Н.В. Дерев'янко

(Інститут математики НАН України, Київ)

Ортопроекційні поперечники класів періодичних функцій багатьох змінних

nadyaderevyanko@gmail.com

Получены точные по порядку оценки ортопроекционных поперечников классов $B^{\Omega}_{p,\theta}$ периодических функций многих переменных в пространстве L_q для некоторых соотношений между параметрами p и q.

Obtained here are the exact order estimates of orthoprojective widths of the classes $B^{\Omega}_{p,\theta}$ of periodic functions of many variables in the space L_q for some relations between parameters p and q.

1. Вступ. В даній роботі вивчаються ортопроекційні поперечники класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ періодичних функцій багатьох змінних в просторі L_q для деяких співвідношень між параметрами p та q.

Наведемо спочатку необхідні позначення, а також означення класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ та апроксимативних характеристик, які будуть нами вивчатися.

Нехай $\mathbb{R}^d$, $d \geq 1$ — d-вимірний евклідів простір з елементами $x = (x_1, ..., x_d)$, $y = (y_1, ..., y_d)$, $(x, y) = x_1 y_1 + ... + x_d y_d$, і $L_p(\pi_d)$ — простір 2π-періодичних за кожною змінною і сумовних у степені p, $1 \leq p < \infty$ (відповідно суттєво обмежених при $p = \infty$), на кубі $\pi_d = \prod_{j=1}^{d} [-\pi; \pi]$ функцій $f(x) = f(x_1, ..., x_d)$, норма в якому визначається таким чином:

$$\|f\|_{L_p(\pi_d)} = \|f\|_p = \left((2\pi)^{-d} \int\limits_{\pi_d} |f(x)|^p dx \right)^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty,$$

$$\|f\|_{L_\infty(\pi_d)} = \|f\|_\infty = \operatorname*{ess\,sup}_{x \in \pi_d} |f(x)|.$$

Для $f \in L_p(\pi_d)$ і $h \in \mathbb{R}^d$ покладемо

$$\Delta_h f(x) = f(x+h) - f(x) \ ,$$

і означимо за формулою

$$\Delta_h^l f(x) = \Delta_h \Delta_h^{l-1} f(x) \ , \quad \Delta_h^0 f(x) = f(x),$$

— кратну різницю порядку $l \in \mathbb{N}$ функції $f(x)$ у точці $x = (x_1, ..., x_d)$ з кроком h.

Означимо модуль неперервності порядку $l \in \mathbb{N}$ функції $f \in L_p(\pi_d)$ згідно з формулою

$$\Omega_l(f;t)_p = \sup_{|h| \leq t} \|\Delta_h^l f(\cdot)\|_p \ ,$$

де $|h|$ — евклідова норма h.

Нехай $\Omega(t)$ — функція типу модуля неперервності порядку l, яка задана на $\mathbb{R}_+ = \{t, t \geq 0\}$, тобто $\Omega(t)$ задовольняє такі умови:

1) $\Omega(0) = 0$, $\Omega(t) > 0$ для $t > 0$;

2) $\Omega(t)$ неперервна;

3) $\Omega(t)$ зростає;

4) для всіх $n \in \mathbb{N}$ $\Omega(nt) \leq C n^l \Omega(t)$ де $l \in \mathbb{N}$, стала $C \geq 0$ не залежить від n і t.

Множину таких функцій Ω позначимо через Ψ_l. Зауважимо, що якщо $f \in L_p(\pi_d)$, то $\Omega_l(f;t)_p \in \Psi_l$.

Також будемо вважати, що Ω належить множинам S^α і S_l. Це означає наступне:

I. $\Omega \in S^\alpha$ $(\alpha > 0)$, якщо функція $\Omega(\tau)/\tau^\alpha$ майже зростає, тобто існує така незалежна від τ_1 і τ_2 стала $C_1 > 0$, що

$$\frac{\Omega(\tau_1)}{\tau_1^\alpha} \leq C_1 \frac{\Omega(\tau_2)}{\tau_2^\alpha} \ , \quad 0 < \tau_1 \leq \tau_2 \leq 1 \ .$$

II. $\Omega \in S_l$, якщо існує γ, $0 < \gamma < l$, таке що функція $\Omega(\tau)/\tau^\gamma$ майже спадає, тобто існує така незалежна від τ_1 і τ_2 стала $C_2 > 0$, що

$$\frac{\Omega(\tau_1)}{\tau_1^\gamma} \geq C_2 \frac{\Omega(\tau_2)}{\tau_2^\gamma} \ , \quad 0 < \tau_1 \leq \tau_2 \leq 1 \ .$$

Умови належності функції Ω до множин S^α і S_l часто називають у літературі умовами Барі-Стечкіна [1].

Покладемо також $\Phi_{\alpha,l} = \Psi_l \cap S^\alpha \cap S_l$.

Для наочності наведемо приклад функції $\Omega \in \Phi_{\alpha,l}$:

$$\Omega(t) = \begin{cases} t^r \left(\log^+(\frac{1}{t}) \right)^b, & t > 0 \ , \\ 0, & t = 0 \ , \end{cases}$$

де $\log^+(t) = \max\{1,\ \log(t)\}$, $\ \alpha < r < l$, а b — фіксоване дійсне число.

Тепер перейдемо безпосередньо до означення просторів $B^\Omega_{p,\theta}$ (див., наприклад, [2]).

Нехай $1 \le p, \theta \le \infty$ і $\Omega \in \Phi_{\alpha,l}$. Будемо вважати, що функція $f \in B^\Omega_{p,\theta}$, якщо вона задовольняє такі умови:

1) $f \in L_p(\pi_d)$;

2) $|f|_{B^\Omega_{p,\theta}} < \infty$,

де $|f|_{B^\Omega_{p,\theta}}$ визначається співвідношенням

$$|f|_{B^\Omega_{p,\theta}} = \begin{cases} \left(\int\limits_0^{+\infty} (\frac{\Omega_\ell(f;t)_p}{\Omega(t)})^\theta \frac{dt}{t} \right)^{1/\theta}, 1 \le \theta < \infty \ , \\ \sup\limits_{t>0} \frac{\Omega_\ell(f,t)_p}{\Omega(t)} \ , \qquad \theta = \infty. \end{cases}$$

Простір $B^\Omega_{p,\theta}$ — лінійний нормований простір з нормою

$$\|f\|_{B^\Omega_{p,\theta}} = \|f\|_p + |f|_{B^\Omega_{p,\theta}} \ .$$

Якщо $\Omega(t) = t^r$, то простори $B^\Omega_{p,\theta}$ збігаються з просторами О.В. Бєсова $B^r_{p,\theta}$ [3] і, зокрема, при $\theta = \infty$ отримаємо $B^r_{p,\infty} = H^r_p$, де H^r_p — простори введені С.М. Нікольським [4]. Якщо $\|f\|_{B^\Omega_{p,\theta}} \le 1$ будемо говорити, що функція f належить класу $B^\Omega_{p,\theta}$, зберігаючи при цьому для класів ці ж самі позначення, що і для відповідних просторів $B^\Omega_{p,\theta}$.

Надалі будемо вважати, що для двох невід'ємних величин A і B запис $A \asymp B$ означає, що існують константи C_3 , $C_4 > 0$ такі, що $C_3 A \le B \le C_4 A$. Записи $A \ll B$ або $A \gg B$, означають що $CA \le B$ і $B \le CA$ відповідно. Всі константи C_i , $i = 1, 2, ...$, які будуть зустрічатися у роботі, можуть залежати лише від тих параметрів, що входять в означення класу, метрики, в якій оцінюється похибка наближення, та розмірності простору $\mathbb{R}^d$.

Далі нам зручно буде користуватися означенням класів $B^\Omega_{p,\theta}$ в дещо іншому вигляді.

Позначимо через $V_m(t)$, $m \in \mathbb{N}$, $t \in \mathbb{R}$, ядро Валле Пуссена вигляду

$$V_m(t) = 1 + 2\sum_{k=1}^{m} \cos kt + 2\sum_{k=m+1}^{2m} \left(\frac{2m-k}{m}\right) \cos kt \ .$$

Багатовимірне ядро $V_m(x)$, $m \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}^d$, означимо за формулою

$$V_m(x) = \prod_{j=1}^{d} V_m(x_j) \ .$$

Для функції $f \in L_p(\pi_d)$ розглянемо оператор згортки $\mathbf{V}_m$ цієї функції з ядром $V_m(x)$, тобто

$$\mathbf{V}_m f = f * V_m = \mathrm{V}_m(f, x) \ .$$

Таким чином, $V_m(f, x)$ — кратна сума Валле Пуссена функції $f(x)$. Покладемо для $f \in L_p(\pi_d)$

$$\sigma_0(f, x) = V_1(f, x) \ , \quad \sigma_s(f, x) = V_{2^s}(f, x) - V_{2^{s-1}}(f, x) \ , \quad s \in \mathbb{N} \ .$$

В наведених позначеннях при $1 \le p \le \infty$ (з точністю до абсолютних сталих) класи $B^{\Omega}_{p,\theta}$ можна визначити таким чином (див., наприклад, [2]): $B^{\Omega}_{p,\theta} = \{f \in L_p(\pi_d) : \|f\|_{B^{\Omega}_{p,\theta}} \le 1\}$, де

$$\|f\|_{B^{\Omega}_{p,\theta}} \asymp \begin{cases} \left(\sum\limits_{s \in \mathbb{Z}_+} \left(\frac{\|\sigma_s(f,\cdot)\|_p}{\Omega(2^{-s})} \right)^{\theta} \right)^{1/\theta} , & 1 \le \theta < \infty \ , \\ \sup\limits_{s \in \mathbb{Z}_+} \frac{\|\sigma_s(f,\cdot)\|_p}{\Omega(2^{-s})} \ , & \theta = \infty \ . \end{cases} \tag{1}$$

Варто зазначити, що у випадку $1 < p < \infty$ можна записати еквівалентне співвідношення для норм функцій з класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$, $1 \le \theta \le \infty$, використовуючи в (1) замість $\sigma_s(f, x)$ "блоки" ряду Фур'є функції $f(x)$.

2. Ортопроекційні поперечники класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ в метриці простору L_q, $1 \le q \le p \le \infty$, $(p, q) \notin \{(1, 1), \ (\infty, \infty)\}$. Нехай $\{u_i(x)\}_{i=1}^m$ — ортонормована в просторі $L_2(\pi_d)$ система функцій $u_i \in L_\infty(\pi_d)$. Всякій функції $f \in L_q(\pi_d)$, $1 \le q \le \infty$, поставимо у відповідність апарат наближення вигляду $\sum\limits_{i=1}^{m} (f, u_i) u_i(x)$, тобто ортогональну проекцію функції $f(x)$ на підпростір породжений системою функцій $\{u_i(x)\}_{i=1}^m$. Тут і далі $(f, u_i) = (2\pi)^{-d} \int\limits_{\pi_d} f(x) \overline{u_i(x)} dx$.

Якщо $F \subset L_q(\pi_d)$ — деякий функціональний клас, то величина

$$d_m^{\perp}(F,\ L_q) = \inf_{\{u_i(x)\}_{i=1}^m} \sup_{f \in F} \left|\left| f(\cdot) - \sum_{i=1}^{m} (f, u_i) u_i(\cdot) \right|\right|_q \tag{2}$$

називається ортопроекційним поперечником цього класу в просторі $L_q(\pi_d)$. Поперечники $d_m^{\perp}(F,\ L_q)$ введені В.М. Темляковим [5].

Паралельно з поперечниками $d_m^{\perp}(F,\ L_q)$ будемо розглядати величини $d_m^B(F,\ L_q)$, також введені В.М. Темляковим (див., наприклад, [6]), які означаються за формулою

$$d_m^B(F,\ L_q) = \inf_{G \in L_m(B)_q} \sup_{f \in F \cap D(G)} ||f(\cdot) - Gf(\cdot)||_q \tag{3}$$

Тут через $L_m(B)_q$ позначено множину лінійних операторів G, які задовольняють умови:

а) область визначення $D(G)$ цих операторів містить всі тригонометричні поліноми, а їх область значення міститься в підпросторі розмірності m простору $L_q(\pi_d)$;

б) число $B \geq 1$ і для всіх векторів $k = (k_1, ..., k_d)$ виконується нерівність

$$||Ge^{i(k,\cdot)}||_2 \leq B.$$

Зауважимо, що до $L_m(1)_2$ належать оператори ортогонального проектування на підпростори розмірності m, а також оператори, які задаються по ортонормованій системі функцій за допомогою мультиплікатора, який означається послідовністю $\{\lambda_l\}$ такою, що $|\lambda_l| \leq 1$ для всіх l.

Легко бачити, що згідно з означеннями величин $d_m^{\perp}(F,\ L_q)$ і $d_m^B(F,\ L_q)$, вони пов'язані між собою нерівністю

$$d_m^B(F,\ L_q) \leq d_m^{\perp}(F,\ L_q) \tag{4}$$

З детальнішою інформацією стосовно дослідження величин (2) і (3) можна ознайомитися в роботі [7].

З нерівності (4) видно, що оцінки знизу величин $d_m^B(F,\ L_q)$ можуть служити оцінками знизу для ортопроекційних поперечників $d_m^{\perp}(F,\ L_q)$ і, навпаки, оцінки зверху для поперечників $d_m^{\perp}(F,\ L_q)$ можна використовувати для оцінок зверху величин $d_m^B(F,\ L_q)$. Цю обставину будемо використовувати при доведені відповідних тверджень. Відмітимо також, що при доведені оцінок знизу величин $d_m^B(B^{\Omega}_{p,\theta},\ L_q)$ будемо використовувати метод, який застосовував В.М. Темляков при встановлені оцінок величин $d_m^B(F,\ L_q)$ для інших функціональних класів F ([5, 6, 8]). Суть цього методу полягає в побудові функцій з класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ які "погано" наближаються за допомогою операторів G.

При встановлені оцінок зверху поперечників $d_m^{\perp}(F,\ L_q)$ нам знадобляться відомі оцінки для кубічних сум Фур'є. Для формулювання відповідних результатів наведемо необхідні позначення та означення.

Для $f \in L_1(\pi_d)$ і $n \in \mathbb{N}$ через $S_{\square_{2^n}}(f,x)$ позначимо кратну суму Фур'є

$$S_{\square_{2^n}}(f,x) = \sum_{k\in\square_{2^n}} \widehat{f}(k) e^{i(k,x)}, \qquad (5)$$

де $\square_{2^n} = \{k = (k_1,...,k_d)\ :\ |k_j| < 2^n,\ 1 \le j \le d\}$ і $\widehat{f}(k)$ — коефіцієнти Фур'є функції f, яку природньо назвати кубічною сумою Фур'є.

Для $f \in L_q,\ 1 \le q \le \infty$, покладемо

$$\mathcal{E}_{\square_{2^n}}(f)_q = \|f(\cdot) - S_{\square_{2^n}}(f,\cdot)\|_q$$

і для функціонального класу $F \subset L_q$ відповідно

$$\mathcal{E}_{\square_{2^n}}(F)_q = \sup_{f\in F} \mathcal{E}_{\square_{2^n}}(f)_q\ .$$

Зазначимо, що величини $d_m^{\perp}(B^{\Omega}_{p,\theta}, L_q)$ і $\mathcal{E}_{\square_{2^n}}(B^{\Omega}_{p,\theta})_q$, де $m \asymp 2^{nd}$, пов'язані між собою нерівністю

$$d_m^{\perp}(B^{\Omega}_{p,\theta},\ L_q) \le \mathcal{E}_{\square_{2^n}}(B^{\Omega}_{p,\theta})_q. \qquad (6)$$

Тепер перейдемо до формулювання і доведення отриманих результатів.

Теорема 1. *Нехай* $1 \le \theta \le \infty$ *і* $1 \le q \le p \le \infty$, $(p,q) \notin \{(1,1),\ (\infty,\infty)\}$ *і функція* $\Omega \in \Phi_{\alpha,l}$, $\alpha > 0$. *Тоді*

$$d_m^B(B^{\Omega}_{p,\theta},\ L_q) \asymp d_m^{\perp}(B^{\Omega}_{p,\theta},\ L_q) \asymp \Omega(m^{-1/d}). \qquad (7)$$

Доведення. Оцінку зверху в (7) одержимо з оцінок наближення функцій з класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ їх кубічними сумами Фур'є у метриці простору L_q [9] скориставшись нерівністю (6).

Переходячи в (7) до оцінки знизу зауважимо, що відповідну оцінку достатньо отримати для величини $d_m^B(B_{\infty,1}^{\Omega},\ L_1)$.

При оцінці знизу величин $d_m^B(B_{\infty,1}^{\Omega},\ L_1)$, не зменшуючи загальності, будемо вважати, що оператори G належать множині $L_m(B)_2$. Ця обставина детально обгрунтована у роботі [8].

Отже, нехай оператор $G \in L_m(B)_2$ і для довільного вектора $k=(k_1,...,k_d)$

$$Ge^{i(k,x)} = \sum_{l=1}^{\overline{m}} a_l^k \psi_l(x), \tag{8}$$

де $\overline{m}$ — вимірність підпростору в $L_2(\pi_d)$ значень оператора G, а $\{\psi_l(x)\}_{l=1}^{\overline{m}}$ — ортонормований базис в цьому просторі. Зауважимо, що $\overline{m} \le m$ і для всіх $k=(k_1,...,k_d)$

$$\sum_{l=1}^{\overline{m}} |a_l^k|^2 \le B^2, \tag{9}$$

а також для довільного l

$$\sum_k |\widehat{\psi}_l(k)|^2 \le 1. \tag{10}$$

Позначимо через $\mu(s)$, $s=0,1,2,...$ підмножину цілочислової решітки вигляду

$$\mu(s) = \{k=(k_1,...,k_d):\ 2^{s-1} \le \max_{j=\overline{1,d}} |k_j| < 2^s\}\ .$$

Далі нехай n таке, що

$$|\mu(n-1)| < 4B^2 m \le |\mu(n)|,$$

де $|\mu(l)|$ — кількість елементів множини $\mu(l) \subset \mathbb{Z}^d$.

Розглянемо наближення функцій $e^{i(k,x)}$, $k \in \mu(n)$, операторами $G \in L_m(B)_2$. Позначимо

$$\beta_k = (Ge^{i(k,x)}, e^{i(k,x)}).$$

Тоді з огляду на (8)

$$\beta_k = \sum_{l=1}^{\overline{m}} a_l^k \widehat{\psi}_l(k),$$

і тому використовуючи (9) отримуємо

$$|\beta_k|^2 \le \sum_{l=1}^{\overline{m}} |a_l^k|^2 \sum_{l=1}^{\overline{m}} |\widehat{\psi}_l(k)|^2 \le B^2 \sum_{l=1}^{\overline{m}} |\widehat{\psi}_l(k)|^2.$$

Далі, враховуючи співвідношення (10), будемо мати

$$\sum_{k\in\mu(n)} |\beta_k|^2 \le B^2 \sum_{k\in\mu(n)} \sum_{l=1}^{\overline{m}} |\widehat{\psi}_l(k)|^2 = B^2 \sum_{l=1}^{\overline{m}} \sum_{k\in\mu(n)} |\widehat{\psi}_l(k)|^2 \le B^2 \sum_{l=1}^{\overline{m}} 1 = B^2\overline{m}.$$

Звідси робимо висновок, що знайдеться вектор $k^0 \in \mu(n)$ такий, що $\beta_{k^0} \le \frac{1}{2}$.

В такому випадку, оскільки $(e^{i(k^0,x)}, e^{i(k^0,x)}) = 1$, можемо записати

$$\frac{1}{2} \le |1-\beta_{k^0}| = |(e^{i(k^0,\cdot)} - Ge^{i(k^0,\cdot)}, e^{i(k^0,\cdot)})| \le$$

$$\le \|e^{i(k^0,\cdot)} - Ge^{i(k^0,\cdot)}\|_1 \ , \tag{11}$$

де $G \in L_m(B)_2$.

Нарешті, враховуючи, що для операторів $A \in L_m(B)_2$ та $G \in L_m(B)_1$ і тригонометричних поліномів з відповідним спектром виконується нерівність (див., наприклад, [8]):

$$\|t - At\|_1 \le 3^d \|t - Gt\|_1 \ ,$$

згідно з (11) будемо мати

$$\|e^{i(k^0,\cdot)} - Ge^{i(k^0,\cdot)}\|_1 \ge \frac{1}{2} 3^{-d}. \tag{12}$$

Тепер розглянемо функцію

$$g(x) = \Omega(2^{-n}) e^{i(k^0,x)}.$$

Використовуючи властивість 3) функції $\Omega(t)$, отримуємо

$$\|g\|_{B^{\Omega}_{\infty,1}} = \sum_{s=0}^{n} \Omega^{-1}(2^{-s}) \|\sigma_s(g,\cdot)\|_\infty \ll \Omega^{-1}(2^{-n}) \|\sigma_n(g,\cdot)\|_\infty \ll 1 \ ,$$

а це і буде означати, що $g \in B^{\Omega}_{\infty,1}$. Далі, скориставшись оцінкою (12), можемо записати

$$\|g(\cdot) - Gg(\cdot)\|_1 = \Omega(2^{-n})\|e^{i(k^0,\cdot)} - Ge^{i(k^0,\cdot)}\|_1 \gg \Omega(2^{-n}).$$

Таким чином

$$d^{\perp}_m(B^{\Omega}_{\infty,1}, L_1) \geq d^B_m(B^{\Omega}_{\infty,1}, L_1) \gg \Omega(2^{-n}) \asymp \Omega(m^{-1/d}).$$

Теорему доведено.

У випадках $(p,q) \in \{(1,1),\ (\infty,\infty)\}$ вдалося отримати порядкові оцінки тільки для величин $d^B_m(B^{\Omega}_{p,\theta},\ L_q)$.

Теорема 2. *Нехай* $1 \leq \theta \leq \infty$, $p \in \{1,\infty\}$ *і функція* $\Omega \in \Phi_{\alpha,l}$, $\alpha > 0$. *Тоді*

$$d^B_m(B^{\Omega}_{p,\theta},\ L_p) \asymp \Omega(m^{-1/d}). \tag{13}$$

Доведення. Встановимо спочатку оцінку зверху в (13). Для цього достатньо отримати відповідну оцінку зверху для класів H^{Ω}_p. По заданому $m \in \mathbb{N}$ підберемо число $n \in \mathbb{N}$ із співвідношення $2^{nd} \leq m < 2^{(n+1)d}$ і розглянемо для $f \in H^{\Omega}_p$ наближаючий поліном вигляду

$$t_n(f,x) = \sum_{s=0}^{n} \sigma_s(f,x).$$

Зауважимо, що оператор G, який ставить у відповідність функції f поліном такого вигляду, належить $L_m(1)_2$.

Оскільки для $f \in H^{\Omega}_p$, $p \in \{1,\infty\}$, виконується співвідношення $\|\sigma_s(f,\cdot)\|_p \leq \Omega(2^{-s})$, то використовуючи нерівність Мінковського, будемо мати

$$\|f(\cdot) - t_n(f,\cdot)\|_p = \left\| \sum_{s=n+1}^{\infty} \sigma_s(f,\cdot) \right\|_p \leq$$

$$\leq \sum_{s=n+1}^{\infty} \|\sigma_s(f,\cdot)\|_p \leq \sum_{s=n+1}^{\infty} \Omega(2^{-s}) = \sum_{s=n+1}^{\infty} \frac{\Omega(2^{-s})}{2^{-\alpha s}} 2^{-\alpha s}$$

Враховуючи, що функція $\Omega \in S^{\alpha}$, $\alpha > 0$, з останньої нерівності одержуємо

$$\|f(\cdot) - t_n(f,\cdot)\|_p \leq \frac{\Omega(2^{-n})}{2^{-\alpha n}} \sum_{s=n+1}^{\infty} 2^{-\alpha s} \ll \Omega(2^{-n}).$$

Звідси отримуємо

$$d_m^B(B_{p,\theta}^\Omega,\ L_q) \le d_m^B(H_p^\Omega,\ L_q) \le \sup_{f\in H_p^\Omega} \|f(\cdot)-t_n(f,\cdot)\|_p \ll$$

$$\ll \Omega(2^{-n}), \qquad m \asymp 2^{nd}.$$

Необхідна оцінка знизу в (13) випливає із відповідної оцінки величини $d_m^B(B_{\infty,1}^\Omega,\ L_1)$, яка отримана при доведенні попередньої теореми.

Теорему доведено.

Зауваження 1. Нехай $\Omega(t)=t^r$. Тоді в такому випадку відповідні твердження до теорем 1 і 2 встановлено в роботі [10].

Зауваження 2. В одновимірному випадку результати теорем 1 і 2 одержано раніше в роботах [11, 12].

Література

[1] Бари Н.К., Стечкин С.Б. *Наилучшие приближения и дифференциальные свойства двух сопряженных функций* // Тр. Моск. мат. о-ва. — 1956. — **5**. — С. 483 – 522.

[2] Xu Guiqiao. *The n-widths for a generalized periodic Besov classes* // Acta Math. Sci. — 2005. — **25**, №4. — P. 663 – 671.

[3] Бесов О.В. *О некотором семействе функциональных пространств. Теоремы вложения и продолжения* // Докл. АН СССР. — 1959. — **126**, №6. — С. 1163 – 1165.

[4] Никольский С.М. *Неравенства для целых функций конечной степени и их применение в теории дифференцируемых функций многих переменных* // Тр. Мат. ин-та АН СССР. — 1951. — **38**. — С. 244 – 278.

[5] Темляков В.Н. *Поперечники некоторых классов функций нескольких переменных* // Докл. АН СССР. — 1982. — **267**, №2. — С. 314 – 317.

[6] Темляков В.Н. *Приближение функций с ограниченной смешанной производной* // Тр. Мат. ин-та АН СССР. — 1986. — **178**, №2. — С. 3 – 113.

[7] Романюк А.С. *Поперечники и наилучшее приближение классов $B_{p,\theta}^r$ периодических функций многих переменных* // Anal. Math. — 2011. — **37**, №3. — С. 181 – 213.

[8] Темляков В.Н. *Оценки асимптотических характеристик классов функций с ограниченной смешанной производной или разностью* // Тр. Мат. ин-та АН СССР. — 1989. — **189**. — С. 138 – 168.

[9] Стасюк С.А. *Наближення класів $B^{\omega}_{p,\theta}$ періодичних функцій багатьох змінних поліномами зі спектром в кубічних областях* // Мат. студії — 2011. — **35**, №1. — С. 66 – 73.

[10] Романюк А.С., Романюк В.С. *Тригонометрические и ортопроекционные поперечники классов периодических функций многих переменных* // Укр. мат. журн. — 2009. — **61**, №10. — С. 1348 – 1366.

[11] Стасюк С.А., Федуник О.В. *Апроксимативні характеристики класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ періодичних функцій багатьох змінних* // Укр. мат. журн. — 2006. — **58**, №5. — С. 692 – 704.

[12] Федуник О.В. *Оцінки апроксимативних характеристик класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ періодичних функцій багатьох змінних в просторі L_q* // Проблеми теорії наближення функцій та суміжні питання: Збірник праць Ін-ту математики НАН України.— 2005. — **2**, №2. — С. 268 – 294.