{(x+i)^{-1}}{-1} + C \end{aligned}$$

$$= \underbrace{\frac{i}{4} \log \frac{x+i}{x-i}}_{\text{mit Zauberformel}} + \underbrace{\frac{1}{4(x-i)} + \frac{1}{4(x+i)}}_{=\frac{1}{2} \frac{x}{x^2+1}} + C.$$

Die Zauberformel besagt

$$i \log \frac{x-\alpha+i\delta}{x-\alpha-i\delta} = 2 \arctan \frac{x-\alpha}{\delta} + C, \quad \alpha, \delta, C \in \mathbb{R}. \quad (6.5)$$

Damit ist $\frac{i}{4} \log \frac{x+i}{x-i} = \frac{1}{2} \arctan x + C$. Wir haben also

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^2} = \frac{1}{2} \left(\arctan x + \frac{x}{x^2+1} \right) + C.$$

Die durch die Partialbruchzerlegung entstandenen komplexen Zahlen sind nach der Integration auf mysteriöse Weise verschwunden. Die Schummelei mit der Zauberformel ist erlaubt, denn der Erfolg gibt uns Recht: Differenziert man $\frac{1}{2} \left(\arctan x + \frac{x}{x^2+1} \right) + C$, erhält man $\frac{1}{(x^2+1)^2}$.

In der Funktionentheorie wird $\log z$ für komplexe z eingeführt. Dazu wählt man die EULERSche Darstellung $z = r e^{i\varphi}$ mit $r = |z|$ und $\varphi = \arg z$,

$$\log z = \log(r e^{i\varphi}) = \log r + \log e^{i\varphi} = \log r + i\varphi.$$

Beweis der Zauberformel (6.5). Bildet man die Ableitung der linken und rechten Seite von (6.5), so ergibt sich

$$\begin{aligned} \left(i \log \frac{x-\alpha-i\delta}{x-\alpha+i\delta} \right)' &= i \left(\frac{1}{x-\alpha+i\delta} - \frac{1}{x-\alpha-i\delta} \right) = \frac{2\delta}{(x-\alpha)^2 + \delta^2}, \\ \left(2 \arctan \frac{x-\alpha}{\delta} \right)' &= \frac{2}{1 + \left(\frac{x-\alpha}{\delta} \right)^2} \frac{1}{\delta} = \frac{2\delta}{(x-\alpha)^2 + \delta^2}. \end{aligned}$$

Nach Satz 6.1 unterscheiden sich $i \log \frac{x-\alpha+i\delta}{x-\alpha-i\delta}$ und $2 \arctan \frac{x-\alpha}{\delta}$ also nur um eine Konstante C . \square

6.5 Weitere Klassen elementar integrierbarer Funktionen

Eine Funktion $f: (D \subset \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ heißt **elementar**, wenn sie sich durch eine endliche Anzahl von Additionen, Subtraktionen, Multiplikationen, Divisionen und Kompositionen aus rationalen, Exponential-, Winkel-, Logarithmus-, Arkus- und Area-Funktionen erhalten lässt.

Beispiel 6.7. $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sinh\left(\frac{\log x + \sqrt[4]{x} + e^{-x^2}}{1 + \arcsin(\log x)}\right)$, mit $D = [\frac{1}{e}, e^{\sin(-1)}) \cup (e^{\sin(-1)}, e]$ ist elementar.

Die Ableitung einer elementaren Funktion ist wieder elementar. Dies gilt i. A. nicht für die Stammfunktion einer elementaren Funktion.

Betrachtet man die Menge aller Funktionen, so ist die Menge der elementaren Funktionen eine winzig kleine Teilmenge davon.

Gegeben seien n Funktionen $f_i: (D \subset \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto f_i(x)$, $1 \leq i \leq n$. Mit $R(f_1(x), \dots, f_n(x))$ bezeichnet man die Menge aller Funktionen, die sich aus reellen Zahlen und den Funktionen f_1 bis f_n durch eine endliche Anzahl von Additionen, Subtraktionen, Multiplikationen und Divisionen gewinnen lassen.

Die folgenden drei Klassen von Funktionen haben elementare Stammfunktionen.

1. Die Menge $R(x)$ aller rationalen Funktionen. Deren Integration wurde im Abschnitt 6.4 besprochen.

2. $R(\sin x, \cos x)$. Z. B. führt die Integration von $\frac{1 + 3 \sin x + 5 \sin^6 x \cdot \cos x}{1 + 20 \sin^7 x \cdot \cos^{18} x}$ (*) auf eine elementare Stammfunktion. Der Trick, der hier immer hilft, ist die Substitution $t := \tan \frac{x}{2}$.

In der Tat, betrachten wir

$$\int r(\sin x, \cos x) dx$$

mit einer rationalen Funktion r von zwei Veränderlichen (für (*) wäre $r(u, v) = \frac{1+3u+5u^6v}{1+20u^7v^{18}}$), so haben wir $x = 2 \arctan t$ und $dx = \frac{2 dt}{1+t^2}$ infolge der Substitution $t := \tan \frac{x}{2}$. Weiter gilt

$$\begin{aligned} \sin x &= \frac{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2}} = \frac{2 \tan \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}, \\ \cos x &= \frac{\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2}} = \frac{1 - \tan^2 \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}. \end{aligned}$$

Wir erhalten damit

$$\int r(\sin x, \cos x) dx = \int r\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right) \frac{2 dt}{1+t^2},$$

wobei $r\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)$ eine rationale Funktion in t ist.

Beispiel 6.8.

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\cos x} &= \int \frac{1+t^2}{1-t^2} \frac{2 dt}{1+t^2} = 2 \int \frac{dt}{1-t^2} = \int \left(\frac{1}{1-t} + \frac{1}{1+t} \right) dt \\ &= -\log|1-t| + \log|1+t| + C = \log \left| \frac{1+t}{1-t} \right| + C = \log \left| \frac{1 + \tan \frac{x}{2}}{1 - \tan \frac{x}{2}} \right| + C. \end{aligned}$$

3. Elementar integrierbar sind auch Funktionen aus

$$R(x, \sqrt{ax+b}, \sqrt{cx+d}), \quad R(x, \sqrt{x^2+ax+b}), \quad R\left(x, \sqrt[k]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right).$$

Zu deren Integration findet man geeignete Substitutionen in der Literatur.

Keine elementaren Stammfunktionen haben beispielsweise

$$e^{-x^2}, \quad \frac{\sin x}{x}, \quad \frac{e^x}{x}, \quad \frac{1}{\log x}, \quad \frac{1}{\sqrt{1-\cos x}}, \quad \frac{1}{\sqrt{1+x^4}}.$$

Man definiert in solchen Fällen neue Funktionen, etwa

$$\text{Si } x = \int \frac{\sin x}{x} dx, \quad \text{Si } 0 := 0, \quad (\text{Integralsinus}),$$

$$\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int e^{-x^2} dx, \quad \Phi(0) := \frac{1}{2}, \quad (\text{Fehlerfunktion}),$$

$$\text{Li } x = \int \frac{dx}{\log x}, \quad \text{Li } 1 := 0, \quad (\text{Integrallogarithmus, siehe Beispiel 4.6 (6)}).$$

7

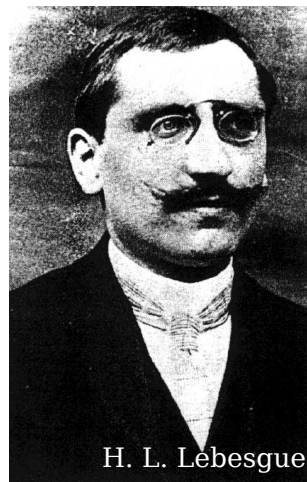
Das bestimmte Integral



B. Riemann



T. J. Stieltjes



H. L. Lebesgue



B. Cavalieri



E. Heine

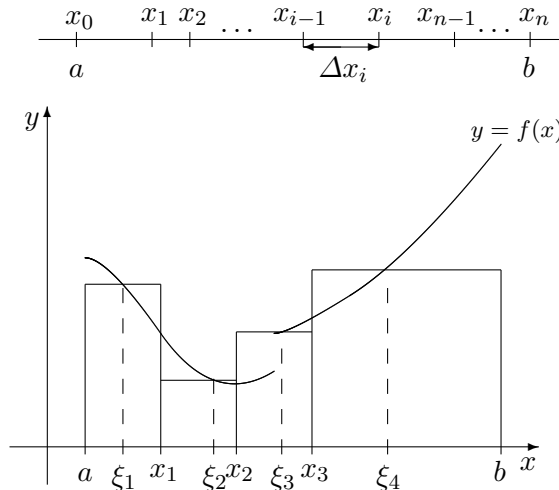
7.1 Das RIEMANSche Integral

Seien $[a, b] \subset \mathbb{R}$ ein beschränktes Intervall und $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion. Unter einer **Zerlegung** von $[a, b]$ versteht man eine Menge $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ mit

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b.$$

Man setzt $\Delta x_i := x_i - x_{i-1}$ und nennt $\mu(P) := \max_{1 \leq i \leq n} \Delta x_i$ den **Durchmesser**

(auch die **Feinheit** oder **Maschenweite**) der Zerlegung P . Man wählt schließlich in jedem Teilintervall $[x_{i-1}, x_i] \subset [a, b]$ einen **Zwischenpunkt** ξ_i . Die Summe



$$I(f, P) := \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$$

heißt (**RIEMANN¹sche**) **Integralsumme**.

Definition 7.1. Man sagt, dass die Integralsummen $I(f, P)$ für $\mu(P) \rightarrow 0$ **konvergent** sind mit dem Limes $g \in \mathbb{R}$, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass $|I(f, P) - g| < \varepsilon$ für alle Zerlegungen P mit $\mu(P) < \delta$ und für jede beliebige Wahl der Zwischenpunkte gilt.

Die Abhängigkeit von den Zwischenpunkten $\Xi := \{\xi_i\}_{i=1}^n$ wird in der Bezeichnung $I(f, P)$ unterdrückt. Präziser wäre das Symbol $I(f, P, \Xi)$. Damit ließe sich Definition 7.1 so schreiben:

$$\begin{array}{l}
 I(f, P, \Xi) \rightarrow g \\
 \text{für} \\
 \mu(P) \rightarrow 0
 \end{array}
 \iff
 \begin{array}{l}
 \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \text{ mit} \\
 |I(f, P, \Xi) - g| < \varepsilon \\
 \forall P \text{ mit } \mu(P) < \delta \text{ und } \forall \Xi.
 \end{array}$$

Beispiel 7.1. (1) Für die auf $[0, 1]$ eingeschränkte DIRICHLET-Funktion

$$\chi: [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \chi(x) = \begin{cases} 1: & x \in \mathbb{Q}, \\ 0: & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \end{cases}$$

¹Bernhard RIEMANN (1826 - 1866), deutscher Mathematiker. Wesentliche Beiträge zur Analysis, Differentialgeometrie, mathematischen Physik, analytischen Zahlentheorie. Er war Mitbegründer der Funktionentheorie. U. a. seine Riemannsche Geometrie ermöglichte EINSTEINS allgemeine Relativitätstheorie.

gilt, da für jede Zerlegung P von $[0, 1]$ Zwischenpunkte $\Xi = \Xi_1 \subset \mathbb{Q}$ oder $\Xi = \Xi_2 \subset \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ gewählt werden können,

$$I(f, P, \Xi_1) = \sum_{i=1}^n \chi(\xi_i) \Delta x_i = 0, \quad I(f, P, \Xi_2) = \sum_{i=1}^n \chi(\xi'_i) \Delta x_i = 0.$$

Die Integralsummen konvergieren nicht.

(2) Wir betrachten die Funktion

$$f: [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} 0: & 0 \leq x < \frac{1}{2}, \\ 1: & \frac{1}{2} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Sei P irgendeine Zerlegung von $[0, 1]$. Dann gibt es ein $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ mit $\frac{1}{2} \in [x_{k-1}, x_k)$ und es gilt

$$I(f, P) = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i = f(\xi_k) \Delta x_k + \sum_{i=k+1}^n f(\xi_i) \Delta x_i = f(\xi_k) \Delta x_k + (1 - x_k) \rightarrow \frac{1}{2}$$

für $\mu(P) \rightarrow 0$.

Definition 7.2. Wenn die Integralsummen $I(f, P)$ für $\mu(P) \rightarrow 0$ konvergieren, so nennt man den Grenzwert **RIEMANNsches Integral** oder **bestimmtes Integral im RIEMANNschen Sinne** von f auf $[a, b]$ und bezeichnet ihn mit

$$\int_a^b f(x) dx.$$

Die Menge aller auf $[a, b]$ RIEMANN-integrierbaren Funktionen bezeichnen wir mit $\mathcal{R}[a, b]$. Dass hier dieselben Zeichen \int und dx wie beim unbestimmten Integral verwendet werden, ist vorerst durch nichts motiviert.

Hierbei ist x eine Integrationsvariable, die wie ein Summationsindex in einer Summe letztendlich wegfällt. Daher gilt

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt = \dots$$

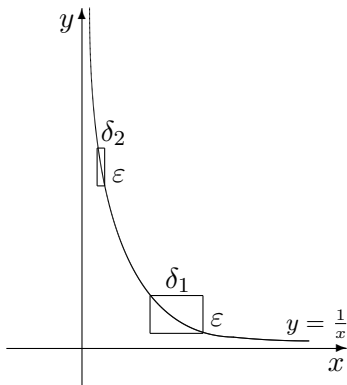
Unser nächstes Ziel besteht darin zu zeigen, dass jede auf $[a, b]$ stetige Funktion zu $\mathcal{R}[a, b]$ gehört.

Definition 7.3. Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall. Eine Funktion $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ heißt **gleichmäßig stetig auf I** , wenn für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert mit

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon \quad \forall x, y \in I : |x - y| < \delta.$$

Was ist der Unterschied zur gewöhnlichen Stetigkeit? Eine Funktion $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ ist stetig auf I , wenn sie es in jedem Punkt $x \in I$ ist, wenn also zu jedem $\varepsilon > 0$ und $x \in I$ ein $\delta = \delta(\varepsilon, x) > 0$ mit $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ für $y \in I$ mit $|x - y| < \delta(\varepsilon, x)$ existiert. Bei der gleichmäßigen Stetigkeit wird gefordert, dass δ nur von ε , nicht aber von x abhängt.

Beispiel 7.2. (1) Die Funktion $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$, ist auf $(0, \infty)$ stetig, aber nicht gleichmäßig stetig.



Denn wähle zu $\varepsilon := 1$ die Folgen $x_n = \frac{1}{n}$ und $x'_n := \frac{1}{2n}$. Dann gilt zwar

$$|x_n - x'_n| = \left| \frac{1}{n} - \frac{1}{2n} \right| = \frac{1}{2n} =: \delta_n \rightarrow 0 \text{ für } n \rightarrow \infty,$$

aber

$$|f(x_n) - f(x'_n)| = |n - 2n| = n \geq \varepsilon \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

(2) Die Funktion $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sin \frac{1}{x}$, ist auf $(0, \infty)$ stetig, aber nicht gleichmäßig stetig. Denn wähle zu $\varepsilon := \frac{1}{2}$ die Folgen $x_n := \frac{1}{n\pi}$ und $x'_n := \frac{2}{(2n+1)\pi}$. Dann gilt zwar

$$|x_n - x'_n| = \left| \frac{1}{n\pi} - \frac{2}{(2n+1)\pi} \right| = \frac{1}{n(2n+1)\pi} =: \delta_n \rightarrow 0 \text{ für } n \rightarrow \infty,$$

aber

$$\begin{aligned} |f(x_n) - f(x'_n)| &= \left| \sin(n\pi) - \sin\left((2n+1)\frac{\pi}{2}\right) \right| = \left| \sin\left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right) \right| \\ &= \underbrace{\left| \sin(n\pi) \cos \frac{\pi}{2} \right|}_{=0} + \underbrace{\left| \sin \frac{\pi}{2} \cos(n\pi) \right|}_{=(-1)^n} = 1 > \varepsilon \quad \forall n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Satz 7.1 (HEINE-CANTOR²). *Ist $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ auf $[a, b]$ stetig, so ist f auf $[a, b]$ auch gleichmäßig stetig.*

Beweis. Wir nehmen an, dass f auf $[a, b]$ nicht gleichmäßig stetig ist. Dann gibt es zu einem $\varepsilon > 0$ Folgen x_n, x'_n aus $[a, b]$ mit

$$|x_n - x'_n| =: \delta_n \rightarrow 0 \quad \text{und} \quad |f(x_n) - f(x'_n)| \geq \varepsilon$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Nach dem Satz von BOLZANO-WEIERSTRASS besitzen die beschränkten Folgen $\{x_n\}$ und $\{x'_n\}$ konvergente Teilfolgen $\{x_{n_k}\}$ und $\{x'_{n_k}\}$ mit $x_{n_k} \rightarrow x$ und $x'_{n_k} \rightarrow x$, $x \in [a, b]$, wegen $|x_{n_k} - x'_{n_k}| \rightarrow 0$. Da f stetig ist, folgt damit

$$|f(x_{n_k}) - f(x'_{n_k})| \rightarrow |f(x) - f(x)| = 0,$$

was im Widerspruch zu $|f(x_n) - f(x'_n)| \geq \varepsilon$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ steht. Also ist f auf $[a, b]$ doch gleichmäßig stetig. \square

Die nächsten drei Folgerungen aus Satz 7.1 sind trivial.

Korollar 7.1. *Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ auf $[a, b]$ gleichmäßig stetig. Dann ist auch jede Einschränkung $f|_I$ von f auf ein Intervall $I \subset [a, b]$ gleichmäßig stetig.*

Korollar 7.2. *Sei $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ in (a, b) stetig. Existieren die Grenzwerte $A := \lim_{x \rightarrow a+0} f(x)$ und $B := \lim_{x \rightarrow b-0} f(x)$, so ist die Erweiterung \tilde{f} von f auf $[a, b]$,*

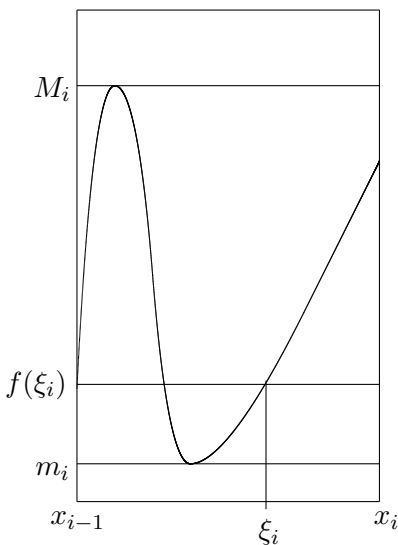
$$\tilde{f}(x) := \begin{cases} A & x = a, \\ f(x) & x \in (a, b), \\ B & x = b, \end{cases}$$

auf $[a, b]$ gleichmäßig stetig.

²Dieser Satz wurde 1872 von Eduard HEINE bewiesen, war aber wohl schon Karl WEIERSTRASS bekannt.

Korollar 7.3. Aus der gleichmäßigen Stetigkeit von $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ folgt die (gewöhnliche) Stetigkeit von f auf I .

Satz 7.2. Ist $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ auf $[a, b]$ stetig, so gilt $f \in \mathcal{R}[a, b]$.



Beweis. Für eine Zerlegung $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ von $[a, b]$ setzen wir

$$m_i := \min_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x), \quad M_i := \max_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$$

und betrachten die

$$\text{Untersumme} \quad U(f, P) := \sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i \text{ und}$$

$$\text{Obersumme} \quad O(f, P) := \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i.$$

Sind ξ_i , $1 \leq i \leq n$, irgendwelche Zwischenpunkte, so gilt wegen $m_i \leq f(\xi_i) \leq M_i$ trivialerweise

$$U(f, P) \leq I(f, P) \leq O(f, P). \quad (7.1)$$

Für zwei beliebige Zerlegungen P_1 und P_2 von $[a, b]$ haben wir

$$U(f, P_1) \leq U(f, P_1 \cup P_2) \leq O(f, P_1 \cup P_2) \leq O(f, P_2).$$

Wir betrachten dazu das Teilintervall $[x_{i-1}, x_i] \subset [a, b]$, wobei $x_{i-1}, x_i \in P_1$ gelte. Seien nun $y_1, y_2, \dots, y_k \in P_2$ mit $x_{i-1} < y_1 < y_2 < \dots < y_k < x_i$. Wir setzen $\Delta y_j := y_j - y_{j-1}$ für alle j mit $2 \leq j \leq k$ sowie $\Delta y_1 := y_1 - x_{i-1}$ und $\Delta y_{k+1} := x_i - y_k$. Setzt man noch $\mu_j := \min_{y \in [y_j, y_{j-1}]} f(y)$ für $2 \leq j \leq k$ und $\mu_1 := \min_{y \in [x_{i-1}, y_1]} f(y)$, $\mu_{k+1} := \min_{y \in [y_k, x_i]} f(y)$, so gilt

$$\mu_1 \Delta y_1 + \mu_2 \Delta y_2 + \dots + \mu_{k+1} \Delta y_{k+1} \geq m_i \Delta x_i.$$

Dabei steht die linke Seite in $U(f, P_1 \cup P_2)$ und die rechte Seite in $U(f, P_1)$. Jede Untersumme ist also kleiner oder gleich jeder Obersumme. Damit ist die Menge der Untersummen von oben beschränkt, d. h. es existiert

$$I_* := \sup_P I(f, P).$$

Analog ergibt sich die Existenz von $I^* := \inf_P O(f, P)$. Damit haben wir

$$U(f, P) \leq I_* \leq I^* \leq O(f, P) \quad \forall P. \quad (7.2)$$

Sei nun $\varepsilon > 0$ beliebig. Da f nach Satz 7.2 auf $[a, b]$ gleichmäßig stetig ist, gibt es ein $\delta > 0$ mit $|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$ für alle $x, y \in [a, b]$ mit $|x - y| \leq \delta$. Ist $\mu(P) < \delta$, so folgt $M_i - m_i < \frac{\varepsilon}{b-a}$ und es ergibt sich

$$O(f, P) - U(f, P) = \sum_{i=1}^n (M_i - m_i) \Delta x_i < \sum_{i=1}^n \frac{\varepsilon}{b-a} \Delta x_i = \frac{\varepsilon}{b-a} (b-a) = \varepsilon. \quad (7.3)$$

Ober- und Untersummen kommen sich also beliebig nahe, was $I_* = I^*$ impliziert. Wir bezeichnen den gemeinsamen Wert von I_* und I^* mit I .

Aus (7.1), (7.2) und (7.3) folgt $|I(f, P) - I| < \varepsilon$ für $\mu(P) < \delta$, d. h. $I(f, P) \rightarrow I$ für $\mu(P) \rightarrow 0$. \square

Es gibt auch unstetige Funktionen in $\mathfrak{R}[a, b]$. Dazu brauchen wir folgende Definition.

Definition 7.4. Eine Menge $E \subset \mathbb{R}$ heißt Menge vom Maß 0, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ höchstens abzählbar viele offene Intervalle I_1, I_2, I_3, \dots existieren, die E überdecken,

$$E \subset I_1 \cup I_2 \cup I_3 \cup \dots,$$

und dabei $|I_1| + |I_2| + |I_3| + \dots < \varepsilon$ erfüllen.

Beispiel 7.3. (1) Endliche Mengen haben das Maß 0. Besteht diese aus n Punkten, so wähle Intervalle I_j mit $|I_j| = \frac{\varepsilon}{n}$ für $1 \leq j \leq n$.

$$\text{---} \begin{array}{cccc} (+) & (+) & (+) & (+) \\ | & | & | & | \\ a & b & c & d \end{array} \text{---}$$

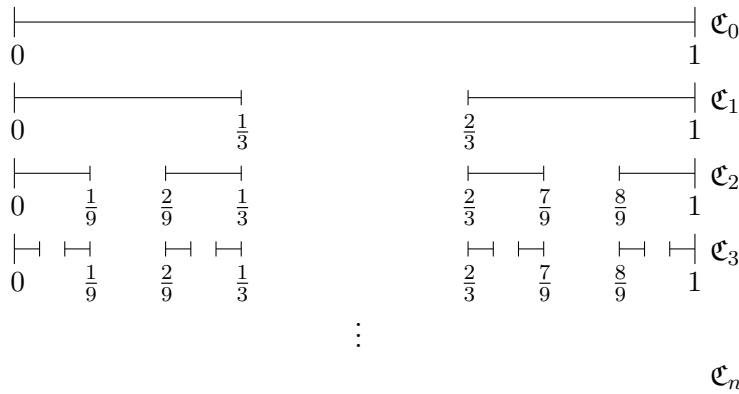
(2) Abzählbare Mengen haben ebenfalls das Maß 0. Wähle für $1 \leq j \leq \infty$ Intervalle I_j mit

$$|I_1| = \frac{\varepsilon}{2}, \quad |I_2| = \frac{\varepsilon}{4}, \quad \dots, \quad |I_n| = \frac{\varepsilon}{2^n}, \quad \dots$$

Dann ist

$$|I_1| + |I_2| + |I_3| + \dots = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^j} = \varepsilon \frac{1}{2} \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = \varepsilon.$$

- (3) Es existieren sogar überabzählbare Mengen vom Maß 0, z. B. das sogenannte **CANTORSche Diskontinuum** \mathfrak{C} (auch **CANTOR-Menge** genannt). Die CANTOR-Menge wird wie folgt gebildet:



Man startet mit $\mathfrak{C}_0 := [0, 1]$. Im i -ten Iterationsschritt entfernt man das mittlere Drittel jedes der 2^i Intervalle. Setze nun $\mathfrak{C} := \bigcap_{k=0}^{\infty} \mathfrak{C}_k$.

Stellt man die Zahlen aus $[0, 1)$ im Dreiersystem dar, $x = 0.x_1x_2x_3x_4\dots$ mit $x_i \in \{0, 1, 2\}$, so werden

in \mathfrak{C}_1 genau diejenigen mit $x_1 = 1$ gestrichen, in \mathfrak{C}_2 die mit $x_2 = 1$, usw. Die Menge \mathfrak{C} besteht also genau aus den Zahlen, die nur mit den Ziffern 0 und 2 gebildet werden. Die Mächtigkeit von \mathfrak{C} ist gleich der Mächtigkeit aller Zahlen in $[0, 1)$, da man diese im Zweiersystem durch Folgen der Ziffern 0 und 1 darstellen kann, also $|\mathfrak{C}| = \mathfrak{c}$. Das Komplement von \mathfrak{C} hat folgende Länge:

$$\frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{1}{3^2} + 2^2 \cdot \frac{1}{3^3} + 2^3 \cdot \frac{1}{3^4} + \dots = \frac{1}{3} \left(1 + \frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^3 + \dots \right) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1 - \frac{2}{3}} = 1.$$

Daraus folgt leicht, dass \mathfrak{C} das Maß 0 hat.

Satz 7.3. Eine beschränkte Funktion $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ gehört genau dann zu $\mathcal{R}[a, b]$, wenn die Menge der Unstetigkeitspunkte das Maß 0 hat.

Den Beweis findet man in jedem besseren Analysisbuch.

Korollar 7.4 (zu Satz 7.3). Jede monotone und beschränkte Funktion $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ist RIEMANN-integrierbar.

Beweis. Monotone Funktionen haben höchstens Sprünge als Unstetigkeiten und deren Anzahl ist höchstens abzählbar. □

7.2 Eigenschaften des RIEMANNschen Integrals

Seien $f, g \in \mathcal{R}[a, b]$ und $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann sind auch $f \pm g$ sowie αf RIEMANN-integrierbar und es gilt

$$\int_a^b (f(x) + g(x)) \, dx = \int_a^b f(x) \, dx + \int_a^b g(x) \, dx,$$

$$\int_a^b \alpha f(x) \, dx = \alpha \int_a^b f(x) \, dx.$$

Man definiert

$$\int_a^a f(x) \, dx := 0, \quad \int_b^a f(x) \, dx := - \int_a^b f(x) \, dx, \quad a < b.$$

Des weiteren gilt: $f \in \mathcal{R}[a, b], f \in \mathcal{R}[b, c] \implies f \in \mathcal{R}[a, c]$, wobei

$$\int_a^c f(x) \, dx = \int_a^b f(x) \, dx + \int_b^c f(x) \, dx.$$

Sind außerdem $f, g \in \mathcal{R}[a, b]$ mit $f(x) \leq g(x)$ für alle $x \in [a, b]$, so gilt

$$\int_a^b f(x) \, dx \leq \int_a^b g(x) \, dx.$$

Gilt insbesondere $m \leq f(x) \leq M$ für jedes $x \in [a, b]$, $f \in \mathcal{R}[a, b]$, so ist

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) \, dx \leq M(b-a).$$

Gilt darin $|f(x)| \leq M$, so folgt für $f \in \mathcal{R}[a, b]$

$$\left| \int_a^b f(x) \, dx \right| \leq M(b-a).$$

Kurz gesagt: Das RIEMANN-Integral ist ein *lineares, monotones Funktional* auf dem Raum der RIEMANN-integrierbaren Funktionen.

Satz 7.4. Ist $f \in \mathcal{R}[a, b]$ mit $m \leq f(x) \leq M$ für alle $x \in [a, b]$ und Konstanten $m, M \in \mathbb{R}$, und ist $\varphi \in \mathcal{C}[m, M]$, so ist $\varphi \circ f \in \mathcal{R}[a, b]$.

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Setze $\varepsilon' := \frac{\varepsilon}{b-a+2K}$ mit $K := \max|\varphi(x)|$. Da φ auf $[m, M]$ auch gleichmäßig stetig ist, gibt es ein $\delta > 0$ mit $\delta < \varepsilon'$ und $|\varphi(x_1) - \varphi(x_2)| < \varepsilon'$ für $|x_1 - x_2| < \delta$. Wegen $f \in \mathcal{R}[a, b]$ finden wir eine Zerlegung $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ von $[a, b]$ mit

$$O(f, P) - U(f, P) < \delta^2.$$

Seien schließlich

$$m_i := \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x), \quad M_i := \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$$

und

$$m_i^* := \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} h(x), \quad M_i^* := \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} h(x),$$

wobei $h := \varphi \circ f$ gesetzt wurde. Sei nun A die Menge aller i mit $M_i - m_i < \delta$ und B die Menge aller i mit $M_i - m_i \geq \delta$. Für $i \in A$ gilt dann $M_i^* - m_i^* < \varepsilon'$ und für $i \in B$ haben wir

$$\delta \sum_{i \in B} \Delta x_i \leq \sum_{i \in B} (M_i - m_i) \Delta x_i \leq O(f, P) - U(f, P) < \delta^2,$$

d. h. $\sum_{i \in B} \Delta x_i < \delta$. Insgesamt erhalten wir

$$\begin{aligned} O(h, P) - U(h, P) &= \sum_{i \in A} (M_i^* - m_i^*) \Delta x_i + \sum_{i \in B} (M_i^* - m_i^*) \Delta x_i \\ &\leq \varepsilon' \sum_{i \in A} \Delta x_i + 2K \sum_{i \in B} \Delta x_i \leq \varepsilon' (b-a) + 2K \delta \leq \varepsilon' (b-a) + 2K \varepsilon' \\ &= (b-a+2K) \varepsilon' < \varepsilon. \end{aligned}$$

Damit folgt wie im Beweis von Satz 7.2, dass $h \in \mathcal{R}[a, b]$ gilt. \square

Satz 7.5.

$$1. \quad f, g \in \mathcal{R}[a, b] \implies fg \in \mathcal{R}[a, b].$$

$$2. \quad f \in \mathcal{R}[a, b] \implies |f| \in \mathcal{R}[a, b] \text{ und } \left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx.$$

Beweis. 1. Sind f und g aus $\mathcal{R}[a, b]$, so auch $f \pm g$ und nach Satz 7.4 mit $\varphi(t) = t^2$ auch $(f \pm g)^2$. Also gehört auch

$$fg = \frac{1}{4} [(f + g)^2 - (f - g)^2]$$

zu $\mathcal{R}[a, b]$.

2. Satz 7.4 mit $\varphi(t) = |t|$ liefert $|f| \in \mathcal{R}[a, b]$. Wegen $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$ und der Monotonie des Integrals folgt

$$-\int_a^b |f(x)| dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b |f(x)| dx,$$

was gerade der behaupteten Ungleichung entspricht. □

Die Umkehrung von 2. aus Satz 7.5 gilt jedoch nicht. So ist z. B. die durch $f(x) := \chi(x) - \frac{1}{2}$ definierte Funktion, wobei $\chi(x)$ die DIRICHLET-Funktion meint, auf $[0, 1]$ nicht RIEMANN-integrierbar, aber $|f(x)| = \frac{1}{2}$ ist auf $[0, 1]$ RIEMANN-integrierbar. Die Umkehrung gilt aber für das LEBESGUE-Integral. In der Maßtheorie werden wir sehen, dass eine Funktion f in (a, b) LEBESGUE-integrierbar ist, falls f messbar und $|f|$ in (a, b) LEBESGUE-integrierbar ist.

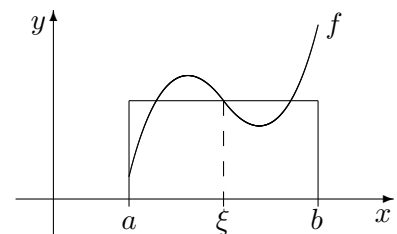
Satz 7.6 (Mittelwertsatz der Integralrechnung). *Seien $f, g \in \mathcal{C}[a, b]$ mit $g(x) \geq 0$ für alle $x \in [a, b]$. Dann existiert ein $\xi \in [a, b]$ mit*

$$\int_a^b f(x) g(x) dx = f(\xi) \int_a^b g(x) dx.$$

Insbesondere ist

$$\int_a^b f(x) dx = f(\xi) (b - a).$$

Die Formel $\int_a^b f(x) dx = f(\xi) (b - a)$ aus Satz 7.6 kann wie rechts dargestellt veranschaulicht werden. Es gibt ein $\xi \in [a, b]$ so, dass der Flächeninhalt des Rechtecks mit der Höhe $f(\xi)$ und der Länge $b - a$ gleich dem Inhalt der Fläche unter dem Graph von f in $[a, b]$ ist.



Beweis. Seien $m := \min_{x \in [a,b]} f(x)$ und $M := \max_{x \in [a,b]} f(x)$. Dann gilt $m \leq f(x) \leq M$ und somit $m g(x) \leq f(x) g(x) \leq M g(x)$, woraus sich

$$m \int_a^b g(x) \, dx \leq \int_a^b f(x) g(x) \, dx \leq M \int_a^b g(x) \, dx$$

wegen der Monotonie des Integrals ergibt. Folglich ist

$$\int_a^b f(x) g(x) \, dx = c \int_a^b g(x) \, dx \quad \text{für ein } c \in [m, M],$$

und nach dem Zwischenwertsatz (Satz 4.6) existiert ein $\xi \in [a, b]$ mit $f(\xi) = c$. \square

Satz 7.7 (Hauptsatz der Differential- & Integralrechnung, Teil I). *Sei $f \in \mathcal{R}[a, b]$ und sei $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von f . Dann gilt*

$$\int_a^b f(x) \, dx = F(b) - F(a).$$

Beweis. Sei $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ irgendeine Zerlegung von $[a, b]$. Wir haben dann einerseits

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n [F(x_i) - F(x_{i-1})] &= (F(x_n) - F(x_{n-1})) + (F(x_{n-1}) - F(x_{n-2})) + \dots + (F(x_1) - F(x_0)) \\ &= F(x_n) - F(x_0) = F(b) - F(a), \end{aligned}$$

und andererseits nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung (Korollar 5.1)

$$\sum_{i=1}^n [F(x_i) - F(x_{i-1})] = \sum_{i=1}^n F'(\xi_i) (x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i \rightarrow \int_a^b f(x) \, dx$$

für $\mu(P) \rightarrow 0$. Daraus folgt $F(b) - F(a) = \int_a^b f(x) \, dx$. \square

Satz 7.7 erlaubt die Berechnung bestimmter Integrale, wenn man in der Lage ist, unbestimmte Integrale auswerten zu können.

Satz 7.8 (Hauptsatz der Differential- & Integralrechnung, Teil II). Sei $f \in \mathcal{R}[a, b]$ und

$$F(x) = \int_a^x f(\xi) \, dx \quad \text{für } x \in [a, b].$$

Dann ist F stetig auf $[a, b]$. Ist außerdem f in $x_0 \in [a, b]$ stetig, so ist F in x_0 differenzierbar und es gilt $F'(x_0) = f(x_0)$. Ist insbesondere $f \in \mathcal{C}[a, b]$, so ist F eine Stammfunktion von f auf $[a, b]$.

Beweis. Da RIEMANN-integrierbare Funktionen beschränkt sind, gibt es ein $M \in \mathbb{R}$ mit $|f(x)| \leq M$ für alle $x \in [a, b]$. Dann ist

$$\begin{aligned} |F(x) - F(y)| &= \left| \int_a^x f(\xi) \, d\xi - \int_a^y f(\xi) \, d\xi \right| = \left| \int_y^x f(\xi) \, d\xi \right| \leq \left| \int_y^x |f(\xi)| \, d\xi \right| \\ &\leq M \left| \int_y^x d\xi \right| = M |x - y| < \varepsilon \end{aligned}$$

für alle $x, y \in [a, b]$ mit $|x - y| < \delta := \frac{\varepsilon}{M}$. Also ist F auf $[a, b]$ (gleichmäßig) stetig³.

Sei nun f in $x_0 \in (a, b)$ stetig (falls $x_0 \in \{a, b\}$, betrachtet man analog zum Folgenden links- bzw. rechtsseitige Ableitungen). Zu gegebenem $\varepsilon > 0$ finden wir dann ein $\delta > 0$ mit

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \quad \forall x \in (a, b) : |x - x_0| < \delta.$$

Für s, t mit $x_0 - \delta < s \leq x_0 \leq t < x_0 + \delta$, $a < s < t < b$, haben wir also

$$\begin{aligned} \left| \frac{F(t) - F(s)}{t - s} - f(x_0) \right| &= \left| \frac{1}{t - s} \int_s^t f(\xi) \, d\xi - f(x_0) \right| = \left| \frac{1}{t - s} \int_s^t f(\xi) \, d\xi - \frac{1}{t - s} \int_s^t f(x_0) \, d\xi \right| \end{aligned}$$

³ F ist sogar **LIPSCHITZ-stetig** mit der LIPSCHITZ-Konstanten M , denn es gilt $|F(x) - F(y)| \leq M|x - y|$ für alle $x, y \in [a, b]$.

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{t-s} \left| \int_s^t (f(\xi) - f(x_0)) \, d\xi \right| \leq \frac{1}{t-s} \int_s^t |f(\xi) - f(x_0)| \, d\xi \\
&\leq \frac{1}{t-s} \int_s^t \varepsilon \, d\xi = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Setzen wir erst $s := x_0$ und dann $t := x_0$, so folgt, dass F in x_0 von links und von rechts differenzierbar ist und dass die links- und rechtsseitigen Ableitungen dort übereinstimmen. Also ist F in x_0 differenzierbar und es gilt $F'(x_0) = f(x_0)$. \square

Mit Satz 7.8 wird die Berechnung unbestimmter Integrale auf die Berechnung bestimmter Integrale zurückgeführt. Dies liefert auch eine Antwort auf die erste Frage aus Abschnitt 7.1: Stetige Funktionen besitzen stets eine Stammfunktion.

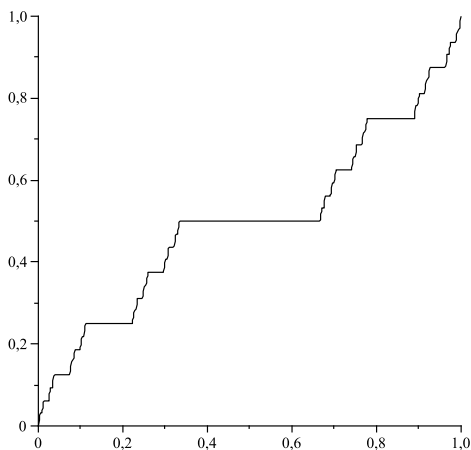
Die Sätze 7.7 und 7.8 beinhalten die Formeln

$$\int_a^b \frac{d}{dx} F(x) \, dx = F(b) - F(a) \quad \text{und} \quad \frac{d}{dx} \int_a^x F(\xi) \, d\xi = F(x).$$

Deshalb spricht man auch vom Hauptsatz der *Differential- & Integralrechnung*.

Die beiden Sätze rechtfertigen a posteriori auch die beidmalige Verwendung des Symbols \int beim unbestimmten und bestimmten Integral.

Wir hatten in Beispiel 7.3 die CANTOR-Menge \mathfrak{C} kennengelernt. Mit ihr lässt sich eine Funktion $F: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ wie folgt konstruieren.



Wir setzen $F(x) := \frac{1}{2}$ für $x \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$, d. h. für x aus dem Komplement von \mathfrak{C}_1 , dann $F(x) := \frac{1}{4}$ für $x \in [\frac{1}{9}, \frac{2}{9}]$, $F(x) := \frac{3}{4}$ für $x \in [\frac{7}{9}, \frac{8}{9}]$, und haben so F auf dem Komplement von \mathfrak{C}_2 erklärt. Zum Komplement von \mathfrak{C}_3 sind es dann noch vier Intervalle der Länge $\frac{1}{27}$, auf denen wir F die Werte $\frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{5}{8}$ und $\frac{7}{8}$ geben. So fortfahrend wird F in allen Punkten von $[0, 1] \setminus \mathfrak{C}$ erklärt. Man kann zeigen, dass sich F in den Punkten von \mathfrak{C} so definieren lässt, dass letztendlich F auf ganz $[0, 1]$ stetig ist. Die konstruierte Funktion F (oder ihr Graph) heißt **CANTORSche Treppe** oder auch **Teufelstreppe**.

Aus der Konstruktion ist ersichtlich, dass F

in den Punkten aus

$$I = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) \cup \left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right) \cup \left(\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right) \cup \dots$$

differenzierbar und die Ableitung dort 0 ist. In Beispiel 7.3 wurde $|I| = 1$ gezeigt. Also: F ist eine *stetige* Funktion auf $[0, 1]$, die auf einer Menge I mit $|I| = |[0, 1]| = 1$ horizontal verläuft, aber dennoch einen Höhenunterschied von 1 überwindet. Etwas anders gesagt: Man kann sich *stetig* so fortbewegen, dass man eine Stunde in Ruhe bleibt, im Verlauf dieser Stunde aber eine Strecke von 1 km zurücklegt.

Die Funktion F zeigt, dass die Formel

$$\int_a^b \frac{d}{dx} F(x) dx = F(b) - F(a)$$

nicht mehr zu halten ist, wenn man lediglich fordert, dass F nur *fast überall* (d. h. bis auf eine Menge vom Maß 0) differenzierbar ist. Für unser F ist $\frac{d}{dx} F(x) = 0$ fast überall und somit

$$\int_0^1 \frac{d}{dx} F(x) dx = \int_0^1 0 dx = 0 \neq 1 = F(1) - F(0).$$

Die Formel

$$\frac{d}{dx} \int_0^x F(\xi) d\xi = F(x)$$

hingegen gilt für beliebige stetige Funktionen F und damit auch für die CANTORSche Treppe.

Variablensubstitution in bestimmten Integralen

Sei $\varphi: [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b]$ eine bijektive \mathcal{C}^1 -Funktion und sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann gilt

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt.$$

Beweis. Sei $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von f . Dann gilt

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x) dx = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)).$$

Da $F(\varphi(t))$ eine Stammfunktion von $f(\varphi(t)) \varphi'(t)$ ist, ergibt sich

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)).$$

□

Man verwendet üblicherweise folgende Notation:

$$F(b) - F(a) =: F(x)|_{x=a}^{x=b} =: F(x)|_a^b.$$

Beispiel 7.4. Berechnung von $\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx$. Mit $x = \varphi(t) = a \sin t$, $t \in [0, \pi]$, gilt $dx = a \cos t dt$. Für die neuen Integrationsgrenzen t_1 und t_2 ergibt sich $t_1 = \varphi^{-1}(0) = 0$ und $t_2 = \varphi^{-1}(a) = \frac{\pi}{2}$. Damit ist

$$\begin{aligned} \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx &= \int_0^{\pi/2} \sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 t} \cdot a \cos t dt = a^2 \int_0^{\pi/2} \cos^2 t dt \\ &= a^2 \left(\frac{t}{2} + \frac{\sin(2t)}{4} \right) \Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi a^2}{4} \quad (\text{nach Beispiel 6.4 (3)}). \end{aligned}$$

Partielle Integration in bestimmten Integralen

Für $u, v \in \mathcal{C}^1[a, b]$ gilt

$$\int_a^b u v' dx = u v|_a^b - \int_a^b u' v dx.$$

Eine andere Schreibweise ist $\int_a^b u dv = u v|_a^b - \int_a^b v du$.

Beweis. Sei $F = uv$. Dann ist $F' = uv' + u'v$ und somit

$$\int_a^b u v' dx + \int_a^b u' v dx = F|_a^b = u v|_a^b.$$

□

Beispiel 7.5. Man berechne $\int_0^{\pi/2} \sin^{2011} x \, dx$. Wir suchen also $S_n := \int_0^{\pi/2} \sin^n x \, dx$, $n \in \mathbb{N}$.
Es ist

$$S_0 = \int_0^{\pi/2} dx = \frac{\pi}{2}, \quad S_1 = \int_0^{\pi/2} \sin x \, dx = -\cos x \Big|_0^{\pi/2} = 1.$$

Die unbestimmten Integrale

$$\begin{aligned} \int \sin^2 x \, dx &= \frac{x}{2} - \frac{\sin(2x)}{4} + C, \\ \int \sin^3 x \, dx &= \frac{\cos^3 x}{3} - \cos x + C, \\ \int \sin^4 x \, dx &= \frac{3x}{8} - \frac{\sin(2x)}{4} + \frac{\sin(4x)}{32} + C, \\ \int \sin^5 x \, dx &= -\frac{5 \cos x}{8} + \frac{5 \cos(3x)}{48} - \frac{\cos(5x)}{80} + C, \dots \end{aligned}$$

ergeben sich mittels partieller Integration. Damit kommt man nicht zum Ziel (bzw. muss man viel Zeit einplanen). Partielle Integration für bestimmte Integrale liefert

$$\begin{aligned} S_n &= \int_0^{\pi/2} \sin^n x \, dx = \int_0^{\pi/2} \sin^{n-1} x \, d(-\cos x) = \underbrace{-\sin^{n-1} x \cos x \Big|_0^{\pi/2}}_{=0} + \int_0^{\pi/2} \cos x \, d \sin^{n-1} x \\ &= \int_0^{\pi/2} (n-1) \sin^{n-2} x \cos^2 x \, dx = (n-1) S_{n-2} - (n-1) S_n. \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich $S_n = \frac{n-1}{n} S_{n-2}$, also⁴

$$\begin{aligned} S_{2k} &= \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \frac{\pi}{2} = \frac{(2k-1)(2k-3) \cdots 1}{2k(2k-2) \cdots 2} \frac{\pi}{2}, \\ S_{2k+1} &= \frac{(2k)!!}{(2k+1)!!} = \frac{2k(2k-2) \cdots 2}{(2k+1)(2k-1) \cdots 3}. \end{aligned}$$

Insbesondere ist $S_{2011} = \frac{2010 \cdot 2008 \cdot \cdots \cdot 2}{2011 \cdot 2009 \cdot \cdots \cdot 3}$.

⁴Daraus folgert man leicht (**WALLISches Produkt**): $\frac{\pi}{2} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{4n^2}{4n^2-1}$.

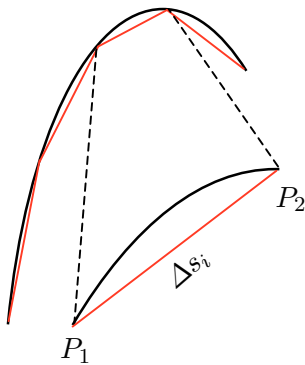
7.3 Einige Anwendungen

7.3.1 Kurvenlänge

Sei $\varphi: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine \mathcal{C}^1 -Funktion. Dann nennen wir $\varphi([a, b]) \subset \mathbb{R}^n$ eine **Kurve**. Gesucht ist die Länge ℓ dieser Kurve. Wir haben $\varphi(t) = (\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t))$ und das Ergebnis ist

$$\ell = \int_a^b \|\dot{\varphi}(t)\| dt = \int_a^b \sqrt{\dot{\varphi}_1(t)^2 + \dots + \dot{\varphi}_n(t)^2} dt.$$

Beweis. Wir beschränken uns auf den Fall $n = 2$. Die Kurve sei gegeben durch $x = x(t)$, $y = y(t)$ für $t \in [a, b]$.



$$P_1 = (x(t_{i-1}), y(t_{i-1})),$$

$$P_2 = (x(t_i), y(t_i))$$

Wir approximieren die Kurve durch einen Polygonzug I_n mit n Abschnitten $[t_{i-1}, t_i]$, $1 \leq i \leq n$, d. h. wir betrachten die Strecken $\Delta s_i := f(t_{i-1}), f(t_i)$:

$$\begin{aligned} I_n &= \sum_{i=1}^n \Delta s_i \\ &= \sum_{i=1}^n \sqrt{(x(t_i) - x(t_{i-1}))^2 + (y(t_i) - y(t_{i-1}))^2} \\ &\stackrel{*}{=} \sum_{i=1}^n \sqrt{(\dot{x}(\xi_i)(t_i - t_{i-1}))^2 + (\dot{y}(\eta_i)(t_i - t_{i-1}))^2} \\ &= \sum_{i=1}^n \sqrt{\dot{x}(\xi_i)^2 + \dot{y}(\eta_i)^2} (t_i - t_{i-1}). \end{aligned}$$

An der Stelle * ist der Mittelwertsatz der Differentialrechnung (Korollar 5.1) eingegangen. Für $\eta_i = \xi_i$ wäre die letzte Gleichung eine reine Integralsumme, die für $n \rightarrow \infty$ gegen

$$I := \int_a^b \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2} dt$$

strebt. Es gilt aber i. A. $\eta_i \neq \xi_i$, was dennoch unproblematisch ist. Da $f(t, s) := \sqrt{\dot{x}(s)^2 + \dot{y}(s)^2}$ auf $[a, b] \times [a, b]$ gleichmäßig stetig ist, gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ mit

$$\left| \sqrt{\dot{x}(\xi_i)^2 + \dot{y}(\eta_i)^2} - \sqrt{\dot{x}(\xi_i)^2 + \dot{y}(\xi_i)^2} \right| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$$

für alle Zerlegungen P mit $\mu(P) < \delta$. Ist δ klein genug, so gilt

$$\left| \sum_{i=1}^n \sqrt{\dot{x}(\xi_i)^2 + \dot{y}(\xi_i)^2} \Delta t_i - I \right| < \frac{\varepsilon}{2},$$

$$\left| I_n - \sum_{i=1}^n \sqrt{\dot{x}(\xi_i)^2 + \dot{y}(\xi_i)^2} \Delta t_i \right| \leq \sum_{i=1}^n \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \Delta t_i = \frac{\varepsilon}{2},$$

d. h. $|I_n - I| < \varepsilon$ für $\mu(P) < \delta$. Daher gilt $I_n \rightarrow I$ für $\mu(P) \rightarrow 0$. \square

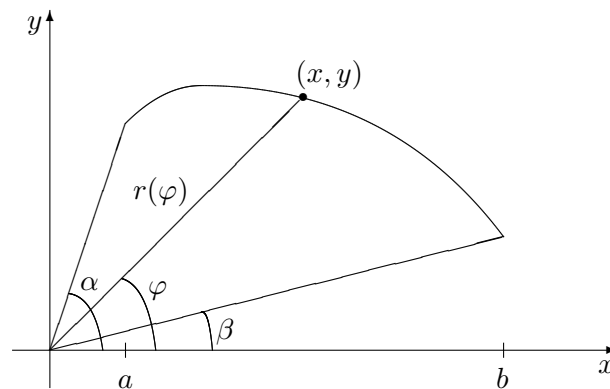
Beispiel 7.6. (1) Kreisumfang. Ein Kreis mit Radius r und Mittelpunkt $(0,0)$ wird bekanntlich durch $x = r \cos t$, $y = r \sin t$, $t \in [0, 2\pi]$, beschrieben. Die Länge dieser Kurve ist

$$\ell = \int_0^{2\pi} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{(-r \sin t)^2 + (r \cos t)^2} dt = r \int_0^{2\pi} dt = 2\pi r.$$

(2) Länge des Graphen einer Funktion $C^1[a, b] \ni f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Diese kann man in der Form $x = t$, $y = f(t)$, $t \in [a, b]$, angeben. Dann haben wir

$$\ell = \int_a^b \sqrt{1 + \dot{f}(t)^2} dt = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} dx.$$

(3) Kurve in Polardarstellung. Die Punkte (x, y) auf der Kurve $r = r(\varphi)$, $\varphi \in [\alpha, \beta]$,



können in der Form $x = r(\varphi) \cos \varphi$, $y = r(\varphi) \sin \varphi$, angegeben werden. Damit ist

$$x_\varphi = r_\varphi \cos \varphi - r(\varphi) \sin \varphi, \quad y_\varphi = r_\varphi \sin \varphi + r(\varphi) \cos \varphi,$$

also $x_\varphi^2 + y_\varphi^2 = r^2 + r_\varphi^2$ und es gilt $\ell = \int_\alpha^\beta \sqrt{r^2 + r_\varphi^2} \, d\varphi$.

Nochmals der Kreisumfang. Der Kreis kann durch $r(\varphi) = r$, $\varphi \in [0, 2\pi]$, beschrieben werden. Dann ist $\ell = \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2 + 0^2} \, d\varphi = 2\pi r$.

(4) Archimedische Spirale: $r(\varphi) = a\varphi$, $\varphi \geq 0$.



Es soll die Länge der ersten Windung berechnet werden. Es gilt

$$\begin{aligned} \ell &= \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 \varphi^2 + a^2} \, d\varphi = a \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + \varphi^2} \, d\varphi \\ &= \frac{a}{2} \left[\varphi \sqrt{1 + \varphi^2} + \log\left(\varphi + \sqrt{1 + \varphi^2}\right) \right] \Big|_0^{2\pi} \\ &= \frac{a}{2} \left[2\pi \sqrt{1 + 4\pi^2} + \log\left(2\pi + \sqrt{1 + 4\pi^2}\right) \right]. \end{aligned}$$

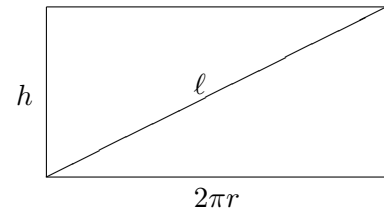
(5) Zylindrische Spirale: $x = r \cos t$, $y = r \sin t$, $z = \frac{h}{2\pi} t$, $t \in [0, 2\pi]$.



Länge einer Windung:

$$\begin{aligned} \ell &= \int_0^{2\pi} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \, dt \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2 \sin^2 t + r^2 \cos^2 t + \left(\frac{h}{2\pi}\right)^2} \, dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sqrt{(2\pi r)^2 + h^2} \, dt = \sqrt{(2\pi r)^2 + h^2}. \end{aligned}$$

Dies kann man auch elementar berechnen. Man betrachte dazu den abgewickelten Zylinder. Es gilt $\ell^2 = (2\pi r)^2 + h^2$.

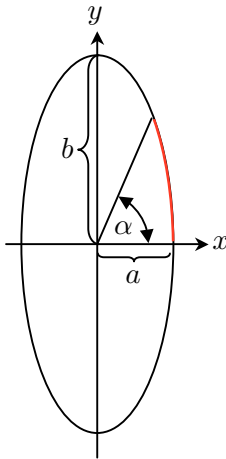


(6) Elliptische Integrale.

Es sei der in der Abbildung dargestellte Ellipsenbogen zu bestimmen. Die Parameterdarstellung der Ellipse ist $x = a \cos t$, $y = b \sin t$, $t \in [0, 2\pi]$. Zum eingezeichneten Winkel α gehört der Parameter t mit

$$\tan \alpha = \frac{y}{x} = \frac{b}{a} \tan t,$$

also $t = \arctan\left(\frac{a}{b} \tan \alpha\right) =: \varphi$. Damit ist $t \in [0, \varphi]$. Es gilt



$$\begin{aligned} \ell &= \int_0^\varphi \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt = \int_0^\varphi \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t} dt \\ &= \int_0^\varphi \sqrt{b^2 - (b^2 - a^2) \sin^2 t} dt \\ &= b \int_0^\varphi \sqrt{1 - \left(1 - \frac{a^2}{b^2}\right) \sin^2 t} dt \\ &\stackrel{*}{=} b \int_0^\varphi \sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 t} dt =: b E(\varphi, \varepsilon) \end{aligned}$$

(*: $\varepsilon^2 := 1 - \frac{a^2}{b^2}$ nennt man die **Exzentrizität** der Ellipse) mit

$$E(\varphi, \varepsilon) = \int_0^\varphi \sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 t} dt.$$

Weiter setzt man $F(\varphi, \varepsilon) := \int_0^\varphi \frac{dt}{\sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 t}}$. Dies sind sogenannte **unvollständige elliptische Integrale**. Sie besitzen keine elementaren Stammfunktionen.

Soll der Ellipsenumfang berechnet werden, so ist $4b E(\varphi, \varepsilon)$ mit $\varphi = \frac{\pi}{2}$ zu bestimmen. Dies gelingt durch folgende Reihenentwicklung:

$$\sqrt{1-x} = (1-x)^{\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{1/2}{n} (-1)^n x^n \quad \text{für } |x| < 1.$$

Dabei ist

$$\begin{aligned} \binom{1/2}{n} &= \frac{\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - 1\right) \cdots \left(\frac{1}{2} - n + 1\right)}{n!} = \frac{(-1)^{n-1} \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2}\right) \cdots \left(n - \frac{1}{2} - 1\right)}{n!} \\ &= \frac{(-1)^{n-1}}{2^n} \frac{(2n-3)(2n-1) \cdots 3 \cdot 1}{n!} = (-1)^{n-1} \frac{(2n-3)!!}{(2n)!!}. \end{aligned}$$

Damit gilt

$$\sqrt{1-x} = 1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2 \cdot 4}x^2 - \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^3 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}x^4 - \dots$$

Setzt man hierin $x := \varepsilon^2 \sin^2 t$, erhält man die Reihe für $E\left(\frac{\pi}{2}, \varepsilon\right)$, die wegen $|\varepsilon^2 \sin^2 t| < 1$ für $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ konvergiert. Da man im Inneren des Konvergenzgebiets auch gliedweise integrieren darf, ergibt sich

$$\begin{aligned} E\left(\frac{\pi}{2}, \varepsilon\right) &= \int_0^{\pi/2} dt - \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \varepsilon^2 \sin^2 t dt - \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \frac{\varepsilon^4 \sin^4 t}{4} dt - \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \frac{1 \cdot 3}{4 \cdot 6} \varepsilon^6 \sin^6 t dt \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{4 \cdot 6 \cdot 8} \varepsilon^8 \sin^8 t dt - \dots \end{aligned}$$

Im Beispiel 7.5 hatten wir $\int_0^{\pi/2} \sin^n t dt = \frac{(n-1)!!}{n!} \frac{\pi}{2}$ für gerade n . Damit erhalten wir letztendlich

$$\begin{aligned} E\left(\frac{\pi}{2}, \varepsilon\right) &= \frac{\pi}{2} - \varepsilon^2 \frac{1}{2} \frac{\pi}{2} - \varepsilon^4 \frac{1}{2} \frac{1 \cdot 3}{4 \cdot 2 \cdot 4} \frac{\pi}{2} - \varepsilon^6 \frac{1}{2} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{4 \cdot 6 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 6} \frac{\pi}{2} - \varepsilon^8 \frac{1}{2} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} \frac{\pi}{2} - \dots \\ &= \frac{\pi}{2} \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 \varepsilon^2 - \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 \frac{\varepsilon^4}{3} - \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^2 \frac{\varepsilon^6}{5} - \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}\right)^2 \frac{\varepsilon^8}{7} - \dots \right]. \end{aligned}$$

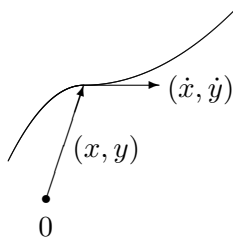
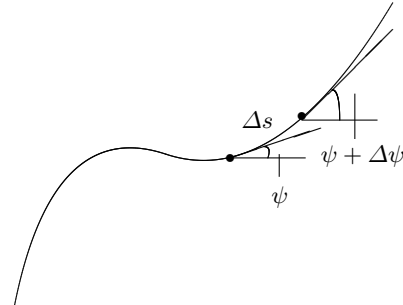
Man nennt $E\left(\frac{\pi}{2}, \varepsilon\right)$ und $F\left(\frac{\pi}{2}, \varepsilon\right)$ **vollständige elliptische Integrale**.

7.3.2 Krümmung ebener Kurven

Die **Krümmung** κ einer Kurve beschreibt die Änderung des Winkels ψ im Verhältnis zum zurückgelegten Kurvenstück, d. h.

$$\kappa = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \psi}{\Delta s}.$$

Ist $\kappa > 0$, so beschreibt φ eine Linkskurve, für $\kappa < 0$ eine Rechtskurve.



Eine Kurve sei gegeben durch $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in [a, b]$, wobei $x, y \in C^1[a, b]$ mit $\dot{x}^2 + \dot{y}^2 > 0$ für alle $t \in [a, b]$ gelte. Der Vektor $(\dot{x}(t), \dot{y}(t))$ ist der Tangentialvektor (in der Physik: Geschwindigkeitsvektor) an die Kurve im Punkt $P = (x(t), y(t))$.

Satz 7.9. Die Krümmung im Punkt $(x(t), y(t))$ ist gegeben durch

$$\kappa = \frac{\dot{x}(t)\ddot{y}(t) - \ddot{x}(t)\dot{y}(t)}{(\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Beweis. Wir haben

$$\kappa = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \psi}{\Delta s} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\psi(t+\Delta t) - \psi(t)}{\frac{s(t+\Delta t) - s(t)}{\Delta t}},$$

wobei $s(t_0)$ die Länge der Kurve zwischen $t = a$ und $t = t_0$ meint. Wegen $s(t) = \int_0^t \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} d\tau$ ist $\dot{s}(t) = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}$. Des Weiteren ist $\tan \psi = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}$, wie aus obigen Abbildungen hervorgeht, d. h. $\psi = \arctan \frac{\dot{y}}{\dot{x}}$, also

$$\dot{\psi} = \frac{1}{1 + \frac{\dot{y}}{\dot{x}}} \frac{\ddot{y}\dot{x} - \dot{y}\ddot{x}}{\dot{x}^2} = \frac{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}}{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}.$$

Die Behauptung folgt nun mit $\kappa = \frac{\dot{\psi}}{\dot{s}(t)}$. □

Beispiel 7.7. (1) Eine Kurve sei gegeben durch $y = f(x)$. Setze $x := t$, $y := f(t)$. Dann ist $\dot{x} = 1$, $\ddot{x} = 0$, $\dot{y} = f'(t)$, $\ddot{y} = f''(t)$, also

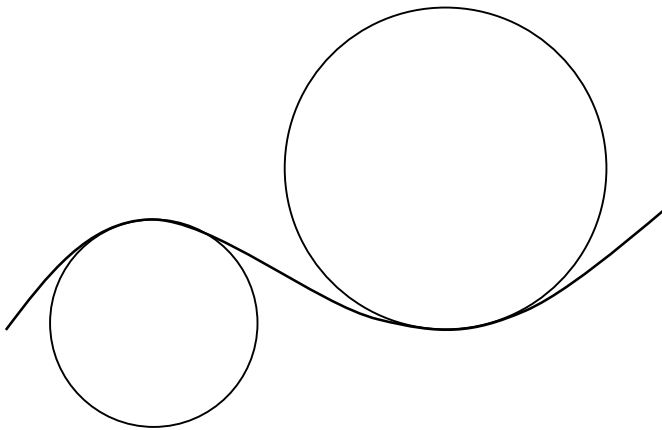
$$\kappa = \frac{f''(t)}{\left(1 + (f'(t))^2\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

Für die Parabel $y = x^2$ ergibt sich z. B. $\kappa(x) = \frac{2}{(1 + 4x^2)^{\frac{3}{2}}}$.

(2) Für die Ellipse $x = a \cos t$, $y = b \sin t$, $t \in [0, 2\pi]$, haben wir $\dot{x} = -a \sin t$, $\ddot{x} = -a \cos t$, $\dot{y} = b \cos t$, $\ddot{y} = -b \sin t$. Damit gilt

$$\kappa(t) = \frac{ab \sin^2 t + ab \cos^2 t}{(a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t)^{\frac{3}{2}}} = \frac{ab}{(a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t)^{\frac{3}{2}}}.$$

Da der Kreis eine spezielle Ellipse mit $a = b = r$ ist, ergibt sich für ihn $\kappa = \frac{1}{r}$. Der Kreis beschreibt also eine Kurve mit konstanter Krümmung.



Der **Krümmungskreis** ist der Kreis, der sich an eine gegebene Kurve in einem gegebenen Punkt am besten anschmiegt. Der Radius dieses Kreises ist $r(t) = \frac{1}{\kappa(t)}$. Dies erlaubt eine andere Interpretation der Krümmung.

Wir haben zwei Funktionen $s = s(t)$ und $\kappa = \kappa(t)$, $t \in [a, b]$. Wegen $\dot{s} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} > 0$ ist $s(t)$ streng monoton wachsend. Daher existiert die Umkehrfunktion $t = \psi(s)$.

Dies ergibt $\kappa = \kappa(\psi(s)) =: f(s)$.

Satz 7.10 (Hauptsatz für ebene Kurven). *Für jede stetige Funktion $f: (0, s_0) \rightarrow \mathbb{R}$ gibt es bis auf Kongruenz, d. h. Verschiebung und Drehung der Ebene, genau eine Kurve mit $\kappa = f(s)$, $s \in [0, s_0]$.*

Beweis. Z.B. Fichtenholz, Nr. 332. □

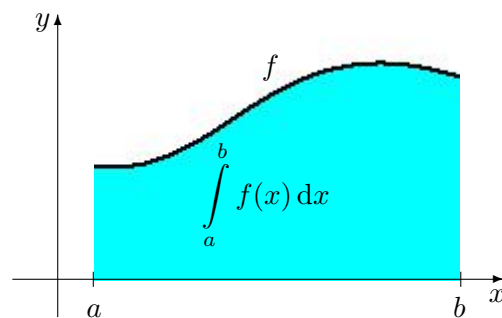
Ist beispielsweise $f(s) = r = \text{const}$, so ist die Kurve ein Kreis vom Radius r .

Dieser Sachverhalt ist u. a. auch für den Straßenbau bedeutsam: Fährt man entlang einer geradlinigen Straße, die irgendwann eine Linkskurve durchläuft, so entspricht diese keinem Kreisbogen (denn sonst würde die Krümmung der Fahrbahn plötzlich von 0 auf $\frac{1}{r}$ ansteigen und man müsste ruckartig lenken). Man durchfährt eine sogenannte **Klothoide**, deren Krümmung stetig von 0 auf cs , $c \in \mathbb{R}$, anwächst.

7.3.3 Flächeninhalte

Für $f \in \mathcal{R}[a, b]$ mit $f \geq 0$ definiert man den Flächeninhalt A der Menge $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$ durch

$$A := \int_a^b f(x) dx.$$

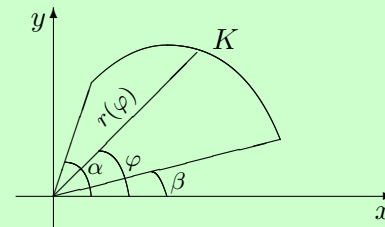
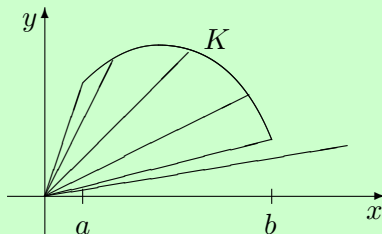


Satz 7.11 (Sektorensatz). Gegeben sei eine Kurve K durch $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in [a, b]$, mit C^1 -Funktionen x und y , so dass jeder Strahl aus dem Koordinatenursprung die Kurve höchstens einmal schneidet (Abbildung unten links). Der Flächeninhalt des durch K gegebenen Sektors ist

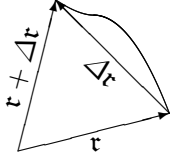
$$A = \frac{1}{2} \int_a^b |\dot{x}(t)y(t) - x(t)\dot{y}(t)| dt.$$

Ist K durch die Polardarstellung $r = r(\varphi)$, $\varphi \in [\alpha, \beta]$, gegeben (Abbildung unten rechts), so ist

$$A = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r(\varphi)^2 d\varphi.$$



Beweis. Der Flächeninhalt des links gezeichneten kleinen Sektors ist ungefähr gleich der Fläche des von \mathbf{r} und $\Delta\mathbf{r}$ gebildeten Dreiecks.



$$\begin{aligned}\Delta A &\approx \frac{1}{2} |\mathbf{r} \times \Delta\mathbf{r}| = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} i & j & k \\ x & y & z \\ \Delta x & \Delta y & \Delta z \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{2} |(0, 0, x \Delta y - y \Delta x)| \quad (\text{da } z = 0 \text{ und } \Delta z = 0) \\ &= \frac{1}{2} |x \Delta y - y \Delta x|,\end{aligned}$$

also im Grenzwert

$$A = \int dA = \frac{1}{2} \int |x dy - y dx| \stackrel{*}{=} \int_a^b |x \dot{y} - y \dot{x}| dt,$$

unter Verwendung von *: $dy = \dot{y} dt$ und $dx = \dot{x} dt$.

Exakt: Wir haben

$$\begin{aligned}\Delta A_i &\approx \frac{1}{2} |x(t_i) (y(t_i) - y(t_{i-1})) - y(t_i) (x(t_i) - x(t_{i-1}))| \\ &\stackrel{*'}{=} \frac{1}{2} |x(t_i) \dot{y}(\xi_i) \Delta t_i - y(t_i) \dot{x}(\eta_i) \Delta t_i|.\end{aligned}$$

An der Stelle $*'$ wurde der Mittelwertsatz der Differentialrechnung (analog zum Beweis der Formel für die Kurvenlänge) benutzt. Nun ist

$$A \approx \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n |x(t_i) \dot{y}(\xi_i) - y(t_i) \dot{x}(\eta_i)| \Delta t_i.$$

Die Funktion $(t, s, u) \mapsto x(t) \dot{y}(s) - y(t) \dot{x}(u)$ ist auf $[a, b]^3$ gleichmäßig stetig. Für jede Zerlegung P von $[a, b]^3$ gilt also

$$\begin{aligned}\lim_{\mu(P) \rightarrow 0} \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n |x(t_i) \dot{y}(\xi_i) - y(t_i) \dot{x}(\eta_i)| \Delta t_i &= \lim_{\mu(P) \rightarrow 0} \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n |x(\xi_i) \dot{y}(\xi_i) - y(\xi_i) \dot{x}(\xi_i)| \Delta t_i \\ &= \frac{1}{2} \int_a^b |x \dot{y} - \dot{x} y| dt.\end{aligned}$$

Formel in Polardarstellung: Wir haben $x = r(\varphi) \cos \varphi \stackrel{t:=\varphi}{=} r(t) \cos t$, $y = r(t) \sin t$, $t \in [\alpha, \beta]$. Es gilt $\dot{x} = \dot{r}(t) \cos t - r(t) \sin t$, $\dot{y} = \dot{r}(t) \sin t + r(t) \cos t$. Damit ist

$$\dot{x} y - x \dot{y} = (\dot{r}(t) \cos t - r(t) \sin t) r(t) \sin t - r(t) \cos t (\dot{r}(t) \sin t + r(t) \cos t) = -r(t)^2,$$

also $|\dot{x} y - x \dot{y}| = r(t)^2$, woraus die Behauptung folgt. \square

Beispiel 7.8. (1) Flächeninhalt der Ellipse, $x = a \cos t$, $y = b \sin t$, $t \in [0, 2\pi]$. Es gilt

$$A = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} |(a \cos t)(b \sin t) - (-a \sin t)(b \sin t)| dt = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} ab dt = \pi ab.$$

(2) Archimedische Spirale, $r = a\varphi$, $\varphi \geq 0$. Flächeninhalt der ersten Windung:

$$A_1 = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} a^2 \varphi^2 d\varphi = \frac{a^2}{2} \frac{(2\pi)^3}{3} = \frac{4}{3} \pi^3 a^2.$$

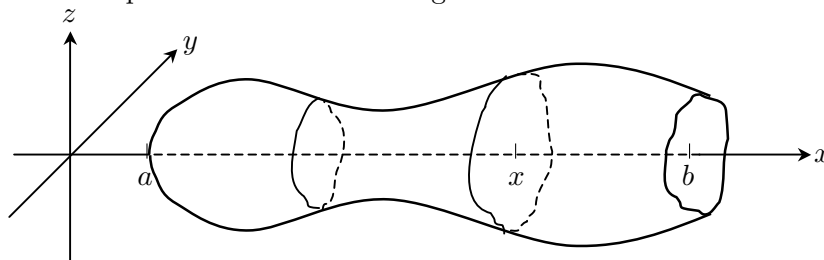
Flächeninhalt der zweiten Windung:

$$A_2 = \frac{1}{2} \int_{2\pi}^{4\pi} a^2 \varphi^2 d\varphi = \frac{a^2}{2} \frac{\pi^3}{3} (64 - 8) = \frac{28}{3} \pi^3 a^2.$$

Es gilt $A_2 = 7A_1$, was sogar schon ARCHIMEDES bekannt war.

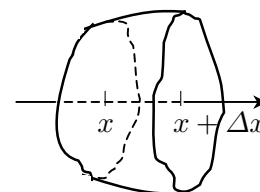
7.3.4 Volumenehalte

Gegeben sei ein Körper wie in der Abbildung.



Dieser wird senkrecht zur Abszissenachse in dünne Scheiben zerschnitten. Der Inhalt der Schnittfläche sei $A(x)$. Für das Volumen einer Scheibe gilt

$$\Delta V \approx A(x) \Delta x.$$



Die Überlegungen, die wir zur Bestimmung des Flächeninhalts angestellt haben, funktionieren in entsprechender Weise. Es ergibt sich ein Gesamtvolumen von

$$V = \int_a^b A(x) dx.$$

Hierin steckt das sogenannte **Prinzip von CAVALIERI**⁵: Körper mit gleichen Querschnittsflächen in jeder Schnitthöhe haben das gleiche Volumen.

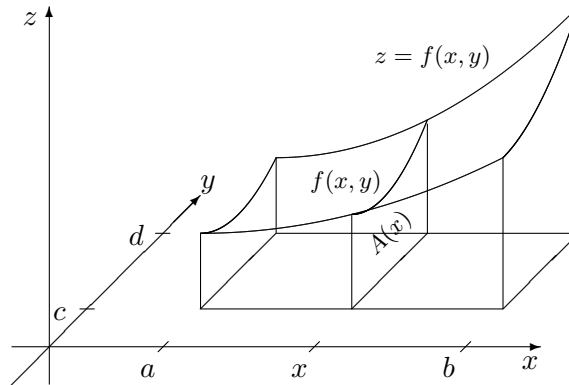
Beispiel 7.9. (1) Volumen unter der Fläche $z = f(x, y)$.

Für den Inhalt der unter der Kurve $z = f(x, y)$, $c \leq y \leq d$, eingezeichneten Fläche gilt $A(x) = \int_c^d f(x, y) dy$, also ist

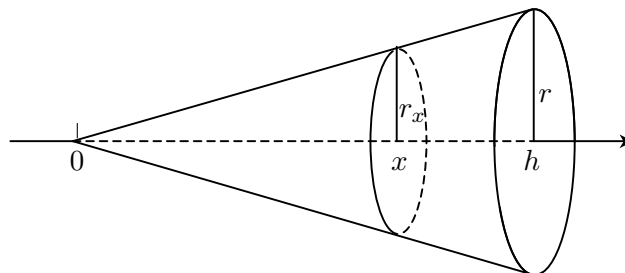
$$V = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx.$$

Analog gilt auch

$$V = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy.$$



(2) Kegel mit Höhe h und Grundradius r .

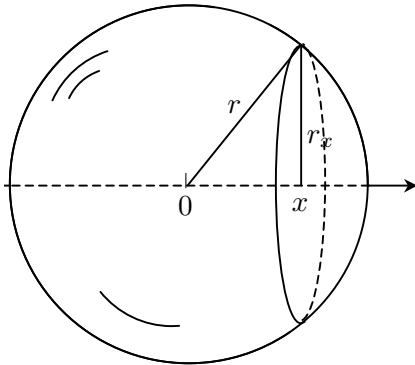


Der Strahlensatz liefert zunächst $\frac{r_x}{r} = \frac{x}{h}$. Damit ist $A(x) = \pi r_x^2 = \pi \left(\frac{r}{h} x\right)^2$, also

$$V = \int_0^h \pi \left(\frac{r}{h} x\right)^2 dx = \frac{\pi r^2}{h^2} \int_0^h x^2 dx = \frac{\pi}{3} r^2 h.$$

⁵Bonaventura CAVALLIERI (1598 - 1647), italienischer Mathematiker. Beiträge zur Geometrie, Berechnung von Oberflächen und Volumina nach seinem *Prinzip der Indivisibilen*, in dem z. B. Flächen als Packung unendlich vieler Linien ohne Breite verstanden werden (in Analogie zur anschaulichen Vorstellung der Infinitesimalrechnung).

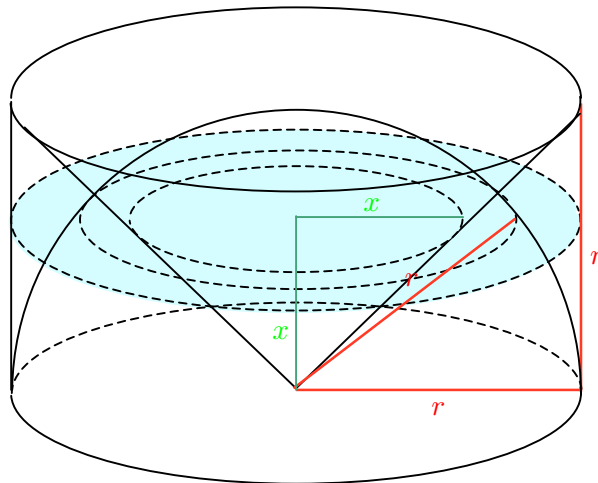
(3) Kugel mit Radius r .



Es gilt $r_x = \sqrt{r^2 - x^2}$ und damit $A(x) = \pi r_x^2 = \pi (r^2 - x^2)$, also

$$\begin{aligned} V &= 2 \int_0^r \pi (r^2 - x^2) dx \\ &= 2\pi \left(r^2 x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^r = \frac{4\pi}{3} r^3. \end{aligned}$$

ARCHIMEDES berechnete das Kugelvolumen rein elementargeometrisch wie folgt: Einem Zylinder mit Höhe r und Radius r sei, wie in folgender Abbildung zu sehen, eine Halbkugel mit Radius r und ein Kreiskegel mit Höhe r und Radius r einbeschrieben:



Dieses Gebilde wird in der Höhe x parallel zur Grundfläche zerschnitten. Die so entstehenden Schnittflächen haben folgende Inhalte:

$$\begin{aligned} \text{Schnittfläche des Kegels:} & \quad A_K = \pi x^2, \\ \text{Schnittfläche der Halbkugel:} & \quad A_H = \pi (r^2 - x^2), \\ \text{Schnittfläche des Zylinders:} & \quad A_Z = \pi r^2. \end{aligned}$$

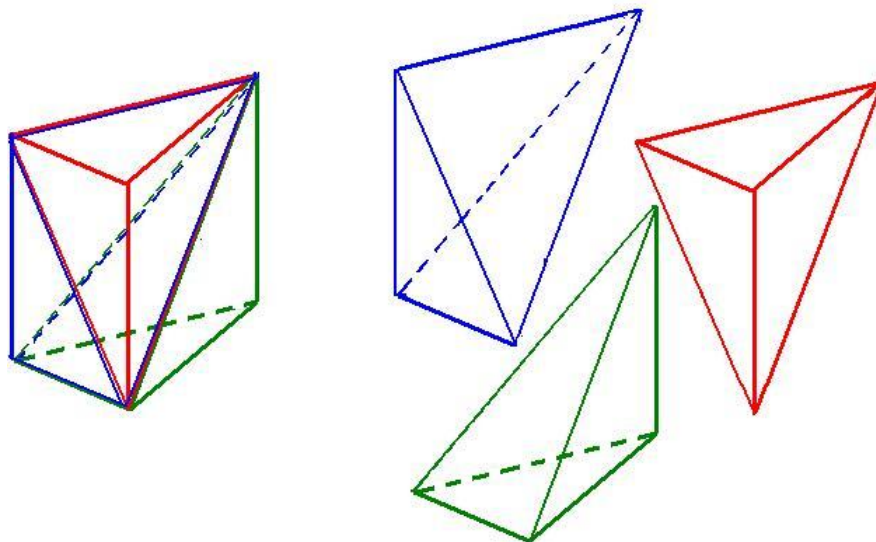
Es gilt also $A_Z - A_K = A_H$ in jeder Schnitthöhe x . Das CAVALIERISCHE Prinzip (was damals schon bekannt war) liefert also

$$V_H = V_Z - V_K = \pi r^3 - \frac{\pi}{3} r^3 = \frac{2\pi}{3} r^3$$

wobei V_i , $i \in \{H \text{ (Halbkugel)}, Z \text{ (Zylinder)}, K \text{ (Kegel)}\}$, das i -Volumen meint, d. h.

$$V_{\text{Kugel}} = 2V_H = \frac{4\pi}{3} r^3.$$

Zylinder- und Kegelvolumen waren ebenfalls bekannt. Ersteres ergibt sich aus dem Prisma und das zweite wie folgt aus dem Pyramidenvolumen. Man zerlegt ein dreiseitiges Prisma in drei gleichgroße Stücke, indem man es entlang der eingezeichneten Ebenen zerteilt:



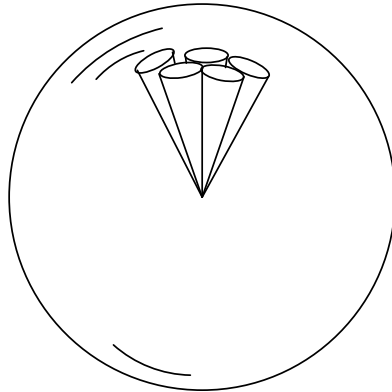
Es ergibt sich $V_{\text{Pyramide}} = \frac{1}{3} V_{\text{Prisma}}$.

Die Zahl π definierte man als Fläche eines Kreises mit Radius 1.

Die Kugeloberfläche bestimmte ARCHIMEDES wie folgt. Er fasste eine Kugel (siehe Abbildung unten) als Vereinigung von Kegeln mit Höhe r auf. Damit gilt

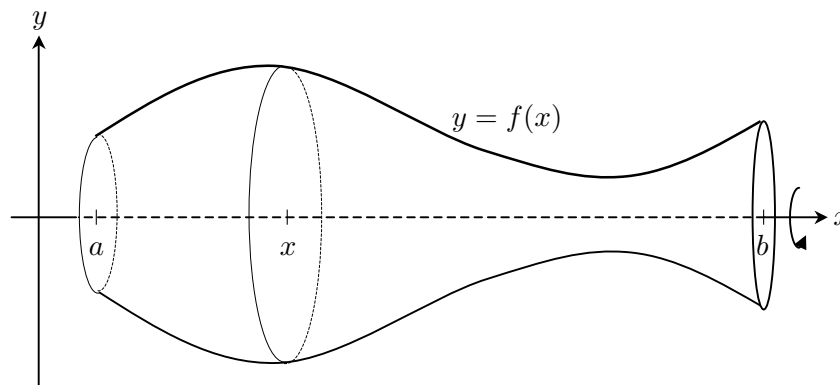
$$V_{\text{Kugel}} = \frac{4\pi}{3} r^3 = \frac{r}{3} \cdot \sum \text{Grundflächen} = \frac{r}{3} \cdot A_{\text{Kugel}},$$

also $A_{\text{Kugel}} = 4\pi r^2$.



7.3.5 Rotationskörper

Eine Kurve $y = f(x) \geq 0$, $x \in [a, b]$, erzeugt bei Drehung um die x -Achse einen **Rotationskörper**.



Jede Querschnittsfläche (siehe Abbildung) ist ein Kreis mit Radius $f(x)$, hat also den Flächeninhalt $A(x) = \pi f(x)^2$. Damit ergibt sich das Volumen des Rotationskörpers zu

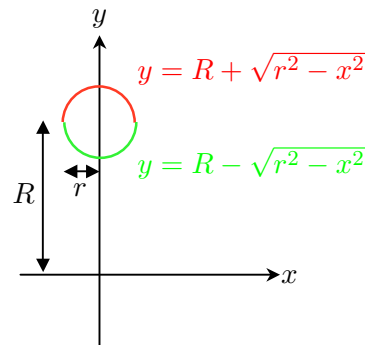
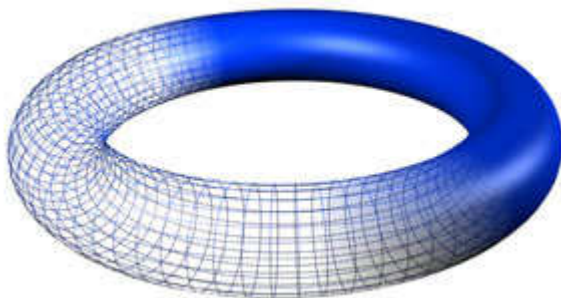
$$V = \pi \int_a^b f(x)^2 dx.$$

Beispiel 7.10. (1) Nochmal das Kugelvolumen. Ein Kreis vom Radius r und Mittelpunkt im Ursprung wird durch $x^2 + y^2 = r^2$ beschrieben. Der im ersten Quadranten liegende Kreisbogen kann durch $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ ausgedrückt werden. Lässt man die

sen um die x -Achse rotieren, ergibt sich die Hälfte des Kugelvolumens V zu

$$\frac{V}{2} = \pi \int_0^r (\sqrt{r^2 - x^2})^2 dx = \pi \int_0^r (r^2 - x^2) dx = \pi \left(r^2 x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^r = \frac{2\pi}{3} r^3.$$

- (2) Torus (Rettungsring). Dieser entsteht, wenn man einen Kreis vom Radius r mit Mittelpunkt $(0, R)$ um die x -Achse rotieren lässt.

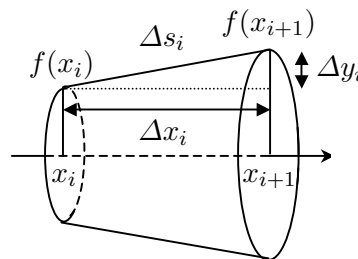


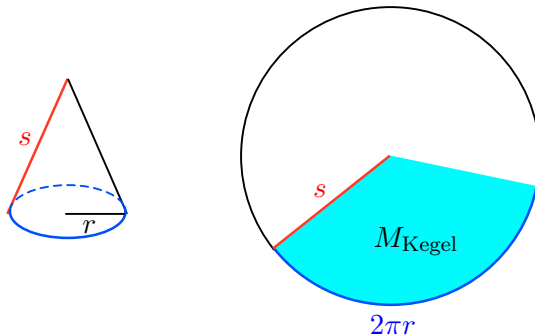
Die obere Kreishälfte wird durch $y = R + \sqrt{r^2 - x^2}$ und die untere durch $y = R - \sqrt{r^2 - x^2}$, jeweils für $|x| \leq r$, beschrieben. Die Hälfte des Torusvolumens V ergibt sich also zu

$$\begin{aligned} \frac{V}{2} &= \pi \int_0^r \left[\left(R + \sqrt{r^2 - x^2} \right)^2 - \left(R - \sqrt{r^2 - x^2} \right)^2 \right] dx = 4\pi R \int_0^r \sqrt{r^2 - x^2} dx \\ &= 4\pi R \frac{\pi r^2}{4} = \pi^2 R r^2. \end{aligned}$$

Wir wollen nun die Mantelfläche eines Rotationskörpers berechnen. Dazu zerlegen wir diesen in lauter angenäherte Kegelstümpfe.

Die Mantelfläche eines Kegels ergibt sich gemäß folgender Abbildung als Fläche eines Kreissektors.





$$M_{\text{Kegel}} = \pi s^2 \frac{2\pi r}{2\pi s} = \pi r s.$$

Für die Mantelfläche des Kegelstumpfs ergibt sich nun $M = \pi (r_2 s_2 - r_1 s_1)$ mit $s_2 := s_1 + \Delta s$. Nach dem Strahlensatz gilt $\frac{r_1}{s_1} = \frac{r_2}{s_2}$, d. h. $r_2 s_1 = r_1 s_2$, also

$$\begin{aligned} M &= \pi (r_2 s_2 - r_2 s_1 + r_1 s_2 - r_1 s_1) \\ &= \pi (r_2 \Delta s + r_1 \Delta s) = \pi (r_1 + r_2) \Delta s. \end{aligned}$$

Für die Mantelfläche eines Rotationskörpers erhält man damit

$$M \approx \sum_{i=1}^n \pi (f(x_i) + f(x_i + \Delta x_i)) \Delta s_i$$

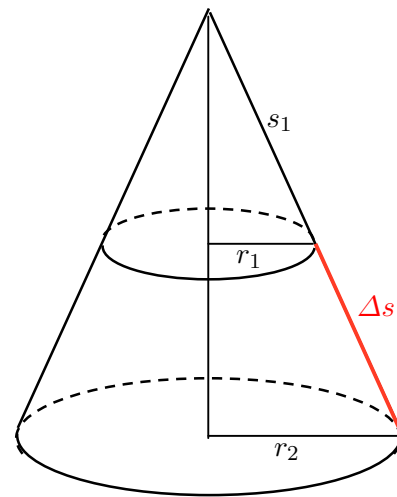
mit $\Delta s_i = \sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2} = \sqrt{1 + \frac{\Delta y_i^2}{\Delta x_i^2}} \Delta x_i$. Grenzübergang liefert mit der Näherung $f(x + \Delta x) \approx f(x)$ dann

$$M = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + f'(x)^2} dx.$$

Beispiel 7.11. (1) Kugeloberfläche M .

$$\frac{M}{2} = 2\pi \int_0^r \sqrt{r^2 - x^2} \sqrt{1 + \left(\frac{-2x}{2\sqrt{r^2 - x^2}}\right)^2} dx = 2\pi \int_0^r r dx = 2\pi r^2,$$

also $M = 4\pi r^2$.

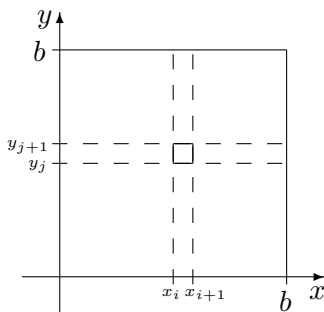


(2) Torusoberfläche M .

$$\begin{aligned} \frac{M}{2} &= 2\pi \int_0^r \left[f_1(x)^2 \sqrt{1 + f_1'(x)^2} + f_2(x) \sqrt{1 + f_2'(x)^2} \right] dx \\ &= 2\pi \int_0^r \left[\left(R + \sqrt{r^2 - x^2} \right) \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}} + \left(R - \sqrt{r^2 - x^2} \right) \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}} \right] dx \\ &= 4\pi R r \int_0^r \frac{dx}{\sqrt{r^2 - x^2}} \stackrel{t:=\frac{x}{r}}{=} 4\pi R r \int_0^1 \frac{r dt}{r\sqrt{1-t^2}} = 4\pi R r (\arcsin 1 - \arcsin 0) \\ &= 4\pi R r \frac{\pi}{2} = 2\pi^2 R r, \end{aligned}$$

also $M = 4\pi^2 R r$.

7.3.6 Schwerpunkt



Das dargestellte Quadrat sei mit Masse der Dichte $\rho(x, y)$ belegt. Wir suchen die Koordinaten x_s und y_s des Schwerpunkts.

Das Drehmoment eines Massepunktes bzgl. einer Achse ist definiert als Masse mal Achsenabstand. Für das Drehmoment des eingezeichneten Teilquadrats ergibt sich $\rho(x_i, y_j) \Delta x_i \Delta y_j y_j$ unter der Annahme, dass die Masse darauf näherungsweise gleichverteilt ist.

Das gesamte Drehmoment des Quadrats ist damit

$$\sum_{i,j=1}^n y_j \rho(x_i, y_j) \Delta x_i \Delta y_j \rightarrow \int_0^b \left(\int_0^b y \rho(x, y) dx \right) dy.$$

Andererseits ergibt sich das Drehmoment bzgl. der x -Achse als Gesamtmasse mal Abstand der Schwerpunkts von der x -Achse, also $m y_s$. Nun ist

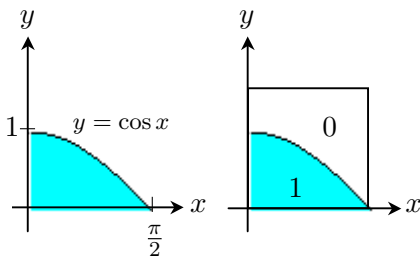
$$m \approx \sum_{i,j=1}^n \rho(x_i, y_j) \Delta x_i \Delta y_j, \quad \text{d. h.} \quad m = \int_0^b \left(\int_0^b \rho(x, y) dx \right) dy.$$

Es ergibt sich also

$$y_s = \frac{\int_0^b \left(\int_0^b y \rho(x, y) dx \right) dy}{\int_0^b \left(\int_0^b \rho(x, y) dx \right) dy} = \frac{\int_0^b \left(\int_0^b y \rho(x, y) dy \right) dx}{\int_0^b \left(\int_0^b \rho(x, y) dy \right) dx}$$

und analog

$$x_s = \frac{\int_0^b \left(\int_0^b x \rho(x, y) dx \right) dy}{\int_0^b \left(\int_0^b \rho(x, y) dx \right) dy} = \frac{\int_0^b \left(\int_0^b x \rho(x, y) dy \right) dx}{\int_0^b \left(\int_0^b \rho(x, y) dy \right) dx}.$$



Beispiel 7.12. Gesucht ist der Schwerpunkt (x_s, y_s) der mit Masse der konstanten Dichte $\rho(x, y) = 1$ ausgefüllten Fläche zwischen dem Graph der Funktion $f: [0, \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \cos x$, und der x -Achse. Wie in der Abbildung dargestellt, erweitert man sich diese Fläche gedanklich zu einem Quadrat, wo-

bei die zusätzliche Fläche mit Masse der Dichte 0 belegt sein soll. Nun gilt

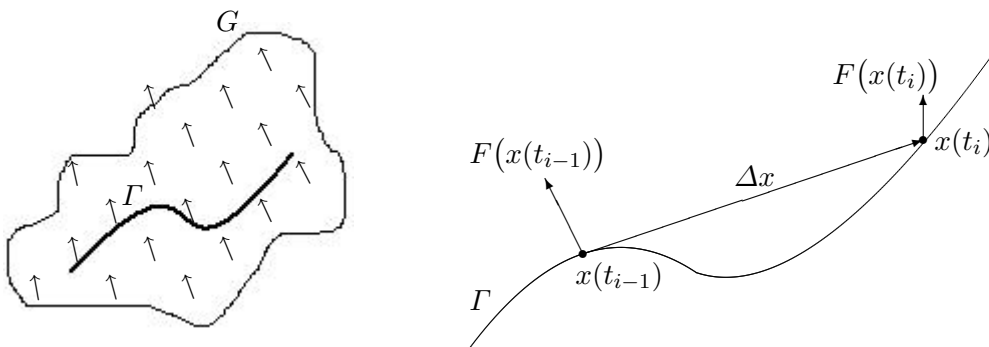
$$\begin{aligned} m &= \int_0^{\pi/2} \left(\int_0^{\pi/2} \rho(x, y) dy \right) dx = \int_0^{\pi/2} \left(\int_0^{\cos x} dy \right) dx = \int_0^{\pi/2} \cos x dx \\ &= 1, \\ \int_0^{\pi/2} \left(\int_0^{\pi/2} y \rho(x, y) dy \right) dx &= \int_0^{\pi/2} \left(\int_0^{\cos x} y dy \right) dx = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^2 x}{2} dx \\ &= \frac{1}{4} \int_0^{\pi/2} (1 + \cos(2x)) dx = \frac{1}{4} \left(x + \frac{\sin(2x)}{2} \right) \Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{8}, \\ \int_0^{\pi/2} \left(\int_0^{\pi/2} x \rho(x, y) dy \right) dx &= \int_0^{\pi/2} \left(\int_0^{\cos x} x dy \right) dx = \int_0^{\pi/2} x \cos x dx \end{aligned}$$

$$= \int_0^{\pi/2} x \, d \sin x = x \sin x \Big|_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \sin x \, dx = \frac{\pi}{2} - 1.$$

Also gilt $(x_s, y_s) = (\frac{\pi}{2} - 1, \frac{\pi}{8})$.

7.3.7 Arbeit

Seien $G \subset \mathbb{R}^m$ ein Gebiet und $\Gamma \subset G$ eine \mathcal{C}^1 -Kurve, die durch $x(t) = (x_1(t), \dots, x_m(t))$, $t \in [a, b]$, gegeben ist, und sei $F: G \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine stetige Funktion (das sogenannte **Kraftfeld**). Läuft t von a nach b , so wird auf der Kurve Γ eine Orientierung erzeugt.



Dann verrichtet das Kraftfeld eine Arbeit W längs der Kurve Γ (und $-W$ ist die Arbeit, die wir gegen das Feld verrichten, wenn wir uns entlang Γ bewegen). Für eine zeitlich konstante Kraft und einen geradlinigen Weg in Richtung der Kraft gilt Arbeit = Kraft · Weg.

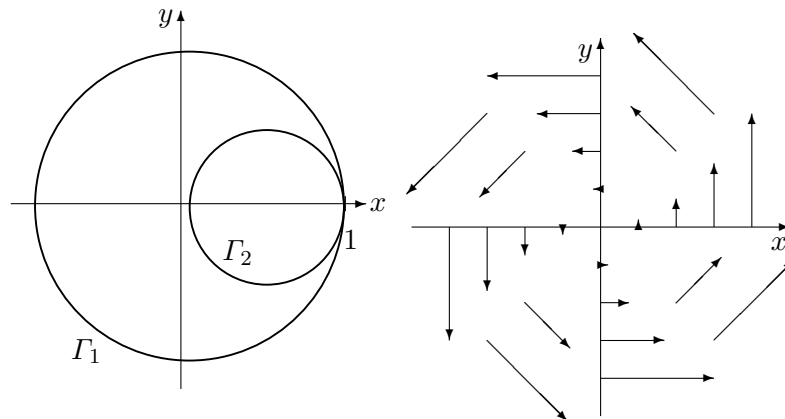
Wir erhalten $\Delta W \approx \langle F(x(t_i)), \Delta x \rangle$ mit $F = (F_1, \dots, F_m)^\top$ und $\Delta x = (\Delta x_1, \dots, \Delta x_m)^\top$. Dabei meint $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das (kanonische) Skalarprodukt. Er ergibt sich also

$$\begin{aligned} \Delta W &\approx F_1(x(t_i)) \Delta x_1 + \dots + F_m(x(t_i)) \Delta x_m \\ &= F_1(x(t_i)) \dot{x}_1(\xi_{1i}) \Delta t_i + \dots + F_m(x(t_i)) \dot{x}_m(\xi_{mi}) \Delta t_i \end{aligned}$$

durch Anwendung des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung (Korollar 5.1), und im Grenzübergang

$$W = \int_a^b [F_1(x(t)) \dot{x}_1(t) + \dots + F_m(x(t)) \dot{x}_m(t)] \, dt.$$

Beispiel 7.13. (1) Wir betrachten das Kraftfeld $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $F(x, y) = (F_1(x, y), F_2(x, y))$, mit $F_1(x, y) = -y$, $F_2(x, y) = x$, und bewegen uns darin entlang Γ_1 bzw. Γ_2 .



Die Kurve Γ_1 wird durch $x = x(t) = \cos t$, $y = y(t) = \sin t$ für $t \in [0, 2\pi]$ parametrisiert. Es gilt $\dot{x} = -\sin t$, $\dot{y} = \cos t$. Die vom Feld längs Γ_1 verrichtete Arbeit W_1 ist

$$\begin{aligned} W_1 &= \int_0^{2\pi} [F_1(\cos t, \sin t) \dot{x}(t) + F_2(\cos t, \sin t) \dot{y}(t)] dt \\ &= \int_0^{2\pi} [(-\sin t)^2 + \cos^2 t] dt = 2\pi. \end{aligned}$$

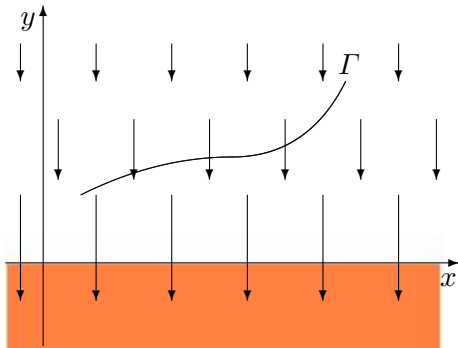
Die Parameterdarstellung des Kreises Γ_2 ist $x = x(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos t$, $y = y(t) = \frac{1}{2} \sin t$, $t \in [0, 2\pi]$. Längs Γ_2 verrichtet das Feld also die Arbeit

$$\begin{aligned} W_2 &= \int_0^{2\pi} \left[\left(-\frac{1}{2} \sin t \right)^2 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos t \right)^2 \left(\frac{1}{2} \cos t \right) \right] dt \\ &= \frac{1}{4} \cdot 2\pi + \underbrace{\frac{1}{4} \int_0^{2\pi} \cos t dt}_{=0} = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

In diesem Beispiel ist die Arbeit also wegabhängig.

- (2) Sei $F: \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq 0\} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $F(x, y) = (0, -\frac{1}{y})$, ein Kraftfeld. Längs einer beliebigen Kurve Γ mit $x = x(t)$, $y = y(t)$ mit $t \in [a, b]$ verrichtet das Feld die Arbeit

$$W = \int_a^b \left[0\dot{x}(t) - \frac{1}{y(t)} \dot{y}(t) \right] dt = - \int_a^b \frac{\dot{y}(t)}{y(t)} dt = - \log |y(t)| \Big|_a^b = \log \frac{|y(a)|}{|y(b)|}.$$



Dieses Kraftfeld F entspricht bis auf einen konstanten Faktor mg ($m =$ Masse des im Feld bewegten Körpers, $g =$ Erdbeschleunigung) dem Gravitationsfeld eines Zylinders (oder einer zweidimensionalen Erde). Wenn wir darin etwas von der Höhe h_1 auf die Höhe h_2 längs eines beliebigen Weges heben, so verrichten wir stets die Arbeit $W = \log \frac{h_2}{h_1}$. In diesem Fall ist die Arbeit also wegunabhängig.

7.4 Uneigentliche Integrale

Diese sind eigentlich wichtiger als eigentliche Integrale. Sie spielen eine wichtige Rolle in der Physik.

Bisher haben wir vorausgesetzt, dass $[a, b]$ ein beschränktes Intervall ist und dass $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion ist. Unter diesen Voraussetzungen spricht man von **eigentlichen Integralen**. Wird eine dieser Bedingungen verletzt, hat man es mit **uneigentlichen Integralen** zu tun.

Wir beginnen unsere Betrachtungen mit unbeschränkten Intervallen.

Definition 7.5. Sei $f: [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion und sei $f \in \mathcal{R}[a, b]$ für jedes $b > a$. Wenn die Integrale $\int_a^b f(x) dx$ für $b \rightarrow \infty$ gegen einen Grenzwert streben, so nennt man diesen das **uneigentliche Integral** von f über $[a, \infty)$ und bezeichnet ihn mit

$$\int_a^{\infty} f(x) dx.$$

Im Existenzfall gilt also

$$\int_a^{\infty} f(x) dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx,$$

und man sagt dann, dass das Integral **konvergiert**.

Beispiel 7.14. (1) Es gilt

$$\int_1^b \frac{dx}{x} = \log x \Big|_1^b = \log b \rightarrow \infty \text{ für } b \rightarrow \infty.$$

Die Fläche zwischen dem Graph von $f(x) = \frac{1}{x}$ und der x -Achse auf $[1, \infty)$ ist also unendlich groß.

(2) Für $\alpha \neq 1$ gilt

$$\int_1^b \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} \Big|_1^b \rightarrow \begin{cases} \infty & : \alpha < 1, \\ \frac{1}{\alpha-1} & : \alpha > 1. \end{cases}$$

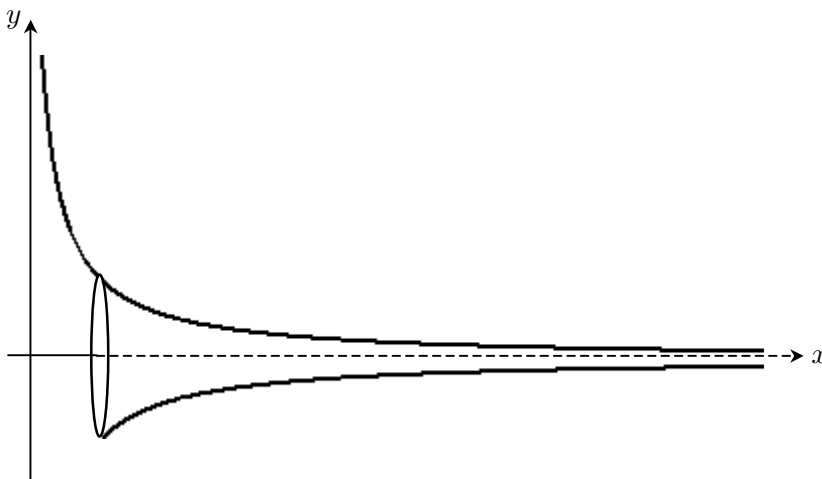
Für $\alpha > 1$ ist also die Fläche, die vom Graph von $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$ und der x -Achse in $[1, \infty)$ eingeschlossen wird, endlich. Für $\alpha < 1$ ist sie unendlich groß.

Ähnlich wie für Reihen gibt es bei uneigentlichen Integralen Konvergenzkriterien, z. B. das folgende Vergleichskriterium: Sind $f, g \in \mathcal{R}[a, b]$, $b > a$, mit $0 \leq f(x) \leq g(x)$ für alle $x \in [a, \infty)$, so gilt

$$\int_a^{\infty} g(x) \, dx \text{ konvergent} \implies \int_a^{\infty} f(x) \, dx \text{ konvergent},$$

$$\int_a^{\infty} f(x) \, dx \text{ divergent} \implies \int_a^{\infty} g(x) \, dx \text{ divergent}.$$

Beispiel 7.15. Wir betrachten eine unendliche Glasröhre, die entsteht, wenn $y = \frac{1}{x}$, $x \in [1, \infty)$, um die x -Achse rotiert. Uns interessieren Volumen V und Mantelfläche M des Rotationskörpers.



Es gilt

$$V = \pi \int_1^{\infty} f(x)^2 \, dx = \pi \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2} = \pi,$$

$$M = 2\pi \int_1^{\infty} f(x) \sqrt{1 + f'(x)^2} \, dx = 2\pi \int_1^{\infty} \frac{1}{x} \sqrt{1 + \frac{1}{x^4}} \, dx \stackrel{*}{\geq} 2\pi \int_1^{\infty} \frac{dx}{x} = \infty$$

(* nach obigem Vergleichskriterium). Die Oberfläche der Glasröhre ist unendlich, lässt sich also nicht mit endlich viel Farbe anstreichen. Ihr Volumen ist aber endlich und Färbung erreicht man durch Hineinfüllen von Farbe.

Analog zur Definition 7.5 setzt man

$$\int_{-\infty}^a f(x) dx := \lim_{b \rightarrow \infty} \int_{-b}^a f(x) dx.$$

Das Integral von $-\infty$ bis $+\infty$ wird wie folgt erklärt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx := \int_{-\infty}^a f(x) dx + \int_a^{\infty} f(x) dx,$$

wobei a beliebig gewählt werden kann. Das Integral $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$ existiert also genau dann, wenn die beiden Integrale $\int_{-\infty}^a f(x) dx$ und $\int_a^{\infty} f(x) dx$ existieren, d. h. wenn zwei Grenzwerte existieren. Wir haben

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_{-b}^a f(x) dx + \lim_{c \rightarrow \infty} \int_a^c f(x) dx$$

und dafür schreibt man einfach

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \lim_{\substack{b \rightarrow \infty \\ c \rightarrow \infty}} \int_{-b}^c f(x) dx.$$

Wenn der Grenzwert

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \int_{-b}^b f(x) dx$$

existiert, so nennt man diesen den **CAUCHYSchen Hauptwert** des Integrals und schreibt

$$\text{v.p.} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx \quad \text{oder} \quad \text{p.v.} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx.$$

Wenn das Integral $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$ existiert, so natürlich auch der CAUCHYSche Hauptwert. Aus der Existenz des Hauptwerts folgt aber nicht die Existenz des Integrals.

Beispiel 7.16. (1) Das Integral $\int_{-\infty}^{\infty} \cos x dx$.

$$\int_0^{\infty} \cos x dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b \cos x dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \sin b$$

existiert nicht, also ist $\int_{-\infty}^{\infty} \cos x \, dx$ nicht konvergent (man sagt auch divergent). Der CAUCHYSche Hauptwert

$$\text{p.v.} \int_{-\infty}^{\infty} \cos x \, dx = \lim_{a \rightarrow \infty} \int_{-a}^a \cos x \, dx = \lim_{a \rightarrow \infty} \sin x \Big|_{-a}^a = \lim_{a \rightarrow \infty} 2 \sin a$$

existiert ebenfalls nicht.

(2) $\int_{-\infty}^{\infty} \sin x \, dx$ existiert auch nicht, denn

$$\int_0^b \sin x \, dx = -\cos x \Big|_0^b = 1 - \cos b$$

hat für $b \rightarrow \infty$ keinen Grenzwert, aber der Hauptwert existiert:

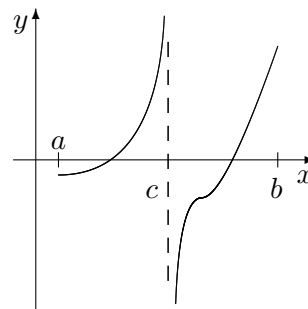
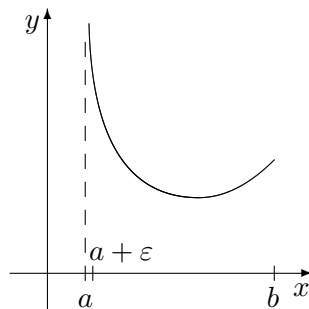
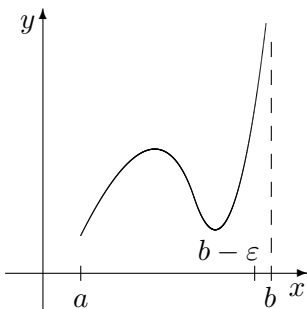
$$\text{p.v.} \int_{-\infty}^{\infty} \sin x \, dx = \lim_{a \rightarrow \infty} \int_{-a}^a \sin x \, dx = \lim_{a \rightarrow \infty} -\cos x \Big|_{-a}^a = 0.$$

Wir betrachten nun den Fall, dass der Integrand unbeschränkt ist.

Definition 7.6. Sei $f: [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ aus $\mathcal{R}[a, b - \varepsilon]$ für alle hinreichend kleinen $\varepsilon > 0$. Existiert der Grenzwert

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x) \, dx,$$

so heißt dieser **uneigentliches Integral** von f über $[a, b)$ und wird mit $\int_a^b f(x) \, dx$ bezeichnet. Man spricht dann auch von **Konvergenz** des Integrals, ansonsten von **Divergenz**.



Für $f: (a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ definiert man entsprechend

$$\int_a^b f(x) dx := \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{a+\delta}^b f(x) dx.$$

Für $f: [a, c) \cup (c, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ist das uneigentliche Integral definiert als

$$\int_a^b f(x) dx := \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_a^{c-\varepsilon} f(x) dx + \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{c+\delta}^b f(x) dx.$$

Es existiert also genau dann, wenn diese beiden Grenzwerte existieren. Der CAUCHYSche Hauptwert ist

$$\text{p.v.} \int_a^b f(x) dx := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_a^{c-\varepsilon} f(x) dx + \int_{c+\varepsilon}^b f(x) dx \right).$$

Beispiel 7.17. (1) Es ist

$$\int_0^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\delta}^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\delta \rightarrow 0} \log x \Big|_{\delta}^1 = \lim_{\delta \rightarrow 0} (-\log \delta) = \infty.$$

Die Fläche zwischen $y = \frac{1}{x}$, $x \in [0, 1]$ und der x -Achse ist also unendlich.

(2) $\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$. Für $\alpha \neq 1$ haben wir

$$\int_{\delta}^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} \Big|_{\delta}^1 = \frac{1}{1-\alpha} - \frac{\delta^{1-\alpha}}{1-\alpha} \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha} & : \alpha < 1, \\ \infty & : \alpha > 1, \end{cases}$$

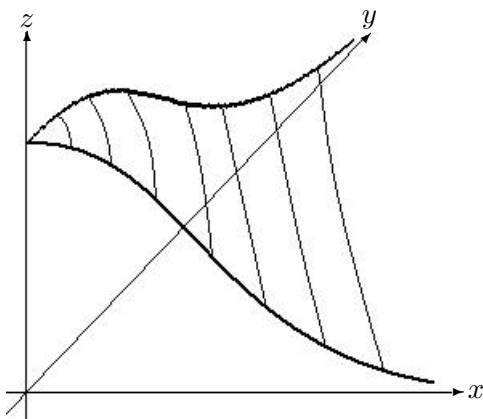
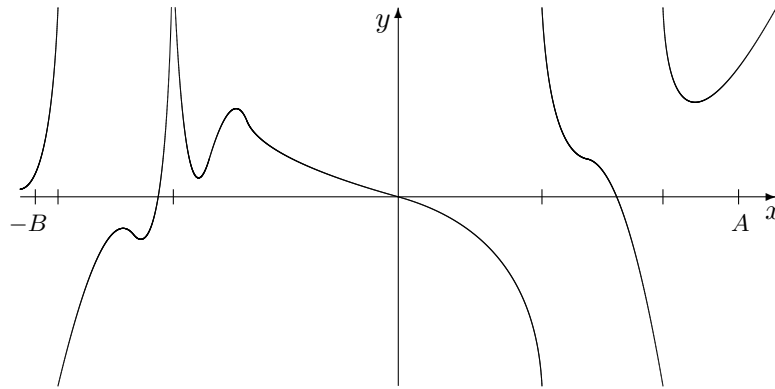
d. h. $\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$ konvergiert für $\alpha < 1$ und divergiert für $\alpha > 1$. Was das für die Flächen zwischen $y = \frac{1}{x^\alpha}$ und der x -Achse bedeutet, ist klar.

(3) Wir wissen, dass $\int_0^3 \frac{dx}{x-1}$ divergiert. Wir untersuchen, ob der CAUCHYSche Hauptwert existiert. Es ist

$$\begin{aligned} \int_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{x-1} + \int_{1+\varepsilon}^3 \frac{dx}{x-1} &= \log |x-1| \Big|_0^{1-\varepsilon} + \log |x-1| \Big|_{1+\varepsilon}^3 = \log \varepsilon + \log 2 - \log \varepsilon \\ &= \log 2 \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \log 2, \end{aligned}$$

d. h. p.v. $\int_0^3 \frac{dx}{x-1} = \log 2.$

Es dürfte auch klar sein, wie man bei unbeschränkten Funktionen auf unbeschränkten Intervallen vorgeht. Um im dargestellten Fall $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$ zu berechnen, sind zehn Grenzwerte zu bestimmen. Sobald aber einer dieser Grenzwerte nicht existiert, existiert auch das Integral nicht.



Oft kennt man die Werte uneigentlicher Integrale, von denen keine elementaren Stammfunktionen existieren, etwa

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}, \quad \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

Die Beweise gelingen mittels der Residuentheorie in der Funktionentheorie. Für das erste dieser beiden unbestimmten Integrale gibt es auch folgenden schönen Beweis (der allerdings Anleihe aus der Theorie der Mehrfachintegrale macht): Das Volumen des Körpers unter der links abgebildeten Fläche ist

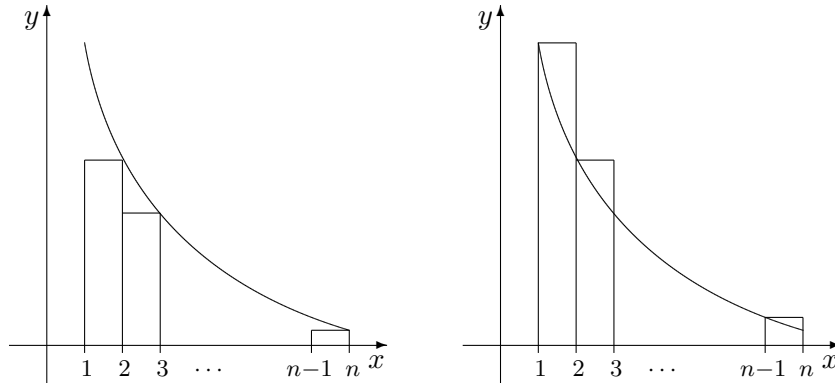
$$V = \int_0^{\infty} \left(\int_0^{\infty} e^{-x^2-y^2} dy \right) dx = \int_0^{\infty} \left(\int_0^{\infty} e^{-x^2} e^{-y^2} dy \right) dx = \left(\int_0^{\infty} e^{-y^2} dy \right) \left(\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx \right) =: I^2.$$

Geht man in der x - y -Ebene zu Polarkoordinaten über, $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$ für $0 < r < \infty$, $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$, so ist $dx dy = r dr d\varphi$ (das ist unsere Anleihe). Für besagtes Volumen erhalten wir also

$$V = \int_0^{\pi/2} \left(\int_0^{\infty} e^{-r^2} r dr \right) d\varphi = \frac{\pi}{2} \int_0^{\infty} e^{-r^2} r dr = -\frac{\pi}{4} \int_0^{\infty} e^{-r^2} d(-r^2).$$

Folglich ist $I^2 = \frac{\pi}{4}$.

Uneigentliche Integrale und Reihen



Sei $f: [1, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ eine monoton fallende Funktion. Wir haben dann

$$f(2) + f(3) + \cdots + f(n) \leq \int_1^n f(x) \, dx \leq f(1) + f(2) + \cdots + f(n-1).$$

Wir erhalten also

$$\sum_{k=1}^{\infty} f(k) \text{ konvergent} \iff \int_1^{\infty} f(x) \, dx \text{ konvergent.}$$

So ist beispielsweise

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha} \text{ konvergent} \iff \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^\alpha} \text{ konvergent} \iff \alpha > 1.$$

Wir erhalten auch

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \approx \int_1^n \frac{dx}{x} = \log n.$$

Diese Abschätzung ist nicht schlecht, denn nach EULER gilt

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \log n + C + o(1)$$

mit der EULER-MASCHERONI-Konstante $C = 0.577215\dots$. Z. B. durch vollständige Induktion kann man

$$1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2$$

zeigen. In abgeschwächter Form ergibt sich

$$1^3 + 2^3 + \dots + n^3 \approx \int_1^n x^3 dx = \frac{x^4}{4} \Big|_1^n \approx \frac{n^4}{4}$$

oder auch

$$1^\alpha + 2^\alpha + \dots + n^\alpha \approx \int_1^n x^\alpha dx \approx \frac{n^{\alpha+1}}{\alpha+1}, \quad \alpha > 0.$$

Dies lässt sich durch eine RIEMANNSche Integralsumme (*) exakt abschätzen:

$$\left(\left(\frac{1}{n} \right)^3 + \left(\frac{2}{n} \right)^3 + \dots + \left(\frac{n}{n} \right)^3 \right) \frac{1}{n} = \underbrace{\sum_{j=1}^n \left(\frac{j}{n} \right)^3 \frac{1}{n}}_{(*)} \rightarrow \int_0^1 x^3 dx = \frac{1}{4},$$

d. h.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^3 + 2^3 + \dots + n^3}{n^4} = \frac{1}{4} \iff 1^3 + 2^3 + \dots + n^3 \sim \frac{n^4}{4}.$$

Definition 7.7. Das uneigentliche Integral $\int_a^\infty f(x) dx$ heißt **absolut konvergent**, wenn $\int_a^\infty |f(x)| dx$ konvergiert.

So ist z. B. $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx$ konvergent, aber nicht absolut konvergent.

Wie bei Reihen ist das Rechnen mit absolut konvergenten Integralen relativ gefahrlos, ansonsten ist Vorsicht geboten.

Die Gamma-Funktion

Dies ist eine der wichtigsten nichtelementaren Funktionen. Sie ist durch

$$\Gamma(x) := \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt, \quad x > 0,$$

also ein uneigentliches Integral, definiert. Man stellt leicht fest, dass es im Unendlichen und in der Null keine Probleme bereitet, d. h. für alle $x > 0$ konvergiert, denn es gilt $0 < t^{x-1} e^{-t} < e^{-t/2}$. Das Vergleichskriterium für Integrale liefert damit die Konvergenz im Unendlichen. Für $t \rightarrow 0$ haben wir eine Singularität, falls $0 < x < 1$ gilt. Beispiel 7.17 (2) liefert mit $\alpha := 1 - x$ Konvergenz.

Wir haben

$$\begin{aligned}\Gamma(x+1) &= \int_0^{\infty} t^x e^{-t} dt = \int_0^{\infty} t^x d \frac{e^{-t}}{-1} = \underbrace{-t^x e^{-t} \Big|_0^{\infty}}_{=0} + \int_0^{\infty} e^{-t} dt^x \\ &= x \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt = x \Gamma(x),\end{aligned}$$

d. h. es gilt die Funktionalgleichung $\Gamma(x+1) = x \Gamma(x)$ für alle $x > 0$.

Mit $\Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-t} dt = -e^{-t} \Big|_0^{\infty} = 1$ folgt damit

$$\Gamma(2) = 1\Gamma(1) = 1, \quad \Gamma(3) = 2\Gamma(2) = 2 \cdot 1, \quad \Gamma(4) = 3\Gamma(3) = 3 \cdot 2 \cdot 1, \quad \dots,$$

also $\Gamma(n) = (n-1)!$ für jedes $n \in \mathbb{N}$.

Des weiteren haben wir

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt \stackrel{t:=x^2}{=} \int_0^{\infty} \frac{e^{-x^2}}{x} 2x dx = \sqrt{\pi},$$

also

$$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

sowie

$$\begin{aligned}\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) &= \left(n - \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(n - \frac{1}{2}\right) = \left(n - \frac{1}{2}\right) \left(n - \frac{3}{2}\right) \Gamma\left(n - \frac{3}{2}\right) \\ &= \dots = \left(n - \frac{1}{2}\right) \left(n - \frac{3}{2}\right) \dots \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{(2n-1) \dots 3 \cdot 1}{2^n} \sqrt{\pi} = \frac{(2n)(2n-1) \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2^n n! 2^n} \sqrt{\pi} = \frac{(2n)!}{4^n n!} \sqrt{\pi},\end{aligned}$$

für $n \in \mathbb{N}$. Die Gamma-Funktion ist (für $x > 0$) die Erweiterung der Fakultät $\Gamma(n) = (n-1)!$ auf positive reelle Argumente.

Die Gamma-Funktion tritt oft bei bestimmten Integralen auf, z. B. gilt

$$\int_0^1 x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} dx = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} =: B(\alpha, \beta) \quad (\text{Beta-Funktion})$$

für $\alpha, \beta > 0$.

Beweis. Etwa Fichtenholz Nr. 531 oder auch

$$\int_0^{\pi/2} (\sin x)^{\alpha-1} (\cos x)^{\beta-1} dx = \frac{\Gamma(\frac{\alpha}{2})\Gamma(\frac{\beta}{2})}{2\Gamma(\frac{\alpha+\beta}{2})} = \frac{1}{2} B\left(\frac{\alpha}{2}, \frac{\beta}{2}\right).$$

Der Nachweis gelingt durch die Substitution $t := \sin^2 x \Leftrightarrow \frac{dt}{dx} = 2 \cos x \sin x$ wie folgt:

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} (\sin x)^{\alpha-1} (\cos x)^{\beta-1} dx &= \int_0^1 (\sqrt{t})^{\alpha-1} (\sqrt{1-t})^{\beta-1} \frac{dt}{2 \cos x \sin x} \\ &= \int_0^1 t^{\frac{\alpha-1}{2}} (1-t)^{\frac{\beta-1}{2}} \frac{dt}{2\sqrt{1-t}t} \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 t^{\frac{\alpha}{2}-1} (1-t)^{\frac{\beta}{2}-1} dt = \frac{\Gamma(\frac{\alpha}{2})\Gamma(\frac{\beta}{2})}{2\Gamma(\frac{\alpha+\beta}{2})}. \end{aligned}$$

□

Insbesondere ist damit

$$\int_0^{\pi/2} \sin^n x dx = \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{2\Gamma(\frac{n+2}{2})} = \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)} \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Im Beispiel 7.5 hatten wir dafür eine Rekursion gefunden und mussten das Endresultat aufteilen in $n = 2k$ und $n = 2k + 1$. Diese ist natürlich äquivalent zu diesem Ergebnis, wie man sich leicht überlegt.

Die Gamma-Funktion wächst schnell. Für $x \rightarrow \infty$ gilt die **STIRLING⁶sche Formel⁷**

$$\Gamma(x+1) = x^x e^{-x} \sqrt{2\pi x} \left(1 + \frac{1}{12x} + \frac{1}{288x^2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{x^3}\right)\right)$$

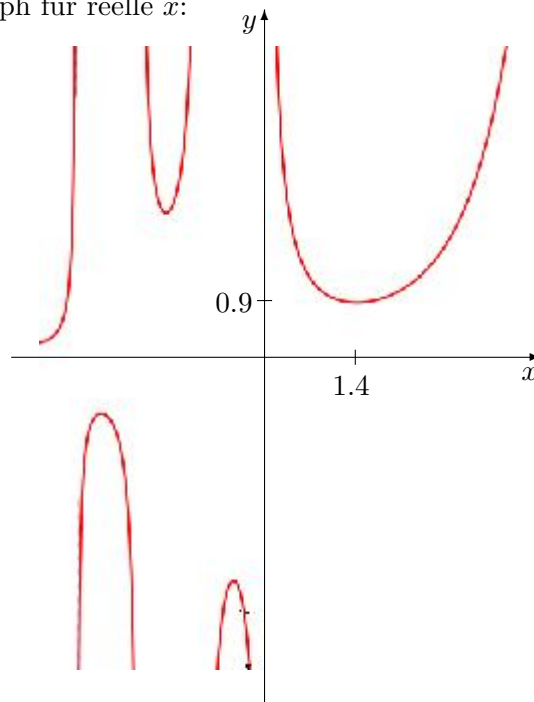
⁶James STIRLING (1692 - 1770), schottischer Mathematiker. Beiträge zur Theorie der Kubiken, Newtonschen Interpolationstheorie und zu verschiedenen Reihenentwicklungen.

⁷Man findet auch $\Gamma(n+1) = n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$ für $n \rightarrow \infty$.

bzw. in logarithmischer Form

$$\log \Gamma(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right) \log x - x + \frac{1}{2} \log(2\pi) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{x}\right).$$

Die Gamma-Funktion kann auf negative reelle (und sogar auf komplexe) Argumente erweitert werden. Graph für reelle x :



7.5 Das RIEMANN-STIELTJES-Integral

Hierbei handelt es sich um Integrale der Form $\int_a^b f(x) dg(x)$, wobei g nicht notwendigerweise differenzierbar ist. Das RIEMANN-STIELTJES⁸-Integral ist definiert als Grenzwert der Integralsummen

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta g_i, \quad \Delta g_i := g(x_i) - g(x_{i-1}).$$

Für $g(x) = x$ ergibt sich also das gewöhnliche RIEMANN-Integral.

Satz 7.12. Sei $f \in \mathcal{C}[a, b]$ und sei g eine Funktion auf $[a, b]$, die in

$$a = c_0 < c_1 < \cdots < c_{m-1} < c_m = b$$

möglicherweise Sprünge hat und in

$$[c_0, c_1], [c_1, c_2], \dots, [c_{m-1}, c_m]$$

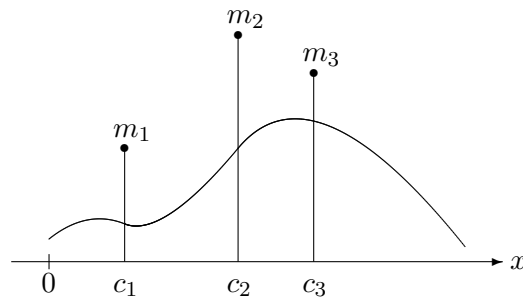
(in den Randpunkten jeweils einseitig) stetig differenzierbar ist. Dann existiert das RIEMANN-STIELTJES-Integral $\int_a^b f(x) dg(x)$ und es gilt

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dg(x) &= \int_a^b f(x) g'(x) dx + f(a) (g(a+0) - g(a)) \\ &\quad + \sum_{j=1}^m f(c_j) (g(c_j+0) - g(c_j-0)) + f(b) (g(b) - g(b-0)). \end{aligned}$$

Den physikalischen Beweis dieser Formel liefert das folgende Beispiel.

Beispiel 7.18. RIEMANN-STIELTJES-Integrale treten dort auf, wo Größen sowohl kontinuierlich als auch diskret verteilt sein können. Man stelle sich z. B. einen Stab vor, auf dem Masse der Dichte $\rho(x)$ „verschmiert“ wurde und in den Punkten c_j Massepunkte der Masse m_j (das können Schweißpunkte sein) sitzen:

⁸Thomas Jean STIELTJES (1856 - 1894), niederländischer Mathematiker. Sein Interesse galt der Analysis und Zahlentheorie. Wenige Jahre vor seinem Tod wurde er Professor für Differential- und Integralrechnung.



Gesucht ist nun das Drehmoment M (auch statisches Moment) im Ursprung, wenn man diesen Stab an einem seiner Enden in der Wand verankert. Nimmt man an, dass in $[x_i, x_{i+1}]$ die Dichte konstant $\rho(x_i)$ ist, so ergibt sich

$$M \approx \sum_{i=1}^n x_i \rho(x_i) \Delta x_i + \sum_{j=1}^k c_j m_j$$

und nach Übergang zum Grenzwert

$$M = \int_a^b x \rho(x) dx + \sum_{j=1}^k c_j m_j.$$

Setzt man $\Phi(x) :=$ Masse von $[0, x]$, so ist

$$M \approx \sum_{i=1}^n x_i [\Phi(x_{i+1}) - \Phi(x_i)] dx,$$

und im Grenzwert

$$M = \int_a^b x d\Phi(x).$$

7.6 Das LEBESGUE-Integral

Für den Hausgebrauch reicht das RIEMANN-Integral völlig aus. Verlässt man seine vier Wände, so stellt man aber fest, dass das RIEMANN-Integral eine Reihe schwerwiegender Defekte hat. Deshalb hat man nach anderen Integralbegriffen gesucht und mit dem **LEBESGUE-Integral** einen vernünftigen gefunden.

Motivation 1

In \mathbb{R} gilt das CAUCHYSche Konvergenzkriterium (Satz 2.14):

$$\{a_n\} \text{ ist konvergent} \iff \{a_n\} \text{ ist eine CAUCHY-Folge.}$$

Dies besagt, dass \mathbb{R} vollständig ist (z. B. sind $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ oder \mathbb{Q} nicht vollständig, denn wir finden darin konvergente Folgen, deren Limites nicht in $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ bzw. in \mathbb{Q} liegen).

Es gibt den Begriff des **metrischen Raums**. Dies sind Mengen X , in denen der Abstand $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ zweier beliebiger Elemente $x, y \in X$ definiert ist, wobei gewisse Axiome (positive Definitheit, Symmetrie, Dreiecksungleichung) gelten. Z. B. sind $X = \mathbb{R}$ oder \mathbb{Q} metrische Räume mit $d(x, y) = |x - y|$. In solchen metrischen Räumen X definiert man

$$\{a_n\} \text{ aus } X \text{ ist } \mathbf{konvergent} : \iff \exists a \in X : d(a, a_n) \rightarrow 0$$

und

$$\{a_n\} \text{ aus } X \text{ heißt } \mathbf{CAUCHY-Folge} : \iff \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{R} : d(a_n, a_m) < \varepsilon \forall n, m > N.$$

Ein metrischer Raum heißt **vollständig**, wenn in ihm das CAUCHYSche Konvergenzkriterium gilt.

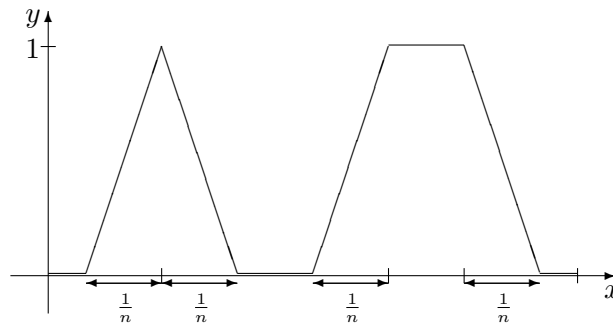
Man kann zeigen, dass es für jeden metrischen Raum eine im Wesentlichen eindeutig bestimmte sogenannte **Vervollständigung** gibt. Dies ist ein vollständiger metrischer Raum \tilde{X} mit Abstand \tilde{d} , so dass gilt:

- $X \subset \tilde{X}$ und $\tilde{d}(x, y) = d(x, y) \forall x, y \in X$,
- X ist **dicht** in \tilde{X} , d. h. $\forall \tilde{x} \in \tilde{X} \forall \varepsilon > 0 \exists x \in X : \tilde{d}(x, \tilde{x}) < \varepsilon$.

Wir betrachten nun die Menge $X = \mathcal{C}[a, b]$ mit dem Abstand

$$d: X \times X \longrightarrow \mathbb{R}, \quad d(f, g) := \int_a^b |f(x) - g(x)| dx.$$

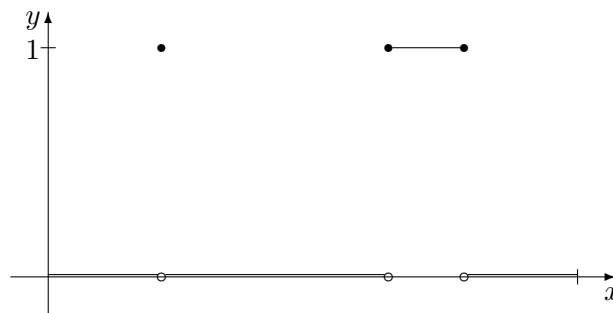
Dass eine Folge $\{f_n\}$ aus X gegen f konvergiert, $f_n \rightarrow f$, bedeutet also $\int_a^b |f(x) - f_n(x)| dx \rightarrow 0$ (**Konvergenz im Mittel**). Ist nun $(\mathcal{C}[a, b], d)$ ein vollständiger metrischer Raum? Die Antwort ist nein. Man betrachte etwa die Folge $\{f_n\}$ in der Abbildung:



Diese ist zwar eine CAUCHY-Folge,

$$d(f_n, f_m) \leq 4 \left(\frac{1}{2n} + \frac{1}{2m} \right) \rightarrow 0,$$

aber die Grenzfunktion f :



ist kein Element von $\mathcal{C}[a, b]$. Erweitern wir $\mathcal{C}[a, b]$ also zu $\mathcal{R}[a, b]$. Ist $(\mathcal{R}[a, b], d)$ ein vollständiger metrischer Raum? Nein, immer noch nicht. Erweitert man aber $\mathcal{R}[a, b]$ zur Menge $\mathcal{L}(a, b)$ aller LEBESGUE-integrierbaren Funktionen, so ergibt sich ein vollständiger metrischer Raum. Man kann sagen: $\mathcal{L}(a, b)$ ist für $\mathcal{R}[a, b]$ das, was \mathbb{R} für \mathbb{Q} ist.

Allerdings folgt in $\mathcal{L}(a, b)$ aus $d(f, g) = 0$ noch nicht $f = g$ (positive Definitheit). Packt man alle Funktionen, die voneinander den Abstand 0 haben, in eine Äquivalenzklasse, so bildet die Faktormenge einen vollständigen metrischen Raum, der mit $L^1(a, b)$ bezeichnet wird.

Motivation 2

Für jede Funktion $f \in \mathcal{R}[a, b]$ kann man die sogenannte **FOURIER-Reihe**,

$$f(t) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k e^{ikt},$$

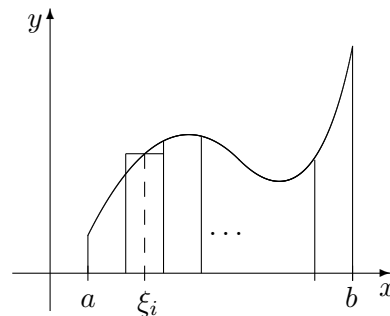
bilden (dazu später). Dabei ist $f_k := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-ikt} dt$. Man fasst $f(t)$ als Darstellung von f im **Zeitbereich** auf und die Folge $\{f_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$ als Darstellung von f im sogenannten **Frequenzbereich**.

Es gilt die **PARSEVALSche Gleichung** $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |f_k|^2$. Insbesondere ist $\sum |f_k|^2 < \infty$ für jede Funktion $f \in \mathcal{R}[0, 2\pi]$.

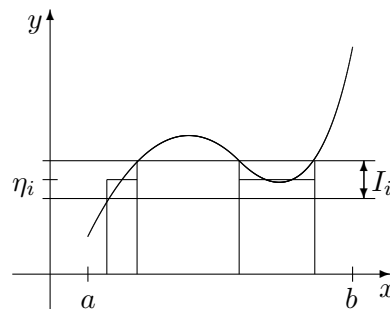
Es entsteht folgende Frage: Gibt es für jede Folge $\{f_k\}$ mit $\sum |f_k|^2 < \infty$ eine Funktion $f \in \mathcal{R}[a, b]$, so dass $\{f_k\}$ die Folge der FOURIER-Koeffizienten von f ist? Die Antwort ist nein. Die Frage kann aber mit ja beantwortet werden, wenn man Funktionen zulässt, deren Betragsquadrat LEBESGUE-integrierbar ist. Die Menge dieser Funktionen bezeichnet man mit $L^2(0, 2\pi)$. Bezeichnet man weiter die Menge aller quadratsummierbaren Folgen, d. h. Folge $\{f_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$ mit $\sum |f_k|^2 < \infty$, mit ℓ^2 , so gilt also $L^2 = \ell^2$. Die Quantenmechaniker SCHRÖDINGER bzw. HEISENBERG arbeiteten in L^2 bzw. ℓ^2 . Die Formel $L^2 = \ell^2$ besagt nun, dass beide Theorien dasselbe aussagen.

Grundgedanke des LEBESGUE-Integrals

Das RIEMANN-Integral erhält man durch Zerlegung der x -Achse, Wahl von Zwischenpunkten ξ_i und anschließender Bildung der Integralsummen $\sum_i f(\xi_i) \Delta x_i$.



Zur Bestimmung des LEBESGUE-Integrals unterteilt man stattdessen die y -Achse, wählt Zwischenpunkte η_i und bildet die Integralsummen $\sum_i \eta_i \mu(f^{-1}(I_i))$, wobei $\mu(I_i)$ die Länge bzw. das Maß von I_i (siehe Abbildung) ist.

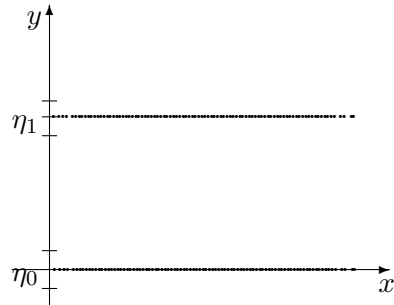


Das Problem hierbei ist, dass man zunächst verstehen muss, was $\mu(E)$ für sehr komplizierte Mengen E ist. Z. B. ist die DIRICHLET-Funktion

$$\chi(x) = \begin{cases} 1 & : x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \\ 0 & : x \in \mathbb{Q}, \end{cases} \quad x \in [0, 1],$$

nicht RIEMANN-integrierbar. Bezeichnet man aber mit I die irrationalen Zahlen aus $[0, 1]$ und mit R die rationalen Zahlen aus $[0, 1]$, so gilt für die LEBESGUESchen Integralsummen

$$\eta_1 \mu(I) + \eta_0 \mu(R) = \eta_1 \cdot 1 + \eta_0 \cdot 0 = \eta_1 \rightarrow 1,$$



d. h.

$$(L) \int_0^1 \chi(x) dx = 1.$$

Das genannte Problem führt in die Maßtheorie. Gesucht ist eine Abbildung $\mu: \mathcal{P}(\mathbb{R}) \rightarrow (0, \infty)$, wobei $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ die Potenzmenge von \mathbb{R} bezeichnet, mit folgenden Eigenschaften:

$$\begin{aligned} \mu([a, b]) &= \mu([a, b)) = \mu((a, b]) = \mu((a, b)) = b - a, \\ \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) &= \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n), \text{ falls } A_i \cap A_j = \emptyset \text{ für } i \neq j, \\ \mu(E + a) &= \mu(E) \quad \forall a \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Man kann zeigen, dass es solch eine Abbildung nicht gibt.

LEBESGUE hat aber eine große Teilmenge $\mathfrak{M} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})$ gefunden, so dass es genau eine Abbildung $\mu: \mathfrak{M} \rightarrow [0, \infty]$ mit obigen Eigenschaften gibt. Die Mengen aus \mathfrak{M} nennt man **LEBESGUE-messbar** und μ das **LEBESGUE-Maß**.

Eine Funktion $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ heißt **LEBESGUE-messbar**, wenn $f^{-1}(I) \in \mathfrak{M}$ für jedes Intervall $I \subset \mathbb{R}$ gilt. Die Menge der messbaren Funktionen ist riesig. Man muss sich sehr anstrengen, eine Funktion zu konstruieren, die nicht LEBESGUE-messbar ist.

LEBESGUE zeigte, dass für jede messbare Funktion $f \geq 0$ die Integralsummen $\sum_i \eta_i \mu(f^{-1}(I_i))$ gegen einen Grenzwert aus $[0, \infty]$ streben, falls $\max_i |I_i| \rightarrow 0$. Für jede messbare Funktion $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f \geq 0$ ist also das LEBESGUE-Integral

$$(L) \int_a^b f(x) dx$$

definiert. Für eine beliebige messbare Funktion $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ setzt man

$$f_+ := \max(f, 0) \geq 0, \quad f_- := -\min(f, 0) \geq 0.$$

Dann gilt $f = f_+ - f_-$ und man definiert

$$(\text{L}) \int_a^b f(x) \, dx = (\text{L}) \int_a^b f_+(x) \, dx - (\text{L}) \int_a^b f_-(x) \, dx.$$

Dies ist bis auf den Fall $\infty - \infty$ stets definiert.

Funktionen aus $\mathcal{R}[a, b]$ sind immer auch LEBESGUE-integrierbar und es gilt

$$(\text{R}) \int_a^b f(x) \, dx = (\text{L}) \int_a^b f(x) \, dx.$$

8

Funktionenfolgen und Funktionenreihen

Sei $E \subset \mathbb{C}$ eine Menge. Eine **Funktionenfolge** auf E ist eine Folge $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ von Funktionen $f_n: E \rightarrow \mathbb{C}$, und eine **Funktionenreihe** auf E ist eine Reihe der Gestalt $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ von Funktionen $u_n: E \rightarrow \mathbb{C}$.

Beispiel 8.1. Die Ausdrücke $\{x^n\}_{n=1}^{\infty}$ bzw. $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$ beschreiben eine Funktionenfolge bzw. -reihe mit $f_n = u_n: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $f_n(x) = x^n$.

8.1 Punktweise und gleichmäßige Konvergenz

Definition 8.1. Man sagt, dass eine Funktionenfolge $\{f_n\}$ auf E **punktweise** gegen eine Funktion $f: E \rightarrow \mathbb{C}$ konvergiert, wenn

$$f_n(x) \rightarrow f(x) \quad \forall x \in E$$

gilt, und dass diese Folge **gleichmäßig** auf E gegen f konvergiert, wenn

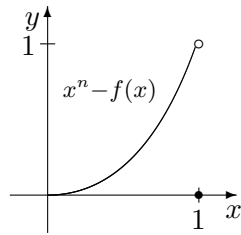
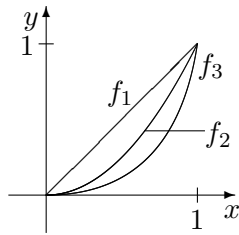
$$\sup_{x \in E} |f_n(x) - f(x)| \rightarrow 0$$

gilt. Eine Funktionenreihe $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ auf E konvergiert punktweise bzw. gleichmäßig, falls dies auf die Folge ihrer Partialsummen $\{S_k\}$ mit $S_k = u_1 + u_2 + \dots + u_k$ zutrifft. Bei gleichmäßiger Konvergenz schreibt man oft $f_n \rightrightarrows f$.

Satz 8.1. Eine auf E gleichmäßig konvergente Funktionenfolge oder -reihe konvergiert auch punktweise.

Diese Aussage ist trivial, denn gilt $\sup_{x \in E} |f_n(x) - f(x)| \rightarrow 0$, so gilt $|f_n(x) - f(x)| \rightarrow 0$ insbesondere für jedes einzelne $x \in E$.

Beispiel 8.2. (1) Die Folge $\{f_n\}$ mit $f_n(x) = x^n$ auf $E = [0, 1]$ konvergiert punktweise gegen f mit



$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in [0, 1), \\ 1 & x = 1. \end{cases}$$

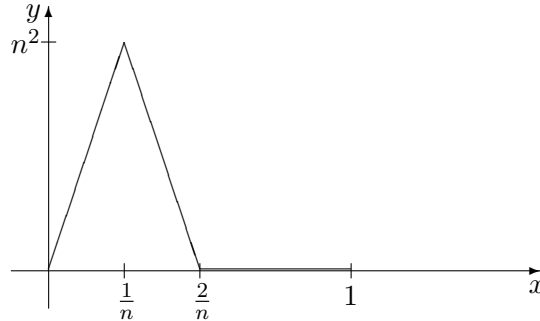
Es liegt aber keine gleichmäßige Konvergenz vor, denn es gilt

$$\sup_{x \in [0,1]} |x^n - f(x)| = 1 \quad \forall n \geq 1.$$

(2) Für die Folge $\{f_n\}$ mit $f_n(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{n}x$ auf $E = (0, 1]$ gilt $f_n \rightrightarrows f$ mit $f(x) = \frac{1}{x}$, denn

$$\sup_{x \in (0,1]} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x \in (0,1]} \frac{x}{n} = \frac{1}{n} \rightarrow 0.$$

(3) Sei f_n wie in der Abbildung auf $E = [0, 1]$ erklärt:



Es gilt $f_n \rightarrow 0$, aber $f_n \rightrightarrows 0$ ist falsch, denn

$$\sup_{x \in [0,1]} |f_n(x) - 0| = n^2 \rightarrow \infty.$$

Wir haben

$$\int_0^1 f_n(x) dx = \frac{1}{2} \frac{2}{n} n^2 \rightarrow \infty, \quad \int_0^1 f(x) dx = 0.$$

(4) Betrachte die Funktionenreihe $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ auf $E = \mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. Für die Partialsummen dieser Funktionenreihe gilt bekanntlich

$$s_k(z) = 1 + z + \cdots + z^k = \frac{1 - z^{k+1}}{1 - z} \rightarrow \frac{1}{1 - z} \quad \forall z \in \mathbb{D}.$$

Die Reihe konvergiert in \mathbb{D} punktweise, aber nicht gleichmäßig gegen $\frac{1}{1-z}$, denn

$$\sup_{z \in \mathbb{D}} \left| s_k(z) - \frac{1}{1-z} \right| = \sup_{z \in \mathbb{D}} \frac{|z|^{k+1}}{|1-z|} \geq \frac{\left|1 - \frac{1}{k}\right|^{k+1}}{\left|1 - \left(1 - \frac{1}{k}\right)\right|} = \underbrace{k \left(1 - \frac{1}{k}\right)^k}_{\rightarrow e^{-1}} \underbrace{\left(1 - \frac{1}{k}\right)}_{\rightarrow 1} \rightarrow \infty$$

für $k \rightarrow \infty$. Für alle $z \in r\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < r\}$, $r \in (0, 1)$, liegt aber auch gleichmäßige Konvergenz vor, denn

$$\sup_{z \in r\mathbb{D}} \left| s_k(z) - \frac{1}{1-z} \right| = \sup_{z \in r\mathbb{D}} \frac{|z|^{k+1}}{|1-z|} \leq \frac{r^{k+1}}{1-r} = \mathcal{O}(1).$$

Satz 8.2 (Majorantensatz). *Es seien $\{c_k\}_{k=1}^{\infty}$ eine reelle Folge mit $c_k > 0$ für alle k , $u_k: E \rightarrow \mathbb{C}$ und gelte $|u_k(x)| \leq c_k$ für alle $x \in E$ und alle k . Ist die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ konvergent, so konvergiert die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ auf E gleichmäßig.*

Beweis. Betrachte die Partialsummen $S_n := \sum_{k=1}^n c_k$ und $f_n(x) := \sum_{k=1}^n u_k(x)$. Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Da $\{S_n\}$ konvergiert, also eine CAUCHY-Folge ist, existiert ein $N = N(\varepsilon)$ mit

$$\varepsilon > |S_n - S_m| = c_n + \cdots + c_{m+1} \quad \forall n, m \in \mathbb{N} : n > m \geq N.$$

Für diese n und m gilt dann also

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f_m(x)| &= |u_n(x) + \cdots + u_{m+1}(x)| \leq |u_n(x)| + \cdots + |u_{m+1}(x)| \\ &\leq c_n + \cdots + c_{m+1} < \varepsilon. \end{aligned}$$

Nach Satz 8.2 konvergiert $\{f_n(x)\}$, also die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$, gleichmäßig. □

Beispiel 8.3. Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^2}$ ist infolge

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\sin(nx)}{n^2} \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

auf ganz \mathbb{R} gleichmäßig konvergent.

8.2 Eigenschaften der Grenzfunktion bzw. der Summe

Seien die Funktionen $f_n: E \rightarrow \mathbb{C}$ stetig (integrierbar oder differenzierbar) und gelte $f_n \rightarrow f$. Ist dann f ebenfalls stetig (integrierbar oder differenzierbar)?

Zur Stetigkeit

Seien die Funktionen $f_n: E \rightarrow \mathbb{C}$ in $x_0 \in E$ stetig und gelte $f_n \rightarrow f$. Dann gilt

$$\begin{aligned} f \text{ ist stetig in } x_0 &\iff \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \\ &\iff \lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_0) \\ &\iff \lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x). \end{aligned}$$

Das Problem, ob f in x_0 stetig ist, ist also das Problem, ob zwei Grenzwertprozesse vertauscht werden können.

Beispiel 8.4. Wir betrachten $f_n(x) = x^n$ auf $[0, 1]$. Dann gilt $f_n \rightarrow f$ punktweise mit

$$f(x) = \begin{cases} 0 &: x \in [0, 1), \\ 1 &: x = 1, \end{cases}$$

siehe Beispiel 8.2 (1). Es ist f_n auf $[0, 1]$ stetig, f jedoch nicht.

Punktweise Konvergenz einer Funktionenfolge ist also zu schwach, um die Stetigkeit auf die Grenzfunktion hinüber zu retten.

Satz 8.3. Seien die Funktionen $f_n: E \rightarrow \mathbb{C}$ in $x_0 \in E \cap E'$ stetig. Gilt $f_n \rightrightarrows f$ auf E , so ist f in x_0 ebenfalls stetig.

Beweis. Seien $\delta, \varepsilon > 0$ gegeben. Wir haben

$$|f(x) - f(x_0)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)|$$

mit

$$\begin{aligned} |f(x) - f_n(x)| &\leq \frac{\varepsilon}{3} && \forall x \in E \text{ und } n = n_0 \text{ (wegen } f_n \rightrightarrows f), \\ |f_n(x_0) - f(x_0)| &\leq \frac{\varepsilon}{3} && \text{für } n = n_0, \\ |f_n(x) - f_n(x_0)| &\leq \frac{\varepsilon}{3} && \text{für } n = n_0 \text{ und } \forall x \in E : |x - x_0| < \delta. \end{aligned}$$

Für alle $x \in E$ mit $|x - x_0| < \delta$ ist somit $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. Nach dem ε - δ -Kriterium der Stetigkeit ist f also in x_0 stetig. \square

Korollar 8.1 (zu Satz 8.3). Seien die Funktionen $u_n: E \rightarrow \mathbb{C}$ in $x_0 \in E \cap E'$ stetig. Konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ gleichmäßig auf E , so ist ihre Summe s in x_0 stetig.

Beweis. Man wende Satz 8.3 auf die Folge der Partialsummen $S_n := \sum_{k=1}^n u_k(x)$ an. \square

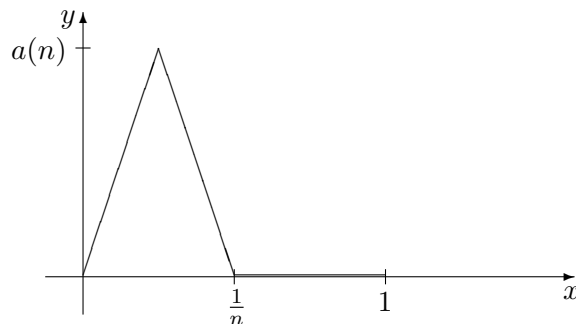
Zur Integrierbarkeit

Seien $f_n \in \mathcal{R}[a, b]$ und gelte $f_n \rightarrow f$ auf $[a, b]$. Ist dann auch $f \in \mathcal{R}[a, b]$ und gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) \, dx = \int_a^b f(x) \, dx = \int_a^b \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \, dx,$$

d. h. kann man Integration und Limesbildung vertauschen?

Beispiel 8.5. Betrachte die in der Abbildung dargestellte Funktion f_n auf $[0, 1]$:



Es gilt $f_n \rightarrow 0$ punktweise auf $[0, 1]$. Es ist aber für

$$a(n) = n: \quad \int_0^1 f_n(x) \, dx = \frac{1}{2} \frac{1}{n} n = \frac{1}{2} \not\rightarrow \int_0^1 f(x) \, dx = 0,$$

$$a(n) = n^2: \quad \int_0^1 f_n(x) \, dx = \frac{1}{2} \frac{1}{n} n^2 = \frac{n}{2} \rightarrow \infty,$$

$$a(n) = (-1)^n n: \quad \int_0^1 f_n(x) \, dx = \frac{(-1)^n}{2} \text{ konvergiert nicht.}$$

Punktweise Konvergenz ist also wiederum zu schwach.

Satz 8.4. Seien $f_n \in \mathcal{R}[a, b]$ und gelte $f_n \rightrightarrows f$ auf $[a, b]$. Dann ist $f \in \mathcal{R}[a, b]$ und es gilt

$$\int_a^b f_n(x) \, dx \rightarrow \int_a^b f(x) \, dx.$$

Beweis. Wir zeigen zunächst $f \in \mathcal{R}[a, b]$. Dazu sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Nach dem Beweis von Satz 7.2 reicht es zu beweisen, dass es eine Zerlegung P von $[a, b]$ mit $O(f, P) - U(f, P) < \varepsilon$ gibt. Sei hierzu $\delta := \frac{\varepsilon}{3(b-a)}$. Wegen $f_n \rightrightarrows f$ auf $[a, b]$ gibt es ein n_0 mit $|f_{n_0}(x) - f(x)| < \delta$ für jedes $x \in [a, b]$, d. h.

$$f_{n_0}(x) - \delta < f(x) < f_{n_0}(x) + \delta \quad \forall x \in [a, b].$$

Für jede Zerlegung P von $[a, b]$ folgt daraus

$$O(f, P) \leq O(f_{n_0}, P) + \delta(b-a) = O(f_{n_0}, P) + \frac{\varepsilon}{3}$$

und analog $U(f, P) \geq U(f_{n_0}, P) - \frac{\varepsilon}{3}$, d. h.

$$O(f, P) - U(f, P) \leq O(f_{n_0}, P) - U(f_{n_0}, P) + \frac{2\varepsilon}{3}.$$

Wegen $f_{n_0} \in \mathcal{R}[a, b]$ gibt es eine Zerlegung P von $[a, b]$ mit $O(f_{n_0}, P) - U(f_{n_0}, P) < \frac{\varepsilon}{3}$, also

$$O(f, P) - U(f, P) < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{2\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Damit ist $f \in \mathcal{R}[a, b]$ gezeigt. Schließlich ist

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f_n(x) \, dx - \int_a^b f(x) \, dx \right| &= \left| \int_a^b (f_n(x) - f(x)) \, dx \right| \leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)| \, dx \\ &\leq \sup_{x \in [a, b]} |f_n(x) - f(x)| (b-a) \rightarrow 0. \end{aligned}$$

□

Korollar 8.2 (zu Satz 8.4). Seien u_n Funktionen aus $\mathcal{R}[a, b]$ und möge die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ auf $[a, b]$ gleichmäßig konvergieren. Dann gehört auch ihre Summe s zu $\mathcal{R}[a, b]$ und es gilt

$$\int_a^b s(x) \, dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(x) \, dx.$$

Beweis. Man wende Satz 8.4 auf die Partialsummen der Funktionenreihe an. □

Zur Differenzierbarkeit

Seien die Funktionen f_n in E differenzierbar und gelte $f_n \rightarrow f$. Folgt daraus schon die Differenzierbarkeit von f und

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d}{dx} f_n(x) = \frac{d}{dx} f(x) = \frac{d}{dx} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)?$$

Es geht also um die Vertauschbarkeit eines Grenzwertprozesses mit Differentiation.

Beispiel 8.6. Für $f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n}$ auf $[0, 1]$ gilt $f_n \Rightarrow 0$, aber $f'_n(x) = \cos(nx)$ konvergiert nicht für jedes $x \in [0, 1]$.

Hier ist also sogar die gleichmäßige Konvergenz zu schwach.

Satz 8.5. Seien $f_n \in \mathcal{C}^1[a, b]$ und gelte

- a) $\{f_n(x_0)\}_{n=1}^{\infty}$ konvergiert für ein $x_0 \in [a, b]$,
- b) $\{f'_n\}_{n=1}^{\infty}$ konvergiert gleichmäßig auf $[a, b]$ gegen eine Funktion φ .

Dann gilt

1. $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ konvergiert auf $[a, b]$ gleichmäßig gegen eine Funktion $f \in \mathcal{C}^1[a, b]$,
2. $f'_n \Rightarrow f'$.

Beweis. Sei α der Grenzwert von $f_n(x_0)$. Setze $f(x) := \int_{x_0}^x \varphi(t) dt + \alpha$. Nach Satz 8.4 ist $\varphi \in \mathcal{C}[a, b]$ und nach dem Hauptsatz der Differential- & Integralrechnung gilt $f \in \mathcal{C}^1[a, b]$ sowie $f' = \varphi$. Damit ist auch 2. gezeigt. Wir haben

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f(x)| &= \left| \int_{x_0}^x (f'_n(t) - \varphi(t)) dt + f_n(x_0) - \alpha \right| \leq \int_{x_0}^x |f'_n(t) - \varphi(t)| dt + |f_n(x_0) - \alpha| \\ &\leq \sup_{t \in [a, b]} |f'_n(t) - \varphi(t)| (b - a) + |f_n(x_0) - \alpha| = \varkappa(1), \end{aligned}$$

woraus sich 1. ergibt. \square

Satz 8.5 gilt auch, wenn man statt der stetigen Differenzierbarkeit nur die Differenzierbarkeit der f_n fordert. Dann ist der Beweis aber aufwändiger.

Korollar 8.3 (zu Satz 8.5). *Seien $u_n \in \mathcal{C}^1[a, b]$ und gelte*

- a) *Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$ konvergiert für ein $x_0 \in [a, b]$,*
- b) *die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x)$ konvergiert gleichmäßig auf $[a, b]$ und hat die Summe σ .*

Dann gilt

1. *Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ konvergiert auf $[a, b]$ gleichmäßig und hat die Summe $s \in \mathcal{C}^1[a, b]$,*
2. *$\sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x) = s'(x)$ für alle $x \in [a, b]$.*

Beweis. Wende Satz 8.5 auf die Partialsummen der Reihe an. \square

9

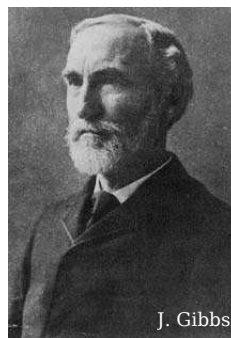
FOURIER-Reihen



J. Fourier



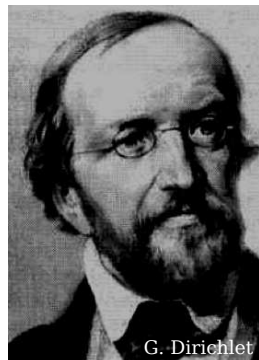
L. Fejér



J. Gibbs



U. Dini



G. Dirichlet



P. du Bois-Reymond



D. Jackson



P. Laplace

9.1 Der Begriff der FOURIER-Reihe

Definition 9.1. *Funktionen der Gestalt*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n a_k \cos(kx) + \sum_{k=1}^n b_k \sin(kx) \quad (9.1)$$

oder der Gestalt

$$\sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx} \quad (9.2)$$

mit $a_k, b_k, c_k \in \mathbb{C}$ heißen **trigonometrische Polynome** (vom Grad n).

Satz 9.1. *Die Menge aller Funktionen der Gestalt (9.1) ist gleich der Menge aller Funktionen der Gestalt (9.2).*

Beweis. Wir haben

$$\cos(kx) = \frac{e^{ikx} + e^{-ikx}}{2}, \quad \sin(kx) = \frac{e^{ikx} - e^{-ikx}}{2i}$$

für $k \in \mathbb{Z}$ und

$$e^{ikx} = \cos(kx) + i \sin(kx), \quad e^{-ikx} = \cos(kx) - i \sin(kx)$$

für $k \geq 0$. □

Satz 9.2. *Ist $f(x)$ durch (9.1) bzw. (9.2) gegeben, so gilt*

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(kx) dx, \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(kx) dx$$

bzw.

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-ikx} dx.$$

Beweis. Es gilt

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-ikx} dx &= \frac{1}{2\pi} \sum_{\ell=-n}^n c_\ell \int_0^{2\pi} e^{i\ell x} e^{-ikx} dx = \frac{1}{2\pi} \sum_{\ell=-n}^n c_\ell \int_0^{2\pi} e^{i(\ell-k)x} dx \\ &= \frac{1}{2\pi} c_k \int_0^{2\pi} dx + \frac{1}{2\pi} \sum_{\ell \neq k} c_\ell \left. \frac{e^{i(\ell-k)x}}{i(\ell-k)} \right|_0^{2\pi} = c_k. \end{aligned}$$

Analog zeigt man die Formeln für a_k und b_k . □

Definition 9.2. *Funktionenreihen der Gestalt*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(kx) \quad (9.3)$$

oder

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx} \quad (9.4)$$

mit $a_k, b_k, c_k \in \mathbb{C}$ heißen **trigonometrische Reihen**. Die Summen der Reihen (9.3) und (9.4) definiert man als die Grenzwerte von (9.1) bzw. (9.2) für $n \rightarrow \infty$.

Definition 9.3. Sei $f \in \mathcal{R}[a, b]$. Die in Satz 9.2 angegebenen komplexen Zahlen a_k , b_k und c_k nennt man die **FOURIER¹-Koeffizienten** von f und die mit diesen Koeffizienten gebildeten Reihen (9.3) und (9.4) nennt man die **FOURIER-Reihen** von f in **reeller** bzw. **komplexer Darstellung**. Man schreibt dann häufig

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)), \quad f(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}.$$

Wir halten folgende Analogien fest:

¹Jean Baptiste Joseph FOURIER (1768 - 1830), französischer Mathematiker und Physiker. Beschäftigte sich u. a. mit der Wärmeausbreitung in Festkörpern. In diesbezüglichen Abhandlungen tauchten erstmals seine FOURIER-Reihen auf.

| | | |
|-------------------------|-------------------|----------------------------|
| (algebraische) Polynome | \leftrightarrow | trigonometrische Polynome, |
| Potenzreihen | \leftrightarrow | trigonometrische Reihen, |
| TAYLOR-Koeffizienten | \leftrightarrow | FOURIER-Koeffizienten, |
| TAYLOR-Reihen | \leftrightarrow | FOURIER-Reihen. |

Es stellen sich folgende Fragen:

1. Für welche x konvergiert die FOURIER-Reihe einer Funktion f und in welchem Sinne (punktweise, gleichmäßig, etc.)?
2. Wenn die FOURIER-Reihe konvergiert, was ist ihre Summe? Ist die Summe gleich $f(x)$?

Die Konvergenz von FOURIER-Reihen ist weitaus delikater als die von TAYLOR-Reihen. Konvergenz trigonometrischer Polynome entspricht etwa der Frage nach der Konvergenz einer Potenzreihe auf der Konvergenzkreislinie (denn $\sum a_k z^k$ wird für $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = 1$ zu $\sum a_k e^{ikx}$).

9.2 Orthogonale Funktionensysteme

Wir bezeichnen mit $\mathcal{RL}^2[a, b]$ den linearen Raum $\mathcal{R}[a, b]$ mit dem Skalarprodukt

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x) \overline{g(x)} \, dx \quad \forall f, g \in \mathcal{R}[a, b].$$

Ein System $\{\varphi_k\}$ von Funktionen aus $\mathcal{R}[a, b]$ heißt ein **Orthogonalsystem** bzw. ein **Orthonormalsystem**, wenn $\{\varphi_k\}$ ein solches in $\mathcal{RL}^2[a, b]$ ist, wenn also $\langle \varphi_k, \varphi_\ell \rangle = 0$ für $k \neq \ell$ bzw. $\langle \varphi_k, \varphi_\ell \rangle = \delta_{k\ell}$ gilt.²

Beispiel 9.1. (1) In $\mathcal{RL}^2[a, b]$ sind

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx} \right\}_{k=-\infty}^{\infty}$$

oder auch

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right\} \cup \left\{ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(kx), \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(kx) \right\}_{k=1}^{\infty}$$

Orthonormalsysteme.

(2) Die LEGENDRE-Polynome $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ mit

$$P_n(x) := \frac{1}{2^n n!} \cdot \frac{d^n}{dx^n} [(x^2 - 1)^n], \quad x \in [-1, 1],$$

bilden ein Orthogonalsystem in $\mathcal{RL}^2[-1, 1]$.

Definition 9.4. Sei $\{\varphi_k\}$ ein Orthonormalsystem in $\mathcal{RL}^2[a, b]$. Für $f \in \mathcal{R}[a, b]$ heißen die Zahlen

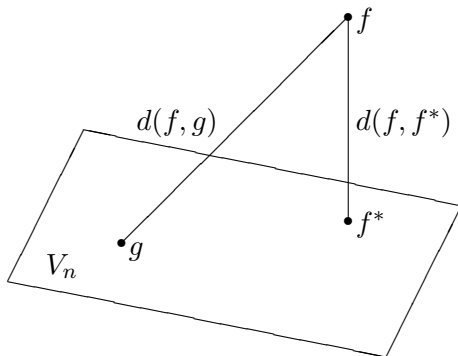
$$f_k := \langle f, \varphi_k \rangle = \int_a^b f(x) \overline{\varphi_k(x)} \, dx$$

die **FOURIER-Koeffizienten** bezüglich des Systems $\{\varphi_k\}$ und die Reihe $\sum_k f_k \varphi_k(x)$ nennt man **FOURIER-Reihe** von f bezüglich des Systems $\{\varphi_k\}$.

Wir haben also $f \sim \sum_k \langle f, \varphi_k \rangle \varphi_k$.

² $\delta_{ik} := \begin{cases} 1 & i = k, \\ 0 & i \neq k, \end{cases}$ bezeichnet das sogenannte KRONECKER-Symbol.

9.3 Die Approximationseigenschaft der FOURIER-Reihe



Sei $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ ein Orthonormalsystem in $\mathcal{RL}^2[a, b]$ und sei $V_n := \text{span}(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ der von $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ erzeugte lineare Unterraum. Für gegebenes $f \in \mathcal{R}[a, b]$ interessiert man sich für die bestmögliche Approximation durch eine Funktion aus V_n , d. h. durch eine Linearkombination der $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ (siehe Abbildung) mit

$$d(f, V_n) = \|f - f^*\| = \inf_{g \in V_n} \|f - g\|,$$

wobei $\|\cdot\| = \sqrt{\langle \cdot, \cdot \rangle}$.

Beispiel 9.2. Sei $\{\varphi_1, \dots, \varphi_{2n+1}\} = \{e^{ikx}/\sqrt{2\pi}\}_{k=-n}^n$. Man interessiert sich für die bestmögliche Approximation einer Funktion $f \in \mathcal{R}[a, b]$ durch ein trigonometrisches Polynom vom Grad n .

Satz 9.3. Sei $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ ein Orthonormalsystem in $\mathcal{RL}^2[a, b]$, sei $f \in \mathcal{R}[a, b]$ und setze $S_n f := \sum_{k=1}^n \langle f, \varphi_k \rangle \varphi_k$. Ist $p_n := \sum_{k=1}^n \delta_k \varphi_k$ ein beliebiges Element aus V_n , so gilt

$$\int_a^b |f(x) - S_n f(x)|^2 dx \leq \int_a^b |f(x) - p_n(x)|^2 dx,$$

und Gleichheit tritt genau dann ein, wenn $\delta_k = \langle f, \varphi_k \rangle$ für jedes k mit $1 \leq k \leq n$ ist.

In Bezug auf obiges Problem besagt dieser Satz, dass

$$\|f - S_n f\|^2 \leq \|f - p_n\|^2 \quad \forall p_n \in V_n$$

gilt, mit Gleichheit genau für $p_n = S_n f$. Also existiert f^* und ist eindeutig bestimmt durch $f^* = S_n f$.

Beweis. Mit $\int := \int_a^b$ und $\sum := \sum_{k=1}^n$ haben wir Folgendes:

$$\begin{aligned} \int |f - p_n|^2 dx &= \int (f - p_n)(\bar{f} - \bar{p}_n) dx \\ &= \int |f|^2 dx - \int f \bar{p}_n dx - \int \bar{f} p_n dx + \int |p_n|^2 dx, \\ \int f \bar{p}_n dx &= \int f \sum \bar{\delta}_k \bar{\varphi}_k dx = \sum \bar{\delta}_k \int f \bar{\varphi}_k dx = \sum \bar{\delta}_k \langle f, \varphi_k \rangle, \\ \int \bar{f} p_n dx &= \sum \delta_k \overline{\langle f, \varphi_k \rangle}, \\ \int |p_n|^2 dx &= \int p_n \bar{p}_n dx = \int \left(\sum_k \delta_k \varphi_k \right) \left(\sum_l \bar{\delta}_l \bar{\varphi}_l \right) = \sum_{k,\ell} \delta_k \bar{\delta}_l \langle \varphi_k, \varphi_\ell \rangle \\ &= \sum \delta_k \bar{\delta}_k, \end{aligned}$$

und somit

$$\begin{aligned} \int |f - p_n|^2 dx &= \int |f|^2 dx - \sum \bar{\delta}_k \langle f, \varphi_k \rangle - \sum \delta_k \overline{\langle f, \varphi_k \rangle} + \sum \delta_k \bar{\delta}_k \\ &\quad - \underbrace{\sum |\langle f, \varphi_k \rangle|^2 + \sum \langle f, \varphi_k \rangle \overline{\langle f, \varphi_k \rangle}}_{=0} \\ &= \int |f|^2 dx - \sum |\langle f, \varphi_k \rangle|^2 + \sum [\langle f, \varphi_k \rangle - \delta_k] [\overline{\langle f, \varphi_k \rangle} - \bar{\delta}_k] \\ &= \int |f|^2 dx - \sum |\langle f, \varphi_k \rangle|^2 + \sum |\langle f, \varphi_k \rangle - \delta_k|^2. \end{aligned}$$

Für $p_n = S_n f$ ist $\delta_k = \langle f, \varphi_k \rangle$ für alle k und somit

$$\int |f - S_n f|^2 dx = \int |f|^2 dx - \sum |\langle f, \varphi_k \rangle|^2. \quad (9.5)$$

Also ist

$$\int |f - p_n|^2 dx = \int |f - S_n f|^2 dx + \sum |\langle f, \varphi_k \rangle - \delta_k|^2 \geq \int |f - S_n f|^2 dx$$

mit Gleichheit genau für $\langle f, \varphi_k \rangle = \delta_k$, $1 \leq k \leq n$. □

Aus Gleichung (9.5) folgt sofort

Korollar 9.1. Für $f \in \mathcal{R}[a, b]$ gilt die BESSELSche Ungleichung

$$\sum_{k=1}^{\infty} |f_k|^2 \leq \int_a^b |f|^2 dx$$

und damit das RIEMANNsche Lemma

$$f_k \rightarrow 0 \text{ für } k \rightarrow \infty.$$

Ist das Orthonormalsystem $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ vollständig (was das bedeutet, kommt in der Funktionalanalysis), und die Orthonormalsysteme aus Beispiel 9.1 (1) sind vollständig, so gilt in der BESSELSchen Ungleichung sogar Gleichheit, d. h., dann gilt die PARSEVALSche Gleichung

$$\sum_{k=1}^{\infty} |f_k|^2 = \int_a^b |f|^2 dx.$$

Sie gilt sogar für $f \in L^2(a, b)$. Das RIEMANNsche Lemma gilt auch für $f \in L^1(a, b)$ (RIEMANN-LEBESGUESches Lemma).

9.4 Elementare Konvergenztheorie

Wir betrachten

$$D_n(x) := \sum_{k=-n}^n e^{ikx} \quad (\text{DIRICHLETScher Kern}),$$

$$K_n(x) := \frac{1}{n+1} (D_0(x) + D_1(x) + \cdots + D_n(x)) \quad (\text{FEJÉR}^3\text{scher Kern}).$$

Satz 9.4. *Es gilt*

1. $D_n(x) = \frac{\sin((n + \frac{1}{2})x)}{\sin \frac{x}{2}}, \quad D_n(0) = 2n + 1,$
2. $K_n(x) = \frac{1}{n+1} \frac{1 - \cos((n+1)x)}{1 - \cos x}, \quad K_n(0) = n + 1,$
3. $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_n(x) dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K_n(x) dx = 1,$
4. $K_n(x) \geq 0 \quad \forall x \in [-\pi, \pi],$
5. $K_n(x) \leq \frac{2}{n+1} \frac{1}{1 - \cos \delta} \quad \text{für } 0 < \delta \leq |x| \leq \pi.$

Beweis. 1. Wir haben

$$\begin{aligned} (e^{ix} - 1) D_n(x) &= (e^{ix} - 1) (e^{-inx} + \cdots + 1 + \cdots + e^{inx}) \\ &= e^{-i(n-1)x} + \cdots + e^{i(n+1)x} - e^{-inx} - \cdots - e^{inx} = e^{i(n+1)x} - e^{-inx}, \end{aligned}$$

und Multiplikation mit $e^{-ix/2}$ liefert

$$\underbrace{(e^{ix/2} - e^{-ix/2})}_{=2i \sin \frac{x}{2}} D_n(x) = \underbrace{e^{i(n+\frac{1}{2})x} - e^{-(n+\frac{1}{2})x}}_{=2i \sin((n+\frac{1}{2})x)}.$$

Dass $D_n(0) = 2n + 1$ gilt, ist trivial.

³Leopold FEJÉR (1880 - 1959), ungarischer Mathematiker. Forschte auf den Gebieten harmonische Analysis und FOURIER-Reihen.

2. Wir haben weiterhin

$$\begin{aligned}
 & (n+1) K_n(x) (e^{ix} - 1) (e^{-ix} - 1) \\
 &= (n+1) \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n D_k(x) (e^{ix} - 1) (e^{-ix} - 1) = \sum_{k=0}^n (e^{i(k+1)x} - e^{-ikx}) (e^{-ix} - 1) \\
 &= (e^{i(n+1)x} - e^{-inx} + e^{inx} - e^{-i(n-1)x} + \dots + e^{i3x} - e^{-i2x} + e^{i2x} - e^{-ix} + e^{ix} - 1) \\
 &\quad \cdot (e^{-ix} - 1) \\
 &= e^{inx} + e^{i(n-1)x} + \dots + e^{i2x} + e^{ix} + 1 - e^{-i(n+1)x} - e^{-inx} - \dots \\
 &\quad - e^{-i3x} - e^{-i2x} - e^{-ix} - e^{i(n+1)x} - e^{-inx} - \dots - e^{i3x} - e^{i2x} - e^{ix} \\
 &\quad + e^{-inx} + e^{-i(n-1)x} + \dots + e^{-i2x} + e^{-ix} + 1 \\
 &= 2 - e^{i(n+1)x} - e^{-i(n+1)x},
 \end{aligned}$$

d. h.

$$\begin{aligned}
 K_n(x) &= \frac{2 - e^{i(n+1)x} - e^{-i(n+1)x}}{(n+1)(e^{ix} - 1)(e^{-ix} - 1)} = \frac{2 - [e^{i(n+1)x} + e^{-i(n+1)x}]}{(n+1)[1 - (e^{ix} + e^{-ix}) + 1]} \\
 &= \frac{2 - 2 \cos((n+1)x)}{(n+1)[2 - 2 \cos x]}.
 \end{aligned}$$

Außerdem ergibt sich mit der Regel von DE L'HÔSPITAL

$$\begin{aligned}
 K_n(0) &= \frac{1}{n+1} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos((n+1)x)}{1 - \cos x} = \frac{1}{n+1} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(n+1) \sin((n+1)x)}{\sin x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(n+1) \cos((n+1)x)}{\cos x} = n+1.
 \end{aligned}$$

3. Mit

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{ikx} dx = \begin{cases} 2\pi : & k = 0, \\ \frac{e^{ikx}}{ik} \Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{2i \sin(k\pi)}{ik} = 0 : & k \neq 0, \end{cases}$$

folgt

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_n(x) dx = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-n}^n \int_{-\pi}^{\pi} e^{ikx} dx = 1$$

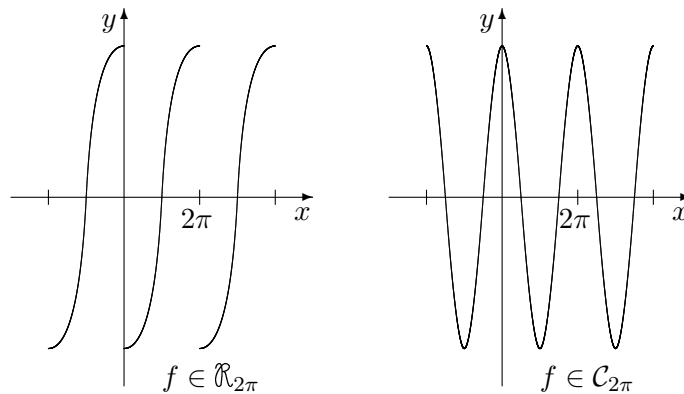
und somit

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K_n(x) dx = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_k(x) dx = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n 1 = 1.$$

4. Das ist klar wegen $\cos((n+1)x) \leq 1$, $\cos x \leq 1$.

5. Schließlich gilt $1 - \cos((n+1)x) \leq 2$ und $\frac{1}{1 - \cos x} \leq \frac{1}{1 - \cos \delta}$ für $0 < \delta \leq |x| \leq \pi$. \square

Wir bezeichnen mit $\mathcal{R}_{2\pi}$ die Menge der 2π -periodischen Funktionen auf \mathbb{R} , die auf $[0, 2\pi]$ RIEMANN-integrierbar sind, und mit $\mathcal{C}_{2\pi}$ die auf \mathbb{R} stetigen 2π -periodischen Funktionen, z. B.



Lemma 9.1. Für $f \in \mathcal{R}_{2\pi}$ ist $\int_a^{a+2\pi} f(x) dx$ von a unabhängig.

Beweis.

$$\begin{aligned} \int_a^{a+2\pi} f(x) dx &= \int_a^0 f(x) dx + \int_0^{2\pi} f(x) dx + \underbrace{\int_{2\pi}^{a+2\pi} f(x) dx}_{y:=x-2\pi} \\ &= \int_a^0 f(x) dx + \int_0^{2\pi} f(x) dx + \int_0^a \underbrace{f(y+2\pi)}_{=f(y)} dy = \int_0^{2\pi} f(x) dx. \end{aligned}$$

\square

Satz 9.5. Seien $f \in \mathcal{R}_{2\pi}$ und $(S_n f)(x) = \sum_{k=-n}^n f_k e^{ikx}$ die n -te Partialsumme bezüglich $\{e^{ikx}/\sqrt{2\pi}\}_{k=-\infty}^{\infty}$. Dann gilt

$$(S_n f)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) D_n(t) dt.$$

Beweis. Wegen $f_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\tau) e^{-ik\tau} d\tau = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\tau) e^{-ik\tau} d\tau$ (nach Lemma 9.1) ist

$$\begin{aligned} (S_n f)(x) &= \sum_{k=-n}^n \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\tau) e^{-ik\tau} d\tau e^{ikx} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\tau) \sum_{k=-n}^n e^{ik(x-\tau)} d\tau \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\tau) D_n(x-\tau) d\tau \quad [t := x-\tau \Rightarrow d\tau = -dt] \\ &= -\frac{1}{2\pi} \int_{x+\pi}^{x-\pi} f(x-t) D_n(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) D_n(t) dt. \end{aligned}$$

□

Satz 9.5 besagt, dass $S_n f$ die **Faltung** von f mit dem DIRICHLETSchen Kern ist:

$$S_n f = f * \frac{D_n}{2\pi}.$$

Satz 9.6 (RIEMANNSCHEs Lokalisierungsprinzip). Das Konvergenzverhalten von $\{(S_n f)(x)\}_{n=1}^{\infty}$ für $f \in \mathcal{R}_{2\pi}$ hängt nur vom Verhalten von f in einer beliebig kleinen Umgebung von x ab. Präziser: Sind $f, g \in \mathcal{R}_{2\pi}$ und gilt $f(\xi) = g(\xi)$ für alle $\xi \in (x-\varepsilon, x+\varepsilon)$, so konvergieren $(S_n f)(x)$ und $(S_n g)(x)$ beide, und zwar mit demselben Grenzwert oder beide konvergieren nicht.

Diese Tatsache ist erstaunlich, da man ja zur Berechnung der FOURIER-Koeffizienten die Funktion f auch überall außerhalb dieser Umgebung von x kennen muss.

Beweis. Setze $h := f - g$. Dann ist $h(x - t) = 0$ für $|t| < \varepsilon$. Nach Satz 9.5 ist

$$\begin{aligned} (S_n f)(x) - (S_n g)(x) &= (S_n h)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h(x-t) D_n(t) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{|t| < \varepsilon} h(x-t) D_n(t) dt + \frac{1}{2\pi} \int_{\varepsilon \leq |t| \leq \pi} h(x-t) D_n(t) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\varepsilon \leq |t| \leq \pi} h(x-t) D_n(t) dt. \end{aligned}$$

Setze $H(t) := \begin{cases} 0 & : |t| < \varepsilon \\ \frac{h(x-t)}{\sin(t/2)} & : \varepsilon \leq |t| \leq \pi \end{cases} \in \mathcal{R}_{2\pi}$. Wir erhalten

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2\pi} \int_{\varepsilon \leq |t| \leq \pi} h(x-t) D_n(t) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H(t) \sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)t\right) dt \quad (\text{nach Satz 9.4}) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H(t) \frac{e^{i(n+\frac{1}{2})t} - e^{-i(n+\frac{1}{2})t}}{2i} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{H(t) e^{it/2}}{2i} e^{int} dt - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{H(t) e^{-it/2}}{2i} e^{-int} dt \\ &= \left[\frac{H(t) e^{it/2}}{2i} \right]_{-n} - \left[\frac{H(t) e^{-it/2}}{2i} \right]_n. \end{aligned}$$

Letzteres ist die Differenz des $-n$ -ten FOURIER-Koeffizienten von $\frac{1}{2i} H(t) e^{it/2}$ und des n -ten FOURIER-Koeffizienten von $\frac{1}{2i} H(t) e^{-it/2}$, die nach dem RIEMANNschen Lemma gegen 0 strebt. \square

Satz 9.7 (Konvergenzkriterium von DINI⁴). *Es sei $f \in \mathcal{R}_{2\pi}$ und für ein $\delta > 0$ gelte*

$$\int_0^{\delta} \frac{|f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)|}{t} dt < \infty.$$

Dann gilt $(S_n f)(x) \rightarrow f(x)$.

Beweis. Es gilt

$$\begin{aligned}
 (S_n f)(x) - f(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f(x-t) - f(x)] D_n(t) dt \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} [f(x-t) - f(x)] D_n(t) dt + \underbrace{\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^0 [f(x-t) - f(x)] D_n(t) dt}_{(*)} \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} [f(x-t) - f(x)] D_n(t) dt + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} [f(x+t) - f(x)] D_n(t) dt \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \underbrace{[f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)]}_{=: \varphi(x)} D_n(t) dt
 \end{aligned}$$

((*): Substituiere $s := -t$ und nenne s wieder t). Für ein ε mit $0 < \varepsilon < \delta$ ist also

$$(S_n f)(x) - f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\varepsilon} \varphi(t) D_n(t) dt + \frac{1}{2\pi} \int_{\varepsilon}^{\pi} \varphi(t) D_n(t) dt$$

mit

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{\varepsilon} \varphi(t) D_n(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\varepsilon} \frac{\varphi(t)}{t} \frac{t}{\sin \frac{t}{2}} \sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)t\right) dt,$$

und der Betrag hiervon ist nicht größer als

$$C \int_0^{\varepsilon} \frac{|\varphi(t)|}{t} dt = C \underbrace{\left(\int_0^{\delta} \frac{|\varphi(t)|}{t} dt - \int_{\varepsilon}^{\delta} \frac{|\varphi(t)|}{t} dt \right)}_{\rightarrow 0 \text{ für } \varepsilon \rightarrow 0} < \frac{\eta}{2}$$

mit einer Konstanten C für ein hinreichend kleines $\varepsilon = \varepsilon_0 = \varepsilon_0(\eta)$. Setzen wir

$$H(t) := \begin{cases} 0 & : \quad -\pi \leq t \leq \varepsilon_0, \\ \frac{\varphi(t)}{\sin(t/2)} & : \quad \varepsilon_0 < t \leq \pi, \end{cases}$$

so wird das zweite Integral mit $\varepsilon = \varepsilon_0$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\varepsilon_0}^{\pi} \varphi(t) D_n(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H(t) \sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)t\right) dt,$$

und da $H \in \mathcal{R}_{2\pi}$, folgt, dass dieses für $n \rightarrow \infty$ gegen 0 geht (RIEMANNSches Lemma). Dieses Integral ist also für alle $n \geq n_0(\eta)$ betragsmäßig kleiner als $\frac{\eta}{2}$. Insgesamt ergibt sich

$$|(S_n f)(x) - f(x)| < \frac{\eta}{2} + \frac{\eta}{2} = \eta \quad \forall n \geq n_0(\eta)$$

für beliebig vorgegebenes $\eta > 0$. □

Definition 9.5. Eine Funktion $f: [A, B] \rightarrow \mathbb{C}$ heißt **HÖLDER⁵-stetig**, wenn es $\alpha \in (0, 1]$ und $M \in (0, \infty)$ gibt mit

$$|f(x) - f(y)| \leq M |x - y|^\alpha \quad \forall x, y \in [A, B].$$

Die Zahl α heißt **HÖLDER-Exponent**.

Im Fall $\alpha = 1$ spricht man von **LIPSCHITZ⁶-Stetigkeit**.

Seien $f: [A, B] \rightarrow \mathbb{C}$ und $0 < \alpha < \beta < 1$. Dann gilt:

f LIPSCHITZ-stetig $\Rightarrow f$ HÖLDER-stetig mit $\beta \Rightarrow f$ HÖLDER-stetig mit $\alpha \Rightarrow f$ stetig.

In der Tat, aus $|f(x) - f(y)| \leq M |x - y|$ für alle $x, y \in [A, B]$ folgt

$$|f(x) - f(y)| \leq M |x - y|^{1-\beta} |x - y|^\beta \leq \underbrace{M (B - A)^{1-\beta}}_{=: M'} |x - y|^\beta$$

für alle $x, y \in [A, B]$. Analog zeigt man die anderen Implikationen.

Genügt f einer HÖLDER-Bedingung mit $\alpha > 1$, so ist f automatisch konstant, denn

$$\begin{aligned} & |f(x) - f(y)| \leq M |x - y|^{1+\varepsilon} \quad \forall x, y \in [A, B] \\ \Rightarrow & \left| \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \right| \leq M |x - y|^\varepsilon \rightarrow 0 \text{ für } x \rightarrow y \text{ (} y \in [A, B] \text{ fixiert)} \\ \Rightarrow & f'(y) = 0 \quad \forall y \in [A, B] \\ \Rightarrow & f = \text{const.} \end{aligned}$$

⁵Otto HÖLDER (1859 - 1937), deutscher Mathematiker. Er lieferte grundlegende Beiträge zur Gruppentheorie.

⁶Rudolf LIPSCHITZ (1832 - 1903), deutscher Mathematiker. Forschte in vielen Gebieten der reinen und angewandten Mathematik.

Beispiel 9.3. (1) Die Funktion $f(x) = \sqrt{x}$, $x \in [0, 1]$, ist stetig, aber nicht LIPSCHITZ-stetig. Denn würde f einer LIPSCHITZ-Bedingung, etwa

$$|\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq M |x - y| = M |\sqrt{x} + \sqrt{y}| |\sqrt{x} - \sqrt{y}|$$

für alle $x, y \in [0, 1]$, genügen, so folgte daraus der Widerspruch

$$\frac{1}{M} \leq \sqrt{x} + \sqrt{y} \rightarrow 0 \text{ für } x, y \rightarrow 0.$$

Diese Funktion ist aber HÖLDER-stetig mit $\alpha = \frac{1}{2}$, denn für $x > y$ gilt

$$\sqrt{x} - \sqrt{y} \leq (x - y)^{\frac{1}{2}} \iff x - 2\sqrt{x}\sqrt{y} + y \leq x - y \iff 1 \leq \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}.$$

(2) Betrachte $f(x) = \begin{cases} 0 & x = 0, \\ 1/|\log x| & 0 < x \leq \frac{1}{2}. \end{cases}$ Diese Funktion ist nicht HÖLDER-stetig. Genügte sie einer HÖLDER-Bedingung, so würde insbesondere

$$|f(x) - f(0)| \leq M |x - 0|^\alpha, \quad \text{also} \quad \frac{1}{|\log x|} \leq M x^\alpha$$

gelten, woraus sich der Widerspruch

$$\frac{1}{M} \leq x^\alpha |\log x| \rightarrow 0 \text{ für } x \rightarrow 0$$

ergäbe. Aber f ist natürlich stetig.

Satz 9.8. Sei $f \in \mathcal{R}_{2\pi}$ in einer (beliebig kleinen) Umgebung von x HÖLDER-stetig. Dann gilt $(S_n f)(x) \rightarrow f(x)$.

Beweis. Wir haben $|f(t_1) - f(t_2)| \leq M |t_1 - t_2|^\alpha$ und damit

$$\begin{aligned} \frac{|f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)|}{t} &\leq \frac{|f(x+t) - f(x)|}{t} + \frac{|f(x) - f(x-t)|}{t} \\ &\leq \frac{M t^\alpha}{t} + \frac{M t^\alpha}{t} = \frac{2M}{t^{1-\alpha}}. \end{aligned}$$

Wir wissen aber, dass $\int_0^\delta \frac{dt}{t^{1-\alpha}} < \infty$ gilt. Die Behauptung folgt also aus Satz 9.7. \square

Ist also f ein „bisschen“ besser als stetig, so konvergiert die FOURIER-Reihe. Stetigkeit allein reicht nicht aus (dies wurde 1876 von DU BOIS-REYMOND⁷ bewiesen). Ein funktionalanalytischer Beweis dessen:

$$(S_n f)(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(-t) D_n(t) dt$$

definiert ein Funktional $S_n: \mathcal{C}_{2\pi} \rightarrow \mathbb{C}$ für jedes n . Wäre nun $\{(S_n f)(0)\}_{n=0}^{\infty}$ für alle $f \in \mathcal{C}_{2\pi}$ konvergent, so würde nach dem Satz von BANACH-STEINHAUS $\sup_{n \geq 0} \|S_n\| < \infty$ folgen. Wir haben aber

$$\begin{aligned} \|S_n\| &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |D_n(t)| dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} |D_n(t)| dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \left| \frac{\sin((n + \frac{1}{2})t)}{\sin \frac{t}{2}} \right| dt \\ &\geq \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{|\sin((n + \frac{1}{2})t)|}{\frac{t}{2}} dt \quad [x := (n + \frac{1}{2})t] \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{(n + \frac{1}{2})\pi} \frac{|\sin x|}{\frac{x}{n + \frac{1}{2}}} dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{(n + \frac{1}{2})\pi} \frac{|\sin x|}{x} dx \rightarrow \infty \text{ für } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Bei Funktionen, die nur stetig sind, hilft folgender Trick. Anstelle von $(S_n f)(x)$ betrachtet man die sogenannten **FEJÉRSchen Mittel**

$$(\sigma_n f)(x) := \frac{(S_0 f)(x) + (S_1 f)(x) + \cdots + (S_n f)(x)}{n + 1}.$$

Der Hintergedanke ist die **CESÀRO⁸-Summation**:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \implies \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = a.$$

Beweisidee. Man zeigt zunächst, dass $b_n := \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k$ gegen 0 geht, falls $a_n \rightarrow 0$. Gelte dann $a_n \rightarrow a$ für ein beliebiges $a \in \mathbb{R}$, und betrachte $a'_n := a_n - a$. Dann folgt $b'_n :=$

⁷David Paul Gustave DU BOIS-REYMOND (1831 - 1889), deutscher Mathematiker. Theorie der Differentialgleichungen. Zeigte in einer Arbeit aus dem Jahre 1873 die Existenz einer stetigen Funktion, deren FOURIER-Entwicklung in einem Punkt divergiert (und widerlegte damit eine Vermutung von DIRICHLET). Gab als erster einen strengen Beweis des Mittelwertsatzes der Integralrechnung.

⁸Ernesto CESÀRO (1859 - 1906), italienischer Mathematiker. Abhandlungen zu Themen aus Arithmetik, Funktionentheorie, Wahrscheinlichkeitstheorie und Differentialgeometrie. Er interessierte sich auch für Zahlentheorie und trug zur Verbreitung der MAXWELLSchen Elektrodynamik bei.

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a'_k = b_n - a \rightarrow 0.$$

Es kann aber sein, dass $\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$ für $n \rightarrow \infty$ konvergiert, obwohl die Folge $\{a_n\}$ divergiert.

Beispiel 9.4. Wir betrachten die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n = 1 - 1 + 1 - 1 \pm \dots$. Die Folge ihrer Partialsummen $\{1, 0, 1, 0, \dots\}$ divergiert, aber ihre CESÀRO-Mittel sind ungefähr $\frac{1}{n} \frac{n}{2} \rightarrow \frac{1}{2}$.

Satz 9.9 (FEJÉR). Für $f \in C_{2\pi}$ gilt $(\sigma_n f) \Rightarrow f$ auf \mathbb{R} .

Beweis. Wir haben

$$\begin{aligned} (\sigma_n f)(x) &= \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n (S_k f)(x) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) D_k(t) dt \\ &= \frac{1}{2\pi(n+1)} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) \underbrace{\sum_{k=0}^n D_k(t)}_{=(n+1)K_n(t)} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) K_n(t) dt \end{aligned}$$

und damit nach Satz 9.4, Punkt 4

$$|(\sigma_n f)(x) - f(x)| = \frac{1}{2\pi} \left| \int_{-\pi}^{\pi} [f(x-t) - f(x)] K_n(t) dt \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x-t) - f(x)| K_n(t) dt.$$

Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Dann existiert ein $\delta > 0$ mit

$$|f(x-t) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{für } |t| \leq \delta \text{ und } \forall x \in \mathbb{R},$$

da f auf \mathbb{R} gleichmäßig stetig ist. Es folgt

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\delta}^{\delta} |f(x-t) - f(x)| K_n(t) dt \leq \frac{\varepsilon}{2} \frac{1}{2\pi} \int_{-\delta}^{\delta} K_n(t) dt < \frac{\varepsilon}{2} \cdot 1 = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Nach Satz 9.4, Punkt 5, ist des weiteren

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{|t|>\delta} |f(x-t) - f(x)| K_n(t) dt &\leq \frac{2M}{2\pi} \int_{|t|>\delta} K_n(t) dt \quad \text{mit } M := \max_{x \in \mathbb{R}} f(x) \\ &\leq \frac{M}{\pi} \int_{|t|>\delta} \frac{2}{n+1} \frac{1}{1 - \cos \delta} dt \\ &\leq \frac{M}{\pi} \frac{2}{n+1} \frac{1}{1 - \cos \delta} (2\pi - 2\delta) < \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

für alle $n \geq n_0(\varepsilon)$. Somit ist $|(\sigma_n f)(x) - f(x)| < \varepsilon$ für jedes $x \in \mathbb{R}$ und für alle $n \geq n_0(\varepsilon)$. \square

Korollar 9.2 (zu Satz 9.9). *Besitzen $f, g \in \mathcal{C}_{2\pi}$ die gleichen FOURIER-Koeffizienten, so gilt $f = g$.*

Beweis. Dies folgt wegen $\sigma_n f = \sigma_n g$ aus Satz 9.9 \square

Korollar 9.3 (zu Satz 9.9). *Ist $f \in \mathcal{C}_{2\pi}$ und gilt $f_k = 0$ für alle $k \in \mathbb{Z}$, so ist $f = 0$.*

Beweis. Wende Korollar 9.2 mit $g = 0$ an. \square

Korollar 9.4 (zu Satz 9.9). *Sind $f, g \in \mathcal{C}_{2\pi}$, so gilt*

1. *Konvergenz der FOURIER-Reihe im quadratischen Mittel:*

$$\int_0^{2\pi} |f(x) - (S_n f)(x)|^2 dx \rightarrow 0 \quad \text{für } n \rightarrow \infty,$$

2. *PARSEVAL'sche Gleichung:*

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \overline{g(x)} dx = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f_k \overline{g_k}$$

und insbesondere

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |f_k|^2.$$

Beweis. 1. Nach Satz 9.3 gilt

$$\int_0^{2\pi} |f(x) - (S_n f)(x)|^2 dx \leq \int_0^{2\pi} |f(x) - (\sigma_n f)(x)|^2 dx$$

und aus Satz 9.9 folgt

$$\int_0^{2\pi} |f(x) - (\sigma_n f)(x)|^2 dx \leq \underbrace{\max_{x \in [0, 2\pi]} |f(x) - (\sigma_n f)(x)|^2}_{\rightarrow 0 \text{ für } n \rightarrow \infty} \underbrace{\int_0^{2\pi} dx}_{=2\pi}.$$

2. Dies folgt aus

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (S_n f)(x) \overline{g(x)} dx &= \sum_{k=-n}^n f_k \int_0^{2\pi} e^{ikx} \overline{g(x)} dx = \sum_{k=-n}^n f_k \int_0^{2\pi} e^{-ikx} g(x) dx \\ &= \sum_{k=-n}^n f_k \overline{g_k} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \overline{g(x)} dx - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (S_n f)(x) \overline{g(x)} dx \right| &\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x) - (S_n f)(x)| |g(x)| dx \\ &\stackrel{*}{\leq} \frac{1}{2\pi} \underbrace{\left(\int_0^{2\pi} |f(x) - (S_n f)(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}}_{\rightarrow 0 \text{ für } n \rightarrow \infty} \underbrace{\left(\int_0^{2\pi} |g(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}}_{< \infty} \\ &= o(1) \quad (n \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

(*: Anwendung der CAUCHY-SCHWARZschen Ungleichung).

□

⁹Marc-Antoine PARSEVAL (1755 - 1836), französischer Mathematiker. Veröffentlichte seine PARSEVALSche Gleichung ohne Beweis, da er die Aussage für offensichtlich hielt.

Die Korollare 9.2 und 9.3 gelten sogar für $f \in L^1(0, 2\pi)$, das Korollar 9.4 gilt auch für $f \in L^2(0, 2\pi)$.

Schließlich noch zwei Sätze, die wir hier nicht beweisen wollen.

Satz 9.10 (DIRICHLET, JORDAN). *Ist $f \in \mathcal{R}_{2\pi}$ stückweise C^1 , so gilt*

$$(S_n f)(x) \rightarrow \frac{f(x-0) + f(x+0)}{2} \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Dieser Satz gilt auch für Funktionen von **beschränkter Variation**. Sei f auf $[a, b]$ definiert und sei $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ eine beliebige Zerlegung von $[a, b]$. Ist nun die Menge aller Zahlen v mit $v := \sum_{i=1}^n |f(x_i) - f(x_{i-1})|$ für alle möglichen Zerlegungen von $[a, b]$ von oben beschränkt, so heißt f in $[a, b]$ von beschränkter Variation (siehe z. B. Fichtenholz, Nr. 567).

Satz 9.11 (LIPSCHITZ). *Ist $f \in \mathcal{R}_{2\pi}$ und ist f HÖLDER-stetig auf $[A, B]$, so konvergiert $S_n f$ gleichmäßig gegen f auf jedem Intervall $[a, b] \subset (A, B)$.*

9.5 Beispiele

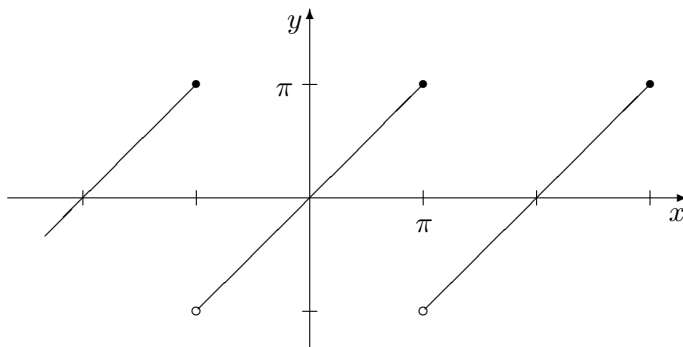
Ist $f \in \mathcal{R}_{2\pi}$ gerade, $f(x) = f(-x)$, so ist $b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx = 0$, d. h. wir haben

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx), \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx.$$

Gerade Funktionen lassen sich also in eine Kosinusreihe entwickeln. Für ungerade Funktionen, $f(x) = -f(-x)$, aus $\mathcal{R}_{2\pi}$ ist $a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx = 0$ und wir erhalten eine reine Sinusreihe

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx), \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx.$$

Beispiel 9.5. (1) $f(x) = x$ für $-\pi < x \leq \pi$.



Die 2π -periodische Fortsetzung \tilde{f} von f ist ungerade und es gilt $\tilde{f} \in \mathcal{R}_{2\pi} \setminus \mathcal{C}_{2\pi}$. Sie lässt sich also in eine Sinusreihe entwickeln. Wir haben

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \sin(nx) dx = \frac{1}{\pi} x \frac{-\cos(nx)}{n} \\ &= -x \frac{\cos(nx)}{n\pi} \Big|_{-\pi}^{\pi} + \underbrace{\frac{1}{n\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) dx}_{=0} = -\frac{2\pi(-1)^n}{n\pi} = (-1)^{n+1} \frac{2}{n}. \end{aligned}$$

Für $-\pi < x < \pi$ ist die Bedingung aus Satz 9.7 (DINI) erfüllt,

$$\int_0^{\delta} \frac{|(x+t) + (x-t) - 2x|}{t} dt = \int_0^{\delta} 0 dt = 0,$$

d. h. die FOURIER-Reihe konvergiert für alle $x \in (-\pi, \pi)$. Wir erhalten

$$x = 2 \left(\frac{\sin x}{1} - \frac{\sin(2x)}{2} + \frac{\sin(3x)}{3} - \frac{\sin(4x)}{4} \pm \dots \right).$$

Für $x = \frac{\pi}{2}$ ergibt dies

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} \pm \dots$$

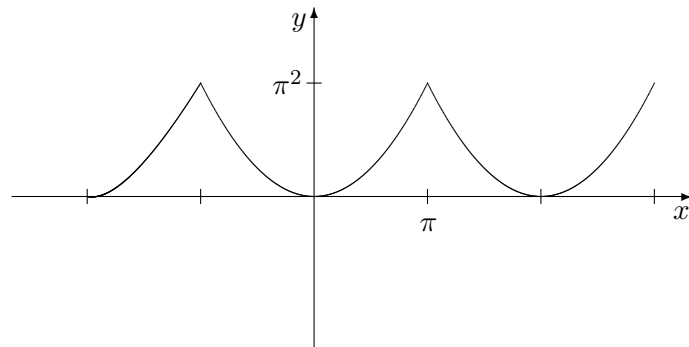
Dies zeigte LEIBNIZ 1673 (als 27-Jähriger) auf anderem Wege. Dies faszinierte ihn dermaßen, dass er seinen Anwaltsberuf an den Nagel hing, um sich fortan der Mathematik zu widmen.

(2) $f(x) = x^2$ für $-\pi < x \leq \pi$.

Die 2π -periodische Fortsetzung \tilde{f} von f ist gerade und aus $C_{2\pi}$. Für $x \neq \pi$ ist

$$\left| \frac{(x+t)^2 + (x-t)^2 - 2x^2}{t} \right|$$

= $2t$, und für $x = \pi$ ist



$$\left| \frac{\tilde{f}(x+t) - \tilde{f}(x-t) - 2\tilde{f}(x)}{t} \right| = \left| \frac{(\pi-t)^2 + (\pi-t)^2 - 2\pi^2}{t} \right| \leq |2t - 4\pi|.$$

Damit ist das Kriterium von DINI überall erfüllt. Für die FOURIER-Koeffizienten gilt

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \frac{2\pi^2}{3}$$

und für $n \geq 1$ ist

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos(nx) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 d \frac{\sin(nx)}{n} = -\frac{1}{n\pi} \int_{-\pi}^{\pi} 2x \sin(nx) dx \\ &= -\frac{2}{n} (-1)^{n+1} \frac{2}{n} = (-1)^n \frac{4}{n^2}. \end{aligned}$$

Also gilt

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} - 4 \left(\frac{\cos x}{1^2} - \frac{\cos(2x)}{2^2} + \frac{\cos(3x)}{3^2} - \frac{\cos(4x)}{4^2} \pm \dots \right).$$

Für $x = \pi$ erhalten wir

$$\begin{aligned}\pi^2 &= \frac{\pi^2}{3} - 4 \left(-\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} - \dots \right) \\ \Leftrightarrow \frac{\pi^2}{6} &= 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots.\end{aligned}$$

Die Frage nach der Summe von $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots$ trat erstmals 1644 bei Pietro MENGOLI (1626 - 1686, italienischer Mathematiker) auf. Nachdem LEIBNIZ 1673 die Summe der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ berechnete, behauptete er öffentlich, jede beliebige Reihe aufsummieren zu können. Dies kam auch John PELL (1611 - 1685, englischer Mathematiker) zu Ohren, welcher LEIBNIZ nach der Summe der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ fragte. LEIBNIZ konnte das Problem nicht lösen und zog daraufhin seine Ankündigung, jede Reihe aufsummieren zu können, wieder zurück. Erst 1733 gelang es dem damals 25-jährigen EULER $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ (allerdings auf anderem Wege) zu zeigen.

- (3) $f(x) = x$ für $0 \leq x \leq \pi$. Man kann f zu einer geraden Funktion $\tilde{f} \in \mathcal{C}_{2\pi}$ fortsetzen. Diese genügt überall der DINI-Bedingung (und ist auf ganz \mathbb{R} sogar LIPSCHITZ-stetig). Die FOURIER-Koeffizienten sind

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x dx = \pi$$

und für $n \geq 1$

$$\begin{aligned}a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos(nx) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x d \frac{\sin(nx)}{n} = -\frac{2}{n\pi} \int_0^{\pi} \sin(nx) dx \\ &= \frac{2}{n^2\pi} \cos(nx) \Big|_0^{\pi} = \begin{cases} 0 : & n \text{ gerade,} \\ -\frac{4}{n^2\pi} : & n \text{ ungerade.} \end{cases}\end{aligned}$$

Für $0 \leq x \leq \pi$ ist also

$$x = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \left(\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos(3x)}{3^2} + \frac{\cos(5x)}{5^2} + \dots \right).$$

Für $x = \pi$ erhalten wir

$$\begin{aligned}\pi &= \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \left(-\frac{1}{1^2} - \frac{1}{3^2} - \frac{1}{5^2} - \dots \right), \\ \Rightarrow \frac{\pi^2}{8} &= \frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots.\end{aligned}$$

Sei $S := \frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \dots$, also

$$S = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots \right) = \frac{1}{4} \left(\frac{\pi^2}{8} + S \right) \iff S = \frac{\pi^2}{24}.$$

Wir erhalten erneut

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots = 4S = \frac{\pi^2}{6}.$$

Im Folgenden soll dargestellt werden, wie L. EULER $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots$ bestimmte (i. A. nennt man $\zeta(s) = \frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \dots$ **Zeta-Funktion**, wir wissen $\zeta(1) = \infty$). Wir versuchen den Wert von $\zeta(2)$ durch Aufsummieren zu erraten. Summiert man die ersten n Glieder, ergibt sich der Fehler

$$\frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \dots \approx \int_n^{\infty} \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} \Big|_n^{\infty} = \frac{1}{n}.$$

Wollen wir nun $\zeta(2)$ bis auf 20 Stellen nach dem Komma berechnen, so muss $\frac{1}{n} = \frac{1}{10^{20}}$, d. h. $n = 10^{20}$ sein. Nehmen wir an, dass ein Computer in der Lage ist, pro Sekunde 10^9 Summanden zu addieren, so benötigt dieser eine Rechenzeit von 10^{11} Sekunden (3 170 Jahre). Da wir nicht so viel Zeit zur Verfügung haben, investieren wir etwas Mathematik. Dazu betrachten wir die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \pm \dots = 1.$$

Dann haben wir

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n(n+1)} \right) = \zeta(2) - 1$$

und

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n(n+1)} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2(n+1)}.$$

Brechen wir jetzt die Summation nach dem n -ten Glied ab, ist der Fehler

$$\approx \frac{1}{(n+1)^3} + \frac{1}{(n+2)^3} + \dots \approx \int_n^{\infty} \frac{dx}{x^3} = -\frac{1}{2x^2} \Big|_n^{\infty} = \frac{1}{2n^2}.$$

Mit $\frac{1}{2n^2} = \frac{1}{10^{20}}$ ergibt sich $n = 10^{10}/\sqrt{2} \approx 0.7 \cdot 10^{10}$ und der Computer braucht nur noch $0.7 \cdot 10^{10}/10^9 = 7$ Sekunden.

EULER besaß aber keinen Computer. Er ging stattdessen so an die Sache heran:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \int_0^1 x^{n-1} dx = \int_0^1 \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n}}_{=1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}+\dots} dx \\ &\stackrel{*}{=} \int_0^1 \frac{-\log(1-x)}{x} dx = \int_0^{1/2} \frac{-\log(1-x)}{x} dx + \underbrace{\int_{1/2}^1 \frac{-\log(1-x)}{x} dx}_{(*)}, \end{aligned}$$

unter Verwendung der TAYLOR-Reihe von $\log(1-x)$ an der Stelle *. Das Integral $\int \frac{-\log(1-x)}{x} dx$ besitzt leider keine elementare Stammfunktion. Führt man aber in (*) die Substitution $y := 1-x$ aus und bezeichnet y wieder mit x , so ergibt sich

$$\begin{aligned} \int_{1/2}^1 \frac{-\log(1-x)}{x} dx &= \int_0^{1/2} \frac{-\log x}{1-x} dx = \int_0^{1/2} -\log x d[-\log(1-x)] \\ &= \log x \log(1-x) \Big|_0^{1/2} - \int_0^{1/2} \log(1-x) d \log x \\ &\stackrel{*'}{=} (\log \frac{1}{2})^2 + \int_0^{1/2} \frac{-\log(1-x)}{x} dx, \end{aligned}$$

unter Verwendung von *':

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \log x \log(1-x) &= \lim_{y \rightarrow \infty} \log \frac{1}{y} \log \left(1 - \frac{1}{y} \right) = - \lim_{y \rightarrow \infty} \log y \left(-\frac{1}{y} - \frac{1}{2y^2} - \frac{1}{3y^3} - \dots \right) \\ &= \lim_{y \rightarrow \infty} \log y \left(\frac{1}{y} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{y^2}\right) \right) = 0 \end{aligned}$$

(der letzte Limes ist 0, da $\log y$ für $y \rightarrow \infty$ langsamer als jede Potenz von y gegen ∞ strebt).

Wir erhalten also

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} &= (\log 2)^2 + 2 \int_0^{1/2} \frac{-\log(1-x)}{x} dx = (\log 2)^2 + 2 \int_0^{1/2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n} dx \\ &= (\log 2)^2 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \frac{1}{n} \frac{1}{2^n} = (\log 2)^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 2^{n-1}}. \end{aligned}$$

Soll der Fehler wieder $\frac{1}{10^{20}}$ sein, ergibt sich

$$\frac{1}{10^{20}} = \int_n^{\infty} \frac{dx}{x^2 2^x} \leq \frac{1}{n^2} \int_n^{\infty} (e^{-\log 2})^x dx = \frac{1}{n^2} \left. \frac{e^{(-\log 2)x}}{-\log 2} \right|_n^{\infty} = \frac{1}{n^2 \log 2 \cdot 2^n}.$$

Nimmt man hierin „ \approx “ statt „ \leq “, so erhält man $n^2 \log 2 \cdot 2^n \approx 10^{20}$, was für $n = 56$ erfüllt ist. EULER summierte also etwa 56 Glieder der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 2^{n-1}}$ auf und erhielt

$$\zeta(2) = 1.644\,934\,066\,848\,226\,436\,4\dots$$

Er konnte die Berechnung tatsächlich so durchführen, da er die Mittel der Differential- und Integralrechnung (dank NEWTON und LEIBNIZ) schon zur Verfügung hatte.

Das war Vorgeplänkel. Nun zu EULERS Beweis. Bekannt war ihm der VIETA¹⁰sche Wurzelsatz: Sind a, b die Nullstellen des quadratischen Polynoms $x^2 + Ax + B$, so gilt $A + B = -a$ und $ab = B$, denn $x^2 + Ax + B = (x - a)(x - b) = x^2 - (a + b)x + ab$. Wissen wir also, dass das quadratische Polynom $x^2 + Ax + B$ zwei Nullstellen a und b hat, so kennen wir

$$a + b, \quad ab \quad \text{und} \quad a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab = A^2 - 2B.$$

EULER versuchte, dies auf Polynome unendlichen Grades auszudehnen. Da diese aber keinen höchsten Koeffizienten haben, normieren wir das Absolutglied zu 1. Für Polynome dritten Grades gelingt das wie folgt. Sind a, b und c (ggf. mehrfache oder komplexe) Nullstellen von $x^3 + Ax^2 + Bx + C$, so gilt

$$x^3 + Ax^2 + Bx + C = (x - a)(x - b)(x - c)$$

und $(-a)(-b)(-c) = C$. Setzen wir $C \neq 0$ voraus und dividieren obige Gleichung durch C , so bekommen wir

$$1 + \frac{B}{C}x + \frac{A}{C}x^2 + \frac{1}{C}x^3 = \frac{x-a}{-a} \frac{x-b}{-b} \frac{x-c}{-c} = \left(1 - \frac{x}{a}\right) \left(1 - \frac{x}{b}\right) \left(1 - \frac{x}{c}\right).$$

Setzt man noch $\alpha := \frac{B}{C}$, $\beta := \frac{A}{C}$ und $\gamma := \frac{1}{C}$, so ergibt sich

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = -\alpha, \quad \frac{1}{ab} + \frac{1}{ac} + \frac{1}{bc} = \beta, \quad \frac{1}{abc} = -\gamma.$$

Das klappt für Polynome beliebigen Grades. EULER nahm den Grad ∞ , d. h. er betrachtete

$$1 + \alpha x + \beta x^2 + \gamma x^3 + \dots$$

¹⁰François VIÈTE (1540 - 1603), französischer Mathematiker. Wichtige Beiträge zur Trigonometrie, wertvolle Vorarbeiten zur Infinitesimalrechnung, beschrieb als erster π in Form eines unendlichen Produkts.

(wir nennen das heute eine Potenzreihe) und erhielt, dass für die Nullstellen a, b, c, \dots dieses Polynoms gilt:

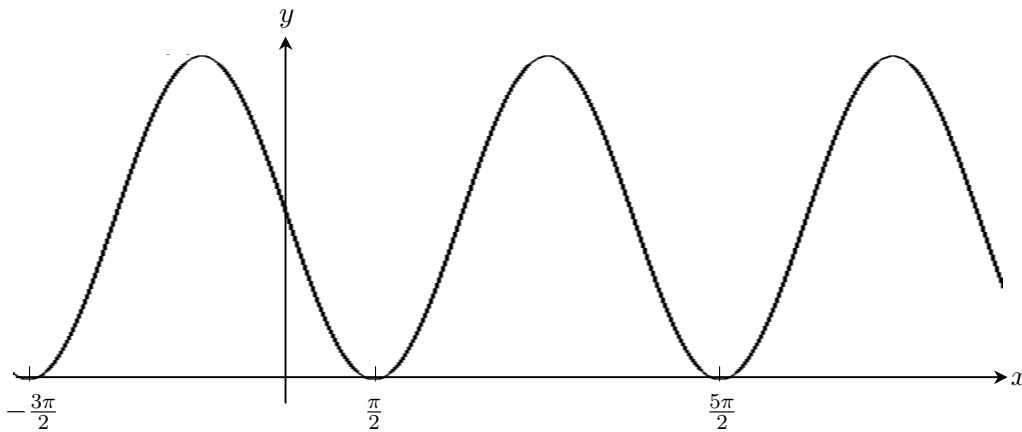
$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \dots = -\alpha, \quad \frac{1}{ab} + \frac{1}{ac} + \frac{1}{bc} + \dots = \beta$$

und damit

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + \dots = \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \dots \right)^2 - 2 \left(\frac{1}{ab} + \frac{1}{ac} + \frac{1}{bc} + \dots \right) = \alpha^2 - 2\beta. \quad (9.6)$$

Als Polynom vom Grad ∞ wählte EULER

$$1 - \sin x = 1 - x + \frac{x^3}{3!} - \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} \mp \dots \quad (9.7)$$



Alle Nullstellen dieses Polynoms unendlichen Grades treten doppelt auf. Nach Gleichung (9.6) ist also

$$2 \cdot \frac{4}{\pi^2} \left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \dots \right) = (-1)^2 - 2 \cdot 0 = 1,$$

d. h.

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \dots = \frac{\pi^2}{8}.$$

Wie im Beispiel 9.5 (3) ergibt sich daraus

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots = \frac{\pi^2}{6}.$$

Gegen EULERS Beweis sprechen z. B. folgende zwei Einwände:

1. Um den Wurzelsatz von VIETA derart auf Polynome beliebigen Grades erweitern zu können, muss man sicher sein, *alle* Nullstellen des Polynoms erwischt zu haben. Insbesondere bedeutet das, dass man ggf. auch alle komplexen Nullstellen kennen muss. Aus heutiger Sicht ist das aber kein Problem, denn für alle $z = x + iy \in \mathbb{C}$ gilt

$$\begin{aligned} \sin z = 1 &\implies \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = 0 \\ \implies \frac{e^{i(x+iy)} + e^{-i(x+iy)}}{2} &= \frac{e^{-y}(\cos x + i \sin x) + e^y(\cos x - i \sin x)}{2} = 0 \\ \implies \underbrace{\frac{e^y + e^{-y}}{2} \cos x}_{=:R} - i \underbrace{\frac{e^y - e^{-y}}{2} \sin x}_{=:I} &= 0 \end{aligned}$$

Letzteres ist aber genau dann 0, wenn $R = I = 0$ gilt. Setzt man nun $R = 0$, so ergibt sich wegen $\frac{e^y + e^{-y}}{2} \neq 0$ für jedes reelle y , dass $\cos x = 0$ sein muss. Setzt man nun $I = 0$, so ergibt sich wegen $\sin x = \sqrt{1 - \cos^2 x} \stackrel{\cos x=0}{=} 1$, dass $\frac{e^y - e^{-y}}{2} = 0$ gelten muss, und das ist nur für $y = 0$ erfüllt.

Damit ist gezeigt, dass (9.7) nur reelle Nullstellen besitzt.

2. EULER benutzt

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + \dots = \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \dots \right)^2 - 2 \left(\frac{1}{ab} + \frac{1}{ac} + \frac{1}{bc} + \dots \right)$$

mit der Reihe

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} + \dots = \frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} \pm \dots,$$

die nicht absolut konvergiert. Ihm war aber noch nicht bekannt, welche schlimmen Ausmaße das Rechnen mit nicht absolut konvergenten Reihen haben kann. Damit beschäftigten sich erst später CAUCHY und WEIERSTRASS.

Diese (und andere) Einwände ändern aber nichts an der Genialität des Beweises.

EULER untersuchte $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \zeta(s)$ auch für $s > 2$ auf gleichem Wege. Es stellt sich heraus, dass dies nur für gerade s funktioniert. Für ungerade s ist der Wert von $\zeta(s)$ bis heute unbekannt. Man weiß nur, dass $\zeta(3)$ irrational ist.

| $s = 2n$ | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 |
|-------------|-------------------|--------------------|---------------------|----------------------|----------------------------|---|
| $\zeta(2n)$ | $\frac{\pi^2}{6}$ | $\frac{\pi^2}{90}$ | $\frac{\pi^6}{945}$ | $\frac{\pi^8}{9450}$ | $\frac{\pi^{10}}{93\,555}$ | $\frac{691 \pi^{12}}{6\,825 \cdot 93\,555}$ |
| B_{2n} | $\frac{1}{6}$ | $-\frac{1}{30}$ | $\frac{1}{42}$ | $-\frac{1}{30}$ | $\frac{5}{66}$ | $-\frac{691}{2\,730}$ |

Welche Gesetzmäßigkeit steckt dahinter? Das sind die **BERNOULLI¹¹-Zahlen** B_n . Diese tauchen z. B. in der TAYLOR-Entwicklung von $f(x) = \frac{x}{e^x - 1}$ auf:

$$\frac{x}{e^x - 1} = 1 - \frac{x}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} B_n \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

EULER zeigte später

$$\zeta(2n) = (-1)^{n-1} \cdot \frac{(2\pi)^{2n}}{2(2n)!} B_{2n}.$$

Er nahm die Einwände gegen seinen Beweis sehr ernst und reparierte ihn, indem er die Formel

$$\sin x = x \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2 \pi^2}\right)$$

bewies. Es gilt

$$x \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2 \pi^2}\right) = x - x^3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 \pi^2} \pm \dots$$

Andererseits ist aber $\sin x = x - \frac{1}{3!} x^3 \pm \dots$. Koeffizientenvergleich liefert

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 \pi^2} = \frac{1}{3!} \implies \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{3!} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Später lieferte EULER sogar noch einen völlig anderen Beweis. Dazu betrachtete er zunächst die TAYLOR-Reihe von $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$:

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-1/2}{n} (-x^2)^n,$$

wobei

$$\binom{-1/2}{n} = \frac{-\frac{1}{2}(-\frac{1}{2}-1) \cdots (-\frac{1}{2}-n+1)}{n!} = \frac{(-1)^n}{2^n n!} \cdot 1 \cdot 3 \cdots (2n-1) = \frac{(-1)^n (2n-1)!!}{(2n)!!}.$$

Damit ist

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} x^{2n}.$$

¹¹Jakob BERNOULLI (1654 - 1705), schweizer Mathematiker und Physiker. Trug wesentlich zur Entwicklung der Wahrscheinlichkeitstheorie, Variationsrechnung und zur Untersuchung von Potenzreihen bei. Bearbeitete und verbreitete die LEIBNIZSche Infinitesimalrechnung zusammen mit seinem Bruder Johann.

Integration $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \int x^{2n} dx$ ergibt

$$\arcsin x = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + C.$$

Setzt man darin $x = 0$, erhält man $C = 0$. Dividiert man nun durch $\sqrt{1-x^2}$ und integriert von 0 bis 1, bekommt man

$$\underbrace{\int_0^1 \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx}_{=: I_1} = \underbrace{\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx}_{=: I_2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{1}{2n+1} \underbrace{\int_0^1 \frac{x^{2n+1}}{\sqrt{1-x^2}} dx}_{=: I_3}.$$

Dabei ist

$$I_1 = \int_0^1 \arcsin x \, d \arcsin x = \frac{\arcsin^2 x}{2} \Big|_0^1 = \frac{\pi^2}{8},$$

$$I_3 \stackrel{*}{=} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^{2n+1} t}{\cos t} \cos t \, dt = \int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1} t \, dt \stackrel{\text{Bsp. 7.5}}{=} \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$$

mit der Substitution $*$: $x = \sin t \Rightarrow \frac{dx}{dt} = \cos t \Leftrightarrow dx = \cos t \, dt$. Das Integral I_2 ergibt sich für $n = 0$ aus I_3 . Also gilt

$$\frac{\pi^2}{8} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots$$

9.6 Glattheit der Funktion und Abfallen der FOURIER-Koeffizienten

Satz 9.12. Seien $f, f', \dots, f^{(m-1)} \in \mathcal{C}_{2\pi}$ und $f^{(m)} \in \mathcal{R}_{2\pi}$, $m \geq 1$. Dann gilt

$$|f_k| = \mathcal{O}\left(\frac{1}{|k|^m}\right) \text{ für } |k| \rightarrow \infty.$$

Beweis. Wir haben

$$\begin{aligned} f_k &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-ikx} dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) d\frac{e^{-ikx}}{-ik} \\ &= \underbrace{\frac{1}{2\pi} f(x) \frac{e^{-ikx}}{-ik} \Big|_0^{2\pi}}_{=0} + \frac{1}{2\pi ik} \int_0^{2\pi} e^{-ikx} df(x) = \frac{1}{2\pi ik} \int_0^{2\pi} f'(x) e^{-ikx} dx, \end{aligned}$$

und für $m = 1$ liefert das die Behauptung, denn nach dem RIEMANNschen Lemma gilt

$$[f']_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f'(x) e^{-ikx} dx \rightarrow 0.$$

Für $m \geq 2$ ist analog

$$\begin{aligned} f_k &= \frac{1}{2\pi ik} \int_0^{2\pi} f'(x) e^{-ikx} dx = \frac{1}{2\pi (ik)^2} \int_0^{2\pi} f''(x) e^{-ikx} dx \\ &= \dots = \frac{1}{2\pi (ik)^m} \underbrace{\int_0^{2\pi} f^{(m)}(x) e^{-ikx} dx}_{\rightarrow 0}. \end{aligned}$$

□

Satz 9.13. Seien $m \geq 2$ und $f_k = \mathcal{O}\left(\frac{1}{|k|^m}\right)$ für $|k| \rightarrow \infty$. Dann ist $f, f', \dots, f^{(m-2)} \in \mathcal{C}_{2\pi}$.

Beweis. Setze $g(x) := \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k e^{ikx}$. Differentiation ergibt

$$\begin{aligned} g'(x) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} i k f_k e^{ikx}, \\ &\vdots \\ g^{(m-2)}(x) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} (i k)^{m-2} f_k e^{ikx}. \end{aligned}$$

Wegen $|(i k)^{m-2} f_k e^{ikx}| = \mathcal{O}\left(\frac{1}{|k|^2}\right)$ konvergiert die letzte Reihe nach dem Majoranten-
satz von WEIERSTRASS gleichmäßig. Wir erhalten also $g, g', \dots, g^{m-2} \in \mathcal{C}_{2\pi}$. Aus $g_k = f_k$
für alle $k \in \mathbb{Z}$ folgt schließlich $f, f', \dots, g^{m-2} \in \mathcal{C}_{2\pi}$. \square

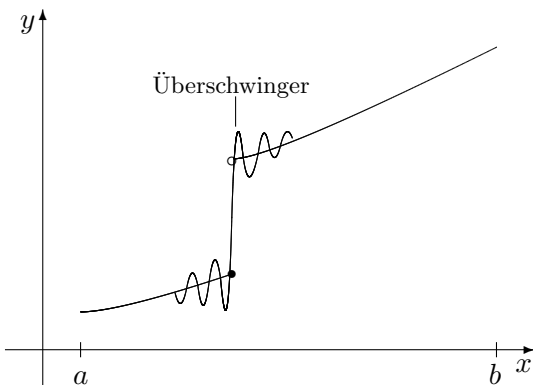
Der Zusammenhang dieser beiden Sätze ist nicht perfekt. Das liegt aber in der Natur der Sache.

9.7 Das GIBBSsche Phänomen

Hat $f \in PC_{2\pi}^1$ (stückweise C^1 und 2π -periodisch) in x einen Sprung, so gilt

$$(S_n f)(x) \rightarrow \frac{f(x-0) + f(x+0)}{2}$$

nach Satz 9.10 (DIRICHLET, JORDAN). Es ergibt sich dabei folgendes Bild:

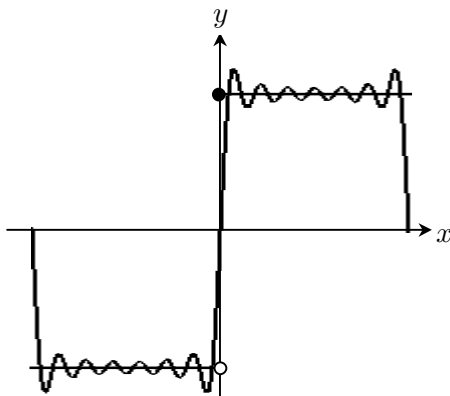


Immer entsteht eine Beule von etwa 18% mal $\frac{1}{2}$ Sprunghöhe (Überschwinger), die sich mit wachsendem n auf die Sprungstelle zubewegt. Dies nennt man das **GIBBS¹²sche Phänomen**.

Wir machen uns das an einem Beispiel klar. Sei

$$f(x) = \begin{cases} -1 & : -\pi \leq x < 0, \\ 1 & : 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

Es handelt sich um eine ungerade Funktion. Für ihre periodische Fortsetzung \tilde{f} gilt nun



$$\begin{aligned} b_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(kx) dx \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(kx) dx = \frac{2}{\pi} \frac{\cos(kx)}{k} \Big|_0^{\pi} \\ &= \begin{cases} \frac{4}{k\pi} & : k \text{ ungerade,} \\ 0 & : k \text{ gerade,} \end{cases} \end{aligned}$$

d. h. $\tilde{f}(x) \sim \frac{4}{\pi} \left(\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin(3x)}{3} + \frac{\sin(5x)}{5} + \dots \right)$. Wir betrachten die Partialsumme

$$T_n(x) = \frac{4}{\pi} \left(\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin(3x)}{3} + \dots + \frac{\sin((2n-1)x)}{2n-1} \right)$$

¹²Josiah Willard GIBBS (1839 - 1889), US-amerikanischer Physiker. Arbeitete in den Gebieten statistische Mechanik, Vektoranalysis, elektromagnetische Theorie des Lichts.

und bestimmen deren Extremwerte. Wir haben

$$\begin{aligned}
 \frac{\pi}{4} T'_n(x) &= \cos x + \cos(3x) + \cdots + \cos((2n-1)x) \\
 &= \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} + \frac{e^{3ix} + e^{-3ix}}{2} + \cdots + \frac{e^{(2n-1)ix} + e^{-(2n-1)ix}}{2} \\
 &= \frac{e^{ix}}{2} (1 + e^{2ix} + \cdots + e^{2(n-1)ix}) + \frac{e^{-ix}}{2} (1 + e^{-2ix} + \cdots + e^{-2(n-1)ix}) \\
 &= \frac{e^{ix}}{2} \frac{1 - e^{2nix}}{1 - e^{2ix}} + \frac{e^{-ix}}{2} \frac{1 - e^{-2nix}}{1 - e^{-2ix}} \\
 &= \frac{e^{ix}}{2} \frac{1 - e^{2nix}}{e^{ix}(e^{-ix} - e^{ix})} + \frac{e^{-ix}}{2} \frac{1 - e^{-2nix}}{e^{-ix}(e^{ix} - e^{-ix})} \\
 &= \frac{1 - e^{2nix}}{-4i \sin x} + \frac{1 - e^{-2nix}}{4i \sin x} = \frac{e^{2nix} - e^{-2nix}}{4i \sin x} = \frac{2i \sin(2nx)}{4i \sin x} = \frac{\sin(2nx)}{2 \sin x} = 0
 \end{aligned}$$

genau dann, wenn $2nx = k\pi$, $k \neq 0$. Die erste positive Nullstelle von T'_n ist damit $x = \frac{\pi}{2n}$, und der Wert von T_n an dieser Stelle ist

$$T_n\left(\frac{\pi}{2n}\right) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^n \frac{\sin\left((2k-1)\frac{\pi}{2n}\right)}{2k-1} = \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^n \frac{\sin\left((2k-1)\frac{\pi}{2n}\right)}{(2n-1)\frac{\pi}{2n}} \frac{\pi}{n}.$$

Das ist eine RIEMANNsche Integralsumme. Für $n \rightarrow \infty$ erhalten wir

$$T_n\left(\frac{\pi}{2n}\right) \rightarrow \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x} dx \approx 1.18.$$

Das GIBBSsche Phänomen ist damit auch für allgemeine Funktionen $\alpha + \beta f(t-x) + g(t-x)$, $\alpha, \beta, t \in \mathbb{R}$, $f(x)$ wie oben und $(S_n g)(t) \rightarrow g(t)$, die in $x = t$ einen Sprung haben, gezeigt.

9.8 Die WEIERSTRASSschen Approximationsätze

Satz 9.14 (2. WEIERSTRASSscher Approximationsatz). *Ist $f \in \mathcal{C}_{2\pi}$, so existiert eine Folge $\{T_n\}_{n=1}^\infty$ trigonometrischer Polynome mit $T_n \rightrightarrows f$ auf \mathbb{R} , d. h.*

$$\max_{x \in [-\pi, \pi]} |f(x) - T_n(x)| \rightarrow 0.$$

Beweis. Man nehme für T_n die FEJÉRSchen Mittel $\sigma_n f$. □

Satz 9.15 (1. WEIERSTRASSscher Approximationsatz). *Ist $f \in \mathcal{C}_{[a,b]}$, so existiert eine Folge $\{P_n\}_{n=1}^\infty$ von Polynomen mit $P_n \rightrightarrows f$ auf $[a, b]$, d. h.*

$$\max_{x \in [a,b]} |f(x) - P_n(x)| \rightarrow 0.$$

Beweis. Seien zunächst $a = -\pi$, $b = \pi$ und $f(-\pi) = f(\pi)$. Dann kann f zu einer Funktion aus $\mathcal{C}_{2\pi}$ fortgesetzt werden. Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Nach Satz 9.14 existiert ein trigonometrisches Polynom $T_m(x) = \sum_{k=-m}^m c_k e^{ikx}$ mit $|f(x) - T_m(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $x \in [-\pi, \pi]$. Wir setzen $C := \sum_{k=-m}^m |c_k|$. Die Reihe $e^{ix} = 1 + ix + \frac{(ix)^2}{2!} + \dots$ konvergiert auf $[-m\pi, m\pi]$ gleichmäßig gegen ihre Summe. Ist nun n hinreichend groß, so ist also

$$|e^{ix} - S_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2C} \quad \forall x \in [-m\pi, m\pi]$$

mit $S_n(x) := 1 + ix + \frac{(ix)^2}{2!} + \dots + \frac{(ix)^n}{n!}$. Es ergibt sich also

$$\left| T_m(x) - \sum_{k=-m}^m c_k S_n(kx) \right| = \left| \sum_{k=-m}^m c_k (e^{ikx} - S_n(kx)) \right| \leq \sum_{k=-m}^m |c_k| \frac{\varepsilon}{2C} = \frac{\varepsilon}{2}$$

für jedes $x \in [-\pi, \pi]$. Setzen wir $P_n(x) := \sum_{k=-m}^m c_k S_n(kx)$, so ist damit

$$\max_{x \in [-\pi, \pi]} |f(x) - P_n(x)| < \varepsilon.$$

Seien nun $a = -\pi$, $b = \pi$ und $f(-\pi) \neq f(\pi)$. Wir setzen $\delta := \frac{f(-\pi) - f(\pi)}{2\pi}$ und betrachten $g(x) := f(x) + \delta x$. Damit gilt $g(-\pi) = g(\pi) = \frac{f(-\pi) + f(\pi)}{2}$. Nach dem eben Bewiesenen gibt es Polynome R_n mit $R_n(x) \rightrightarrows g(x)$. Es folgt $R_n(x) - \delta x \rightrightarrows f(x)$. Seien schließlich a und b beliebig. Die Abbildung

$$\varphi: [-\pi, \pi] \longrightarrow [a, b], \quad y \longmapsto \frac{(b-a)y + (a+b)\pi}{2\pi},$$

ist bijektiv. Wir finden also Polynome R_n mit $R_n(y) \rightrightarrows f(\varphi(y))$ für $y \in [-\pi, \pi]$. Die Umkehrabbildung von φ ist

$$\varphi^{-1}: [a, b] \longrightarrow [-\pi, \pi], \quad x \longmapsto \frac{2\pi x - (a+b)\pi}{b-a},$$

womit $P_n(x) := R_n(\varphi^{-1}(x)) \rightrightarrows f(x)$ für $x \in [a, b]$ gilt. \square

Wir bleiben im Kontext von Satz 9.14, d. h. bei trigonometrischen Polynomen. Man definiert

$$E_n(f) := \inf_{T_n \in \mathcal{T}_n} \|f - T_n\|_\infty,$$

wobei $\|g\|_\infty := \max_{x \in [-\pi, \pi]} |g(x)|$ und \mathcal{T}_n der Vektorraum aller trigonometrischen Polynome vom Grad $\leq n$ seien. Die Zahlen $E_n(f)$ beschreiben also die bestmögliche Approximation von f durch ein trigonometrisches Polynom vom Grad n . Satz 9.14 besagt, dass $E_n(f) \rightarrow 0$ für alle $f \in \mathcal{C}_{2\pi}$ gilt.

Die Geschwindigkeit, mit der $E_n(f)$ gegen 0 strebt, hängt von der Glattheit von f ab (das wird in der Approximationstheorie untersucht). Ohne Beweis führen wir dazu noch folgenden Satz an. Darin bezeichnet $\mathcal{C}_{2\pi}^{m,\alpha}$ die Menge der 2π -periodischen Funktionen, deren m -te Ableitung zu $\mathcal{C}_{2\pi}$ gehört ($\alpha = 0$) bzw. deren m -te Ableitung zu $\mathcal{C}_{2\pi}$ gehört und einer HÖLDER-Bedingung mit dem Exponenten α , $0 < \alpha \leq 1$, genügt, d. h.

$$|f^{(m)}(x) - f^{(m)}(y)| \leq M |x - y|^\alpha \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Satz 9.16 (JACKSON¹³).

1. Aus $f \in \mathcal{C}_{2\pi}^{m,\alpha}$, $0 \leq \alpha \leq 1$, folgt $E_n(f) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^{m+\alpha}}\right)$ für $n \rightarrow \infty$.
2. Aus $E_n(f) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^{m+\alpha}}\right)$ für $n \rightarrow \infty$ und $0 < \alpha < 1$ folgt $f \in \mathcal{C}_{2\pi}^{m,\alpha}$.

Satz 9.17. Für $f \in \mathcal{C}_{2\pi}$ gilt $\|f - S_n f\|_\infty \leq (L_n + 1) E_n(f)$ mit $L_n := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |D_n(x)| dx$, wobei $D_n(x)$ den DIRICHLET-Kern meint.

Es kann $L_n = \frac{4}{\pi^2} \log n + \mathcal{O}(1)$ gezeigt werden.

Beweis. Man kann zeigen, dass das Infimum in der Definition von $E_n(f)$ angenommen wird, also ein Minimum ist. Sei $T_n \in \mathcal{T}_n$ die bestmögliche Approximation von f . Wir schreiben $f = T_n + g$ und haben $\|g\|_\infty = E_n(f)$. Daraus folgt

$$\|f - S_n f\|_\infty = \|T_n + g - S_n T_n - S_n g\|_\infty \leq \|g\|_\infty + \|S_n g\|_\infty$$

und wegen $(S_n g)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x-t) D_n(t) dt$ ist

$$\|S_n g\|_\infty \leq \|g\|_\infty \underbrace{\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |D_n(t)| dt}_{=L_n}.$$

□

Satz 9.18. Sei $f \in \mathcal{C}_{2\pi}$ mit $\|f - \sigma_n f\|_\infty = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right)$ für $n \rightarrow \infty$. Dann ist f konstant.

Beweis. Wir haben

$$\begin{aligned} (\sigma_n f)(x) &= \frac{(S_0 f)(x) + (S_1 f)(x) + \cdots + (S_n f)(x)}{n+1} \\ &= \frac{f_0 + (f_{-1} e^{-ix} + f_0 + f_1 e^{ix}) + \cdots + (f_{-n} e^{-inx} + \cdots + f_0 + \cdots + f_n e^{inx})}{n+1} \\ &= \frac{(n+1)f_0 + n f_{-1} e^{-ix} + n f_1 e^{ix} + \cdots + f_{-n} e^{-inx} + f_n e^{inx}}{n+1} \\ &= \sum_{k=-n}^n \frac{n+1-|k|}{n+1} f_k e^{-ikx}. \end{aligned}$$

¹³Dunham JACKSON (1888 - 1946), US-amerikanischer Mathematiker. Seine Forschungsgebiete waren Approximationstheorie und Statistik.

Es folgt

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - (\sigma_n f)(x)) e^{-ikx} dx = f_k - \frac{n+1-|k|}{n+1} f_k = \frac{|k|}{n+1} f_k.$$

Andererseits ist

$$\left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - (\sigma_n f)(x)) e^{-ikx} dx \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - (\sigma_n f)(x)| dx = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right).$$

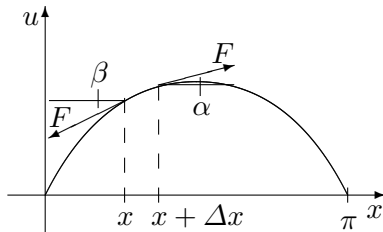
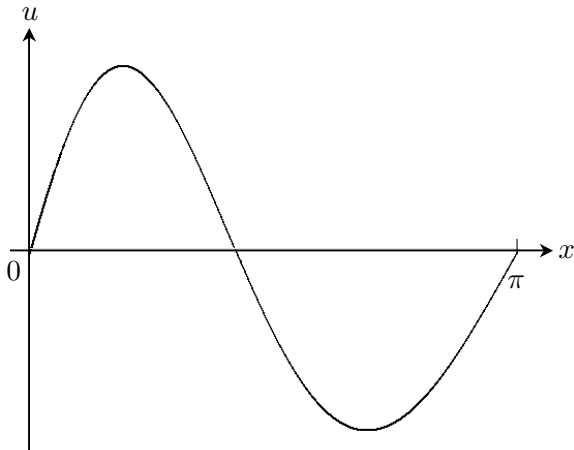
Damit ergibt sich

$$\frac{|k|}{n+1} |f_k| = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right) \quad (n \rightarrow \infty) \implies \frac{n|k|}{n+1} |f_k| \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty) \implies |k| |f_k| = 0,$$

d. h. $f_k = 0$ für alle $k \neq 0$. Also ist f konstant. □

Fazit. Die FEJÉRSchen Mittel konvergieren für jede Funktion aus $\mathcal{C}_{2\pi}$, aber eben nur langsam. Die Partialsummen der FOURIER-Reihen konvergieren nicht für alle f aus $\mathcal{C}_{2\pi}$. Ist aber f ein „bisschen“ besser als stetig, so konvergiert $S_n f$, und zwar um so schneller, je glatter f ist.

9.9 Die schwingende Saite



Folgende Überlegung stammt von Daniel BERNOULLI¹⁴ aus dem Jahre 1753. Wir betrachten eine schwingende Saite (siehe Abbildung links). Dabei sei $u(x, t)$ die Auslenkung dieser Saite an der Stelle $x \in [0, \pi]$ zum Zeitpunkt $t \geq 0$. Im schwingenden Zustand wirkt auf die Saite an den Stellen x bzw. $x + \Delta x$ die Kraft F (Abbildung links unten). Die Kraft F_{\uparrow} , mit der die Saite nach oben gezogen wird, ergibt sich also zu

$$\begin{aligned} F_{\uparrow} &= F \sin \alpha - F \sin \beta \\ &\stackrel{*}{\approx} F \tan \alpha - F \tan \beta \\ &= F u_x(x + \Delta x, t) - F u_x(x, t) \\ &\stackrel{*'}{=} F u_{xx}(\xi, t) \Delta x \\ &\approx F u_{xx}(x, t) \Delta x. \end{aligned}$$

Die Näherung * gilt für kleine Winkel α, β . An der Stelle *' ging der Mittelwertsatz der Differentialrechnung ein.

Andererseits ist $F_{\uparrow} = \text{Masse} \cdot \text{Beschleunigung nach oben}$. Ist ρ die Dichte des Materials der Saite, so ist also

$$F_{\uparrow} = \rho \Delta x u_{tt}(x, t).$$

Es ergibt sich $F u_{xx}(x, t) \Delta x \approx \rho \Delta x u_{tt}(x, t)$, und im Grenzübergang

$$u_{tt}(x, t) = \frac{F}{\rho} u_{xx}(x, t) =: c^2 u_{xx}(x, t).$$

Wir erhalten also eine partielle Differentialgleichung (die sogenannte **Wellengleichung**):

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}.$$

¹⁴Daniel BERNOULLI (1700 - 1782), schweizer Mathematiker, Physiker und Mediziner. Arbeitete u. a. zusammen mit EULER an den nach ihnen benannten Gleichungen.

Wir probieren es mit dem Ansatz

$$u(x, t) = v(x) w(t). \quad (9.8)$$

Einsetzen in die Wellengleichung ergibt mit $u_{tt} = v(x) w''(t)$, $u_{xx} = v''(x) w(t)$ die Gleichung

$$v(x) w''(t) = c^2 v''(x) w(t) \iff \frac{w''(t)}{c^2 w(t)} = \frac{v''(x)}{v(x)}.$$

Die linke Seite hängt nicht von x und die rechte Seite nicht von t ab, also existiert eine Konstante λ mit

$$\frac{w''(t)}{c^2 w(t)} = \frac{v''(x)}{v(x)} =: -\lambda.$$

Wir betrachten zunächst die erste Differentialgleichung $v''(x) + \lambda v(x) = 0$. Die allgemeine Lösung dieser ist

$$v(x) = A \cos(\sqrt{\lambda} x) + B \sin(\sqrt{\lambda} x).$$

Nehmen wir an, dass die Saite fest eingespannt ist, so haben wir die Randbedingungen $u(0, t) = 0$, $u(\pi, t) = 0$. Dies wird nach Gleichung (9.8) für $v(0) = v(\pi) = 0$ realisiert. Wir haben

$$v(0) = A, \quad \text{d. h.} \quad v(0) = 0 \iff A = 0$$

und

$$v(\pi) = B \sin(\sqrt{\lambda} \pi), \quad \text{d. h.} \quad v(\pi) = 0 \iff B = 0 \text{ oder } \sqrt{\lambda} \pi = n \pi.$$

Für $B = 0$ bekommt man nur die triviale Lösung $v = 0$, also $u = 0$, in der die Saite in Ruhe ist. Im uns interessierenden Fall $B \neq 0$ und $\lambda = n^2$ erhalten wir die nichttriviale Lösung

$$v_n(x) = \sin(n x).$$

Die zweite gewöhnliche Differentialgleichung ist nun $w_n''(t) + n^2 c^2 w_n(t) = 0$. Die allgemeine Lösung dieser ist

$$w_n(t) = A_n \cos(n c t) + B_n \sin(n c t).$$

Eine spezielle Lösung für die fest eingespannte Saite ist somit

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} (A_n \cos(n c t) + B_n \sin(n c t)) \sin(n x).$$

Jetzt kommen noch Anfangsbedingungen zum Tragen:

$$\begin{aligned} \text{Ausgangslage:} & \quad u(x, 0) = f(x), \\ \text{Ausgangsgeschwindigkeit:} & \quad u_t(x, 0) = g(x). \end{aligned}$$

Wir haben damit

$$u(x, 0) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \sin(nx) \stackrel{!}{=} f(x),$$

$$u_t(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} (-A_n n c \sin(nct) + B_n n c \cos(nct)) \sin(nx),$$

$$u_t(x, 0) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n n c \sin(nx) \stackrel{!}{=} g(x).$$

Setzen wir also f und g ungerade auf $[-\pi, \pi]$ fort, so sind A_n und $B_n n c$ gerade die FOURIER-Koeffizienten.

9.10 Integraltransformationen

Sie verallgemeinern die Philosophie

$$\text{Zeitbereich} \longleftrightarrow \text{Frequenzbereich}$$

und sind von der Form

$$(Tf)(\lambda) := F(\lambda) := \int_I f(t) K(\lambda, t) dt.$$

Dabei ist λ die Frequenz und t die Zeit. Mögliche Integraltransformationen sind beispielsweise

1. diskrete FOURIER-Transformation:

$$F(n) := \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \frac{e^{-int}}{2\pi} dt, \quad n \in \mathbb{Z},$$

2. FOURIER-Transformation:

$$(\mathfrak{F}f)(\lambda) := F(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\lambda t} dt, \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

oder $\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\lambda t} dt$ oder $\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \frac{e^{-i\lambda t}}{2\pi} dt$ oder $\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \frac{e^{-i\lambda t}}{\sqrt{2\pi}} dt$ etc.,

3. LAPLACE¹⁵-Transformation:

$$(\mathfrak{L}f)(\lambda) := F(\lambda) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-\lambda t} dt, \quad \lambda > 0.$$

Beispiel 9.6. Einige LAPLACE-Transformationen sind

$$(1) \quad (\mathfrak{L}1)(\lambda) = \int_0^{\infty} 1 e^{-\lambda t} dt = \left. \frac{e^{-\lambda t}}{-\lambda} \right|_0^{\infty} = \frac{1}{\lambda}.$$

$$(2) \quad (\mathfrak{L}t)(\lambda) = \int_0^{\infty} t e^{-\lambda t} dt = \int_0^{\infty} t d \frac{e^{-\lambda t}}{-\lambda} = \left. \frac{t e^{-\lambda t}}{-\lambda} \right|_0^{\infty} + \frac{1}{\lambda} \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} dt = \frac{1}{\lambda^2}.$$

¹⁵Pierre Simon Marquis DE LAPLACE (1749 -1827), französischer Mathematiker, Physiker und Astronom. Erklärte Entwicklung des Sonnensystems (KANT-LAPLACE-Theorie). Begründer der Potentialtheorie, Entwicklung der LAPLACE-Gleichung und der LAPLACE-Transformation.

(3) Allgemein gilt $(\mathcal{L}t^n)(\lambda) = \frac{n!}{\lambda^{n+1}}$, wie man z. B. durch vollständige Induktion zeigen kann.

Etwas mehr zu LAPLACE-Transformation.

Definition 9.6. Man sagt, eine Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ habe **exponentielles Wachstum der Rate** höchstens $\lambda_0 > 0$, wenn es ein reelles $C > 0$ und ein $t_0 > 0$ mit

$$|f(t)| \leq C e^{\lambda_0 t}$$

für alle $t \geq t_0$ gibt.

Satz 9.19. Sei f eine auf $[0, \infty)$ stückweise stetige Funktion von exponentiellem Wachstum der Rate höchstens λ_0 . Dann existiert die LAPLACE-Transformation $(\mathcal{L}f)(\lambda)$ für alle $\lambda > \lambda_0$ und ist absolut konvergent.

Beweis. Nach Voraussetzung gibt es ein $\lambda_0 > 0$ mit $|f(t)| \leq C e^{\lambda_0 t}$ für jedes $t \geq t_0$. Da f auf $[0, t_0]$ stückweise stetig, also dort beschränkt ist, gibt es ein $K > 0$ mit $|f(t)| \leq K$ für alle t mit $0 < t < t_0$. Infolge der Beschränktheit der Menge $\{e^{\lambda_0 t} : 0 \leq t \leq t_0\}$ gibt es ein $M > 0$ mit $|f(t)| \leq M e^{\lambda_0 t}$ für alle $t > 0$. Damit gilt

$$\int_0^A |f(t) e^{-\lambda t}| dt \leq \int_0^A M e^{(\lambda_0 - \lambda)t} dt = \frac{M}{\lambda - \lambda_0} e^{-(\lambda - \lambda_0)t} \Big|_0^A = \frac{M}{\lambda_0 - \lambda} (e^{-(\lambda - \lambda_0)A} - 1).$$

Für $\lambda > \lambda_0$ und $A \rightarrow \infty$ gilt somit

$$\int_0^{\infty} |f(t) e^{-\lambda t}| dt \leq \frac{M}{\lambda - \lambda_0}.$$

Also konvergiert $(\mathcal{L}f)(\lambda)$ für $\lambda > \lambda_0$ absolut. \square

Satz 9.20 (Linearität). Habe f bzw. g die LAPLACE-Transformation $(\mathcal{L}f)(\lambda)$ bzw. $(\mathcal{L}g)(\lambda)$, und konvergiere diese für $\lambda > \lambda_0$ bzw. $\lambda > \lambda'_0$. Dann konvergiert die LAPLACE-Transformation $(\mathcal{L}(\alpha f + \beta g))(\lambda)$ von $\alpha f + \beta g$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, für alle $\lambda > \max(\lambda_0, \lambda'_0)$ und es gilt

$$(\mathcal{L}(\alpha f + \beta g))(\lambda) = \alpha (\mathcal{L}f)(\lambda) + \beta (\mathcal{L}g)(\lambda).$$

Dies ergibt sich sofort aus der Linearität des Integrals.

Satz 9.21. Sei f auf $[0, \infty)$ differenzierbar und von exponentiellem Wachstum der Rate höchstens λ_0 , und sei f' stückweise \mathcal{C}^1 auf $[0, \infty)$. Dann gilt

$$(\mathcal{L}f')(\lambda) = \lambda (\mathcal{L}f)(\lambda) - f(0) \quad \forall \lambda > \lambda_0.$$

Beweis. Wir haben

$$(\mathcal{L}f')(\lambda) = \int_0^{\infty} f'(t) e^{-\lambda t} dt = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} df(t) = f(t) e^{-\lambda t} \Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} f(t) d e^{-\lambda t}.$$

Mit $|f(t)| \leq C e^{-\lambda_0 t}$ für alle $t > t_0$ ergibt sich

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |f(t) e^{-\lambda t}| = \lim_{t \rightarrow \infty} |f(t)| e^{-\lambda t} \leq C \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-(\lambda_0 + \lambda)t} = 0,$$

also $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) e^{-\lambda t} = 0$ und damit

$$(\mathcal{L}f')(\lambda) = -f(0) + \lambda \int_0^{\infty} f(t) e^{-\lambda t} dt = \lambda (\mathcal{L}f)(\lambda) - f(0).$$

□

Mit vollständiger Induktion kann man außerdem zeigen:

Korollar 9.5 (zu Satz 9.21). Ist $f \in \mathcal{C}^{n-1}[0, \infty)$, sind $f, f', \dots, f^{(n-1)}$ von exponentiellem Wachstum der Rate höchstens λ_0 und ist $f^{(n)}$ stückweise stetig auf $[0, \infty)$, so gilt

$$(\mathcal{L}f^{(n)})(\lambda) = \lambda^n (\mathcal{L}f)(\lambda) - \sum_{k=0}^{n-1} \lambda^k f^{(n-1-k)}(0)$$

für alle $\lambda > \lambda_0$.

Satz 9.22 (Faltungssatz). Die Funktionen f und g seien auf $[0, \infty)$ stückweise stetig und von exponentiellem Wachstum der Rate höchstens λ_0 . Für ihre Faltung

$$(f \circ g)(t) := \int_0^t f(t-x)g(x) dx = \int_0^t f(x)g(t-x) dx$$

gilt dann

$$(\mathcal{L}(f * g))(\lambda) = (\mathcal{L}f)(\lambda) \cdot (\mathcal{L}g)(\lambda).$$

Beweis. Setzt man f und g auf $(-\infty, 0)$ durch die Nullfunktion fort, so ergibt sich

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}f)(\lambda) \cdot (\mathcal{L}g)(\lambda) &= \int_0^\infty f(s) e^{-\lambda s} ds \cdot \int_0^\infty g(t) e^{-\lambda t} dt = \int_0^\infty \left(\int_0^\infty f(s) e^{-\lambda s} ds \right) g(t) e^{-\lambda t} dt \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty f(s) g(t) e^{-\lambda(s+t)} ds dt \stackrel{\star}{=} \int_0^\infty \int_{-t}^\infty f(s-t) g(t) e^{-\lambda s} ds dt \\ &\stackrel{\star'}{=} \int_0^\infty \int_0^\infty f(s-t) g(t) e^{-\lambda s} ds dt \stackrel{\star''}{=} \int_0^\infty \left(\int_0^\infty f(s-t) g(t) dt \right) e^{-\lambda s} ds \\ &= \int_0^\infty (f * g)(s) e^{-\lambda s} ds = (\mathcal{L}(f * g))(\lambda) \end{aligned}$$

unter Verwendung der Substitution $s := s - t$ an der Stelle \star , der Nullfortsetzung von f auf $(-\infty, 0)$ bei \star' und der infolge der absoluten Konvergenz von $(\mathcal{L}f)(s)$ und $(\mathcal{L}g)(t)$ erlaubten Vertauschung der Integrationsreihenfolge bei \star'' . \square

Beispiel 9.7. Es sei die Differentialgleichung 2. Ordnung

$$y'' + y' - 2y = 3e^x, \quad y(0) = y'(0) = 0,$$

zu lösen. Wendet man auf sie die LAPLACE-Transformation an, so ergibt sich

$$\begin{aligned} &(\mathcal{L}(y'' + y' - 2y))(\lambda) = (\mathcal{L}(3e^x))(\lambda) \\ \iff &(\mathcal{L}y'')(\lambda) + (\mathcal{L}y')(\lambda) - 2(\mathcal{L}y)(\lambda) = 3(\mathcal{L}e^x)(\lambda) \quad (\text{Satz 9.20}) \\ \iff &\lambda^2 (\mathcal{L}y)(\lambda) + \lambda (\mathcal{L}y)(\lambda) - 2(\mathcal{L}y)(\lambda) = 3(\mathcal{L}e^x)(\lambda) \quad (\text{Satz 9.21, Korollar 9.5}), \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned}
 (\mathfrak{L}y)(\lambda) &= \frac{3}{\lambda^2 + \lambda - 2} (\mathfrak{L}e^x)(\lambda) = \left(\frac{1}{\lambda - 1} - \frac{1}{\lambda + 2} \right) (\mathfrak{L}e^x)(\lambda) \\
 &\stackrel{(9.9)}{=} ((\mathfrak{L}e^x)(\lambda) - (\mathfrak{L}e^{-2x})(\lambda)) \cdot (\mathfrak{L}e^x)(\lambda), \quad \lambda > 1 \\
 &\stackrel{\text{Satz 9.22}}{=} (\mathfrak{L}((e^x - e^{-2x}) * e^x))(\lambda)
 \end{aligned}$$

wegen

$$(\mathfrak{L}e^{\alpha x}) = \int_0^{\infty} e^{\alpha t} e^{-\lambda t} dt = \frac{e^{(\alpha-\lambda)t}}{\alpha - \lambda} \Big|_0^{\infty} \stackrel{\alpha < \lambda}{=} \frac{1}{\lambda - \alpha}. \quad (9.9)$$

Die Faltung $(e^x - e^{-2x}) * e^x$ ist

$$\int_0^x (e^y - e^{-2y}) e^{x-y} dy = e^x \int_0^x dy - e^x \int_0^x e^{-3y} dy = x e^x - e^x \frac{e^{-3y}}{-3} \Big|_0^x = x e^x + \frac{e^{-2x}}{3} + \frac{e^x}{3}.$$

Also ist $y(x) = x e^x + \frac{1}{3} e^{-2x} + \frac{1}{3} e^x$ die gesuchte Lösung der Differentialgleichung.

- E' , 36
- E^c , 35
- $U_\varepsilon(a)$, 26
- $[x]_E$, 108
- $\lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x)$, 71
- $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$, 73
- $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$, 5
- $\mathcal{O}(g(x))$, $\mathcal{O}(g(x))$, 86
- $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, 40
- \mathbb{N}_0 , 13
- $\arcsin x$, $\arccos x$, $\arctan x$, 83
- \circ , 10
- \cup, \cap , 6
- $\deg p$, 55
- $\dot{U}_\delta(x_0)$, 86
- e , 61
- $\exp z$, e^z , 61
- id_E , 10
- i , 22
- $\int f(x) dx$, 160
- $\int_a^b f(x) dx$, 175
- $\mathcal{L}(a, b)$, 225
- $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n$, $\underline{\lim} a_n$, 37
- $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$, $\overline{\lim} a_n$, 37
- $\log x$, $\text{lognat } x$, 81
- $\mathcal{C}^{(m)}(I)$, 131
- $\mathcal{P}(A)$, 6
- \mathcal{T}_n , 273
- \mathbb{T} , 12
- $\max E$, $\min E$, 21
- $\text{Li } x$, 91, 172
- $\text{Si } x$, 172
- $\text{arsinh } x$, $\text{arcosh } x$, 84
- $\text{ld } x$, $\log x$, $\text{lg } x$, 82
- \overline{E} , 93
- $\overline{\mathbb{R}}$, 86
- $\partial f / \partial x_k$, 115
- π , 63
- $\pm\infty$, 28
- $\mathcal{R}[a, b]$, 175
- $\mathcal{R}_{2\pi}$, 247
- $\mathcal{RL}^2[a, b]$, 241
- $L^2(a, b)$, 225
- $\sec z$, $\text{cosec } z$, 67
- \setminus, Δ , 7
- \sim , 11, 87
- \simeq , 87
- $\sin z$, $\cos z$, 65
- $\sinh z$, $\cosh z$, 68
- $\sup E$, $\inf E$, 21
- $\tan z$, $\cot z$, 67
- \times , 8
- \rightarrow, \mapsto , 9
- \emptyset , 6
- $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{a_n\}$, 25
- $a_n \rightarrow a$, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$, 27
- $f'(a)$, $df(a)$, $Df(a)$, 111
- $f_n \rightrightarrows f$, 229
- $PC_{2\pi}^1$, 270
- Abbildung, 9
 - affin-lineare, 113
 - inverse, 10
 - lineare, 108
 - invertierbare, 109
- Ableitung, 111, 112
 - höherer Ordnung, 127
 - partielle, 115
 - höherer Ordnung, 139
 - zweite, 139
 - Richtungs-, 144
 - zweite, 127
- Abschließung, 93
- Alter des Universums, 32
- Area, 84
- Areahyperbelkosinus, 84
- Areahyperbelsinus, 84
- Arkus, 84
- Arkuskosinus, 83, 126

- Arkussinus, 83, 126
Arkustangens, 83, 126
- Beschleunigung, 128
Beta-Funktion, 220
bijektiv, 9
Bild, 9
Bogenmaß, 66
- CAUCHY-SCHWARZsche Ungleichung, 109, 146
CAUCHY-Kriterium, 44
CAUCHY-Produkt, 52
Continuum, 16
 -s-Hypothese, 17
- DIRICHLET-Funktion, 74
Definitionsgebiet, 9
Diagonalverfahren, CANTORSches, 14
Differenz, 7
 symmetrische, 7
differenzierbar
 in G , 111
 in einem Punkt, 110
 total, 118
direktes Produkt, 8
Diskontinuum, CANTORSches, 180, 186
Doppelreihensatz, 51
Dreiecksungleichung, 92
Durchmesser einer Zerlegung, 174
Durchschnitt, 6
- EUKLIDischer Abstand, 92
EULERSche Zahl, 61
Ellipse, 69
 Exzentrizität einer, 193
 Flächeninhalt einer, 199
elliptische Integrale
 unvollständige, 193
 vollständige, 194
Exponentialfunktion, 61, 82, 136, 138
 Funktionalgleichung der, 61
 Exponentialreihe, 46
 exponentielles Wachstum, 280
 Extremwertaufgaben, 154
- FOURIER-Koeffizient, 239, 241
FOURIER-Reihe, 225, 239, 241
Faktormenge, 12
Faltung, 248
Faltungssatz, 282
Fehlerfunktion, 172
Folge, 25
 alternierende, 25
 beschränkte, 29
 CAUCHY-, Fundamental-, 38
 divergente, 28
 Doppel-, 50
 explizite Angabe, 25
 konvergente, 27
 monotone, 33
 fallende, 33
 wachsende, 33
 Null-, 29
 quadratsummierbare, 226
 rekursive Angabe, 26
 Teil-, 34
 Umordnung einer, 31
Formel, STIRLINGSche, 220
Fundamentalsatz der Algebra, 22
Funktion, 9
 beschränkt, 78
 DIRICHLETSche, 174
 elementare, 171
 glatte, 131
 monoton
 fallende, 80
 wachsende, 80
 primitive, 159
 rationale, 57
 streng monoton
 fallende, 80
 wachsende, 80

- von beschränkter Variation, 257
 - Winkel-, 65
- Funktionensystem
 - orthogonales, 241
 - orthonormales, 241
- Gamma-Funktion, 218
 - Funktionalgleichung der, 219
- Geschwindigkeit
 - Durchschnitts-, 113, 125
 - Momentan-, 113, 125
- Gesetz, VERHULST, 26
- gleichmächtig, 13
- Gleichung, PARSEVALSche, 226, 244, 255
- Gradient, 117
- Gravitationsfeld, 103
- Grenzwert, 27, 73, 94, 101
 - aus Richtung ℓ , 97
 - iterierter, 98
 - linksseitiger, 71
 - oberer, 37
 - partieller, 34
 - rechtsseitiger, 72
 - unterer, 37
- Grundintegrale, 161
- Häufungspunkt, 36, 93
- HÖLDER-Exponent, 251
- HESSE-Matrix, 142
- Hauptsatz der Differential- & Integralrechnung, 184, 185
- Hauptwert, CAUCHYScher, 213
- Hyperbel, 57
 - kosinus, 68, 138
 - sinus, 68, 138
 - Einheits-, 85
 - Parameterdarstellung der, 69
- Igelsatz, 105
- imaginäre Einheit, 22
- Infimum, 21
- injektiv, 9
- insichkonvergent, 38
- Integral
 - absolut konvergentes, 218
 - bestimmtes, RIEMANNsches, 175
 - konvergentes, 211
 - Linearität des -s, 163
 - unbestimmtes, 160
 - uneigentliches, 211, 214
- Integrallogarithmus, 91, 172
- Integralsinus, 172
- Integralsumme, RIEMANNsche, 174
 - konvergente, 174
- Integraltransformation, 279
 - FOURIERSche, 279
 - diskrete, 279
 - LAPLACESche, 279
 - Linearität, 280
- Integration
 - durch Übergang ins Komplexe, 166
 - durch Variablensubstitution, 163, 187
 - partielle, 165, 188
- Intervall, 6
 - abgeschlossenes, 6
 - halboffenes, 6
 - offenes, 6
 - Zerlegung eines -s, 174
- JACOBI-Matrix, 115
- JENSENSche Ungleichung, 129
- KRONECKER-Symbol, 241
- Kardinalzahl, 13
- Kern
 - DIRICHLETScher, 245
 - FEJÉRScher, 245
- Kettenlinie, 69
- Kettenregel, 121
- Klasseneinteilung
 - Äquivalenzklasse, 12
- Klothoide, 197
- Komplement, 35

- komplexe (GAUSSsche) Ebene, 21
komplexe Zahlen, 21
 Argument, 22
 Betrag, 22
 Imaginärteil, 22
 Polardarstellung, 23
 Realteil, 22
Komposition, 10
konkav, 128
Konvergenz
 gleichmäßig, 229
 im Mittel, 224
 im quadratischen Mittel, 255
 punktweise, 229
Konvergenzkriterium, 40
 notwendiges, 40
konvex, 128
Kosekans, 67
Kosinus, 65, 138
Kotangens, 67
Krümmungskreis, 196
Kraftfeld, 208
Kreisumfang, 191
kritischer Punkt, 148
Kugeloberfläche, 205
Kugelvolumen, 200, 204
Kurve, 190
 Krümmung einer, 195
 Länge einer, 190
 Polardarstellung einer, 192
- LANDAU-Symbole, 86
LEBESGUE-Integral, 183, 224
LEIBNIZ-Kriterium, 42
Lemma
 RIEMANN-LEBESGUESches, 244
 RIEMANNSches, 244
Limes, 27
 inferior, 37
 superior, 37
Logarithmus
 natürlicher, 81, 126, 138
 zur Basis a , 82
- Majorantenkriterium, 41
Majorantensatz, 231
Maximum, 21
 lokales, 123, 129, 148, 149
Menge, 5
 überabzählbare, 13
 abgeschlossen, 93
 abgeschlossene, 35
 abzählbare, 13
 beschränkte, 20
 endliche, 13
 höchstens abzählbare, 13
 leere, 6
 offen, 93
 offene, 35
 unendliche, 13
 vom Maß 0, 179
 von oben beschränkte, 20
 von unten beschränkte, 20
metrischer Raum, 224
 vollständiger, 224
Minimum, 21
 lokales, 123, 129, 148, 149
Minorantenkriterium, 41
Mittel
 arithmetisches, 129
 FEJÉRSche, 253
 quadratisches, 129
Mittelwertsatz
 der Differentialrechnung, 124
 der Integralrechnung, 183
Multi-Index, 141
- Norm
 EUKLIDische, 92
 FROBENIUSSche, 109
 Spektral-, 109
- Obersumme, 178

- Partialsummenfolge, 40
 Polizisten-Regel, 32
 Polynom, 55
 Grad, 55, 238
 LEGENDRESches, 241
 lineares, 55
 quadratisches, 56
 trigonometrisches, 238
 positiv definit, 148
 Potenzmenge, 6
 Potenzreihe, 58, 137
 Konvergenzintervall einer, 59
 Konvergenzkreis einer, 59
 Konvergenzkreislinie einer, 59
 Konvergenzradius einer, 59
 Primzahlsatz, 90
 Prinzip, CAVALIERISches, 200
 Produktregel, 119

 Quotientenkriterium, 45
 Quotientenregel, 120

 RIEMANNsche Vermutung, 91
 Rechte-Hand-Regel, 104
 Regel, DE L'HÔSPITALSche, 126
 Reihe, 40
 absolut konvergente, 44
 alternierende, 42
 bedingt konvergent, 48
 binomische, 138
 divergente, 40
 Doppel-, 50
 divergente, 50
 konvergente, 50
 Summe einer, 50
 geometrische, 41
 harmonische, 40
 konvergente, 40
 Summe der, 40
 trigonometrische, 239
 Umordnung einer, 48
 unbedingt konvergent, 48
 Reihenverdichtung, 46
 Relation, 11
 Äquivalenz-, 12
 antisymmetrische, 12
 Ordnungs-, 12
 reflexive, 12
 symmetrische, 12
 transitive, 12
 Restglied
 LAGRANGESches, 131
 PEANOSches, 134

 Sattelpunkt, 149
 Satz
 über die Partialbruchzerlegung, 167
 über die Umkehrfunktion, 152
 über implizite Funktionen, 151
 BOLZANO-WEIERSTRASS, 34
 DIRICHLET, JORDAN, 257
 FEJÉR, 254
 FERMAT, 123
 Formel von CAUCHY-HADAMARD, 59
 HEINE-CANTOR, 177
 JACKSON, 273
 Konvergenz der TAYLOR-Reihe, WEIERSTRASS, 136
 Konvergenzkriterium, DINI, 250
 LIPSCHITZ, 257
 Lokalisierungsprinzip, RIEMANNSches, 248
 Multiplikatorenregel, LAGRANGE, 155
 ROLLE, 124
 SCHWARZ, 140
 SYLVESTER, 149
 TAYLORSche Formel, 131, 134, 140, 142
 WEIERSTRASS, 78
 WEIERSTRASS für Skalarfelder, 106
 WEIERSTRASSscher Approximations-, 1. & 2., 272

- Zwischenwert-, 79
- Schranke, 20
- größte untere, 21
 - kleinste obere, 21
 - obere, 20
 - untere, 20
- Sekans, 67
- Sekante, 112, 124
- Sektorensatz, 197
- Singularität, 57
- Stärke einer, 89
- Sinus, 65, 138
- Skalarfeld, 92, 116, 144
- Skalarprodukt, gewöhnliches, 103
- Spirale
- archimedische, 192, 199
 - zylindrische, 192
- Sprung, 74
- Stammfunktion, 159
- stationärer Punkt, 148
- Stetigkeit, 73
- ε - δ -Definition der, 77
 - auf E , 99, 101
 - auf einem Intervall $[a, b]$, 78
 - gleichmäßige, 176
 - HÖLDERSche, 251
 - in einem Intervall (a, b) , 73
 - in einem Punkt, 73, 99, 101
 - LIPSCHITZsche, 251
- Summation, CESÀROSche, 253
- Supremum, 21
- surjektiv, 9
- TAYLOR-Polynom, 131
- TAYLOR-Reihe, 131
- Tangens, 67
- Tangente, 112, 124
- Teilmenge, 6
- echte, 6
- Teufelstreppe, 186
- Torus, 204, 206
- Trennungseigenschaft, HAUSDORFFSche, 29
- Umgebung
- offene, 26, 93
 - punktierte, 86
- Umkehrabbildung, 10
- Umordnungssatz, 48
- großer, 49
 - RIEMANNscher, 48
- Ungleichung, BESSELSche, 244
- Unstetigkeit
1. Art, 74
 2. Art, 74
- hebbare, 74
- Untersumme, 178
- Urbild, 9
- Vektorprodukt, 104
- Vereinigung, 6
- Vergleichskriterium, 41
- vollständig, 39
- WALLISSches Produkt, 189
- Wellengleichung, 276
- Wendepunkt, 129
- Wertebereich, 9
- Wurzelkriterium, 45
- Zahlen, BERNOULLISche, 266
- Zauberformel, 170
- Zentralfeld, 103
- Zeta-Funktion, 261
- Zweipunktkompaktifizierung, 86