Lösungen zur 35. Übung:

Ü 35.1 Es sei eine inhomogene lineare DGL n. Ordnung mit konstanten Koeffizienten gegeben:

$$a_n y^{(n)}(x) + \ldots + a_1 y'(x) + a_0 y(x) = f(x)\,.$$

Gesucht sei eine partikuläre Lösung $y_p(x)$ dieser Gleichung. Um das Verfahren der *Variation der Konstanten* anwenden zu können, müssen wir zunächst die allgemeine homogene Lösung der Gleichung bestimmen. Sie ist von der Form

$$y_h(x) = C_1 y_{h_1}(x) + \ldots + C_n y_{h_n}(x)\,. \qquad (C_1, \ldots, C_n \in \mathbb{R})$$

Wir variieren nun die darin vorkommenden Konstanten $C_1 \rightsquigarrow C_1(x), \ldots, C_n \rightsquigarrow C_n(x)$ und erhalten so den Ansatz

$$y_p(x) = C_1(x) y_{h_1}(x) + \ldots + C_n(x) y_{h_n}(x)\,.$$

Zur Bestimmung der Funktionen $C_1'(x), \ldots, C_n'(x)$ lösen wir das Gleichungssystem

$$\begin{aligned}
C_1'(x) y_{h_1}(x) + \ldots + C_n'(x) y_{h_n}(x) &= 0\\
C_1'(x) y_{h_1}'(x) + \ldots + C_n'(x) y_{h_n}'(x) &= 0\\
&\vdots\\
C_1'(x) y_{h_1}^{(n-2)}(x) + \ldots + C_n'(x) y_{h_n}^{(n-2)}(x) &= 0\\
C_1'(x) y_{h_1}^{(n-1)}(x) + \ldots + C_n'(x) y_{h_n}^{(n-1)}(x) &= \frac{f(x)}{a_n}\,.
\end{aligned}$$

Durch Integration erhält man schließlich die Funktionen $C_1(x), \ldots, C_n(x)$.

(a) Die allgemeine homogene Lösung von $y'' + y' = x^2$ lautet

$$y_h(x) = a + b\mathrm{e}^{-x}\,. \quad (a, b \in \mathbb{R})$$

Durch Variation der Konstanten erhalten wir dann eine partikuläre Lösung

$$y_p(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 2x - 2\,.$$

Insgesamt lautet die allgemeine Lösung der inhomogenen DGL also

$$y(x) = a + b\mathrm{e}^{-x} + \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 2x\,. \quad (a, b \in \mathbb{R})$$

Die Einbeziehung der Anfangsbedingungen $y(1) = -1$ und $y'(1) = 1$ führt schließlich auf die Lösung des AWPs mit $a = -\frac{7}{3}$ und $b = 0$.

(b) Die allgemeine homogene Lösung von $y'' - 4y' + 4y = 9x\mathrm{e}^{2x}\ln(x)$ lautet

$$y_h(x) = a\mathrm{e}^{2x} + bx\mathrm{e}^{2x}\,. \quad (a, b \in \mathbb{R})$$

Durch Variation der Konstanten bestimmen wir die partikuläre Lösung

$$y_p(x) = \left(\frac{3}{2}\ln(x) - \frac{5}{4}\right)x^3\mathrm{e}^{2x}\,.$$

Insgesamt lautet die allgemeine Lösung der inhomogenen DGL also

$$y(x) = (a + bx)\mathrm{e}^{2x} + \left(\frac{3}{2}\ln(x) - \frac{5}{4}\right)x^3\mathrm{e}^{2x}\,. \quad (a, b \in \mathbb{R})$$

(c) Die allgemeine homogene Lösung von $y'' + 3y' + 2y = \frac{1}{1+\mathrm{e}^x}$ lautet

$$y_h(x) = a\mathrm{e}^{-x} + b\mathrm{e}^{-2x}\,. \quad (a, b \in \mathbb{R})$$

Durch Variation der Konstanten bestimmen wir die partikuläre Lösung

$$y_p(x) = \ln(1 + \mathrm{e}^x) \cdot (\mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^{-2x}) - \mathrm{e}^{-x}\,.$$

Insgesamt lautet die allgemeine Lösung der inhomogenen DGL also

$$y(x) = a\mathrm{e}^{-x} + b\mathrm{e}^{-2x} + \ln(1 + \mathrm{e}^x) \cdot (\mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^{-2x})\,. \quad (a, b \in \mathbb{R})$$

(d) Die allgemeine homogene Lösung von $y''' + y' = \frac{1}{\cos(x)}$ lautet

$$y_h(x) = a + b\cos(x) + c\sin(x)\,. \quad (a, b, c \in \mathbb{R})$$

Durch Variation der Konstanten bestimmen wir die partikuläre Lösung

$$y_p(x) = \ln\left|\tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| - x\cos(x) + \sin(x)\ln|\cos(x)|\,.$$

Insgesamt lautet die allgemeine Lösung der inhomogenen DGL also

$$y(x) = a + b\cos(x) + c\sin(x) + \ln\left|\tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| - x\cos(x) + \sin(x)\ln|\cos(x)|\,. \quad (a, b, c \in \mathbb{R})$$

Die Einbeziehung der Anfangsbedingungen $y(0) = y'(0) = y''(0) = 1$ führt dann auf die spezielle Lösung mit $a = 2$, $b = -1$ und $c = 1$.

Ü 35.2 (a) Wir wählen nach Tabelle den Störgliedansatz

$$y_p(x) = B_0 + B_1 x\,, \quad B_0,\, B_1 \in \mathbb{R}\,.$$

Einsetzen in die DGL $y'' + 4y' - 5y = 2x$ liefert dann eine Gleichung für die Konstanten B_0 und B_1. Wir erhalten so $B_0 = -\frac{8}{25}$ und $B_1 = -\frac{2}{5}$ und folglich als partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung

$$y_p(x) = -\frac{1}{25}(8 + 10x)\,.$$

Als nächstes bestimmen wir die allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen Gleichung $y'' + 4y' - 5y = 0$. Sie lautet

$$y_h(x) = a\mathrm{e}^{x} + b\mathrm{e}^{-5x}\,. \quad (a, b \in \mathbb{R})$$

Zusammen mit der partikulären Lösung ergibt sich die allgemeine Lösung

$$y(x) = a\mathrm{e}^{x} + b\mathrm{e}^{-5x} - \frac{1}{25}(8 + 10x)\,. \quad (a, b \in \mathbb{R})$$

Zur Anfangsbedingung $y(0) = y'(0) = 0$ gehört schließlich die spezielle Lösung für die Wahl $a = \frac{1}{3}$ und $b = -\frac{1}{75}$.

(b) Für die Gleichung $y''-3y'+2y = \mathrm{e}^{3x}$ wählen wir nach Tabelle den Störgliedansatz $y_p(x) = A\mathrm{e}^{3x}$. Dieser führt auf die Gleichung

$$9A\mathrm{e}^{3x} - 3 \cdot 3A\mathrm{e}^{3x} + 2 \cdot A\mathrm{e}^{3x} = \mathrm{e}^{3x}\,,$$

aus der wir $A = \frac{1}{2}$ bestimmen und die partikuläre Lösung

$$y_p(x) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{3x}\,.$$

Als homogene Lösung berechnen wir außerdem

$$y_h(x) = a\mathrm{e}^{x} + b\mathrm{e}^{2x}\,. \quad (a, b \in \mathbb{R})$$

Insgesamt ergibt sich damit die Lösung

$$y(x) = a\mathrm{e}^{x} + b\mathrm{e}^{2x} + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{3x}\,. \quad (a, b \in \mathbb{R})$$

(c) Als homogene Lösung der DGL $y'' - 3y' + 2y = \mathrm{e}^{2x}$ haben wir wie in Aufgabenteil (b)

$$y_h(x) = a\mathrm{e}^{x} + b\mathrm{e}^{2x}\,. \quad (a, b \in \mathbb{R})$$

Wir wählen nun aber nicht den Standard-Störgliedansatz $y_p(x) = A\mathrm{e}^{2x}$, sondern wegen äußerer Resonanz $y_p(x) = Ax\mathrm{e}^{2x}$. Dieser führt auf die Gleichung

$$(4x + 4)A\mathrm{e}^{2x} - 3 \cdot (2x + 1)A\mathrm{e}^{2x} + 2 \cdot Ax\mathrm{e}^{2x} = \mathrm{e}^{2x}\,.$$

Wir erhalten $A = 1$ und die partikuläre Lösung

$$y_p(x) = x\mathrm{e}^{2x}\,.$$

Insgesamt ergibt sich die Lösung

$$y(x) = a\mathrm{e}^{x} + b\mathrm{e}^{2x} + x\mathrm{e}^{2x}\,. \quad (a, b \in \mathbb{R})$$

(d) Wir wählen nach Tabelle den Störgliedansatz $y_p(x) = (B_0 + B_1 x)\cos(x) + (C_0 + C_1 x)\sin(x)$. Er führt auf die partikuläre Lösung

$$y_p(x) = -\cos(x) - x\sin(x)\,.$$

Zusammen mit der homogenen Lösung

$$y_h(x) = a\mathrm{e}^{x} + b\mathrm{e}^{-x} \quad (a, b \in \mathbb{R})$$

erhalten wir schließlich als allgemeine Lösung

$$y(x) = a\mathrm{e}^{x} + b\mathrm{e}^{-x} - \cos(x) - x\sin(x)\,. \quad (a, b \in \mathbb{R})$$

(e) Als homogene Lösung erhalten wir

$$y_h(x) = a + b\mathrm{e}^{x} + c\mathrm{e}^{-3x}\,. \quad (a, b, c \in \mathbb{R})$$

Wir wählen nun den Störgliedansatz $y_p(x) = A\mathrm{e}^{3x} + Bx\mathrm{e}^{x} + Cx$, wobei wir die äußeren Resonanzen ($y(x) = a$ und $y(x) = b\mathrm{e}^{x}$) berücksichtigt haben. Der Ansatz führt auf

$$y_p(x) = \mathrm{e}^{3x} + \frac{1}{4}x\mathrm{e}^{x} + \frac{2}{5}x$$

als partikuläre Lösung. Dies ergibt die allgemeine Lösung

$$y(x) = a + b\mathrm{e}^{x} + c\mathrm{e}^{-3x} + \mathrm{e}^{3x} + \frac{1}{4}x\mathrm{e}^{x} + \frac{2}{5}x\,. \quad (a, b, c \in \mathbb{R})$$

(f) Für die DGL $y^{(4)} - y = 1$ wählen wir nach Tabelle den Störgliedansatz $y_p(x) = B_0$. Er führt auf die Bedingung

$$-B_0 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad B_0 = -1\,.$$

Als partikuläre Lösung bestimmen wir somit $y_p(x) = -1$. Zusammen mit der allgemeinen homogenen Lösung

$$y_h(x) = a\mathrm{e}^x + b\mathrm{e}^{-x} + c\cos(x) + d\sin(x) \quad (a, b, c, d \in \mathbb{R})$$

erhalten wir also die allgemeine Lösung

$$y(x) = a\mathrm{e}^x + b\mathrm{e}^{-x} + c\cos(x) + d\sin(x) - 1\,. \quad (a, b, c, d \in \mathbb{R})$$

Die Anfangsbedingungen $y(0) = y'(0) = y'''(0) = 0$ und $y''(0) = 3$ werden erfüllt für die spezielle Lösung mit $a = b = 1$, $c = -1$ und $d = 0$.

Ü 35.3 (a) Die allgemeine Lösung von $y'' + \pi^2 y = \pi^3$ lautet

$$y(x) = \pi + a\cos(\pi x) + b\sin(\pi x)\,. \quad (a, b \in \mathbb{R})$$

Für die Ableitung berechnen wir $y'(x) = -a\pi\sin(\pi x) + b\pi\cos(\pi x)$.
Die erste Randbedingung $y(-\frac{1}{2}) = \pi$ führt auf $\pi - b = \pi$ und folglich auf $b = 0$. Aus der zweiten Randbedingung $y'(1) = \pi$ folgt $\pi = y'(1) = -b\pi$ und damit $b = -1$. Es kann also keine Lösung für das gestellte RWP geben.

(b) Die allgemeine Lösung von $y'' - 2y' - 3y = 2$ lautet

$$y(x) = -\frac{2}{3} + a\mathrm{e}^{-x} + b\mathrm{e}^{3x}\,. \quad (a, b \in \mathbb{R})$$

Für die Ableitung berechnen wir $y'(x) = -a\mathrm{e}^{-x} + 3b\mathrm{e}^{3x}$.
Aus der ersten Forderung $y(0) + y'(0) = 0$ erhalten wir

$$0 = y(0) + y'(0) = \left(a + b - \frac{2}{3}\right) + (3b - a) = 4b - \frac{2}{3} \Rightarrow b = \frac{1}{6}\,.$$

Aus $b = \frac{1}{6}$ und der zweiten Forderung $y'(1) = 0$ ergibt sich

$$0 = y'(1) = -a\mathrm{e}^{-1} + \frac{1}{2}\mathrm{e}^3 \Rightarrow a = \frac{1}{2}\mathrm{e}^4\,.$$

Das RWP wird also gelöst von der Funktion

$$y(x) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{4-x} + \frac{1}{6}\mathrm{e}^{3x} - \frac{2}{3}\,.$$

Ü 35.4 Die partikuläre Lösung $y_p(x) = x^2$ der DGL

$$y'' - 2y' + y = x^2 - 4x + 2$$

erhält man schnell aus dem Störgliedansatz $y_p(x) = B_2x^2 + B_1x + B_0$. Das charakteristische Polynom dieser Gleichung $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2$ hat außerdem die doppelte Nullstelle $\lambda = 1$. Die allgemeine Lösung lautet damit

$$y(x) = x^2 + a\mathrm{e}^x + bx\mathrm{e}^x\,. \qquad (a, b \in \mathbb{R})$$

Sie hat die Ableitung

$$y'(x) = 2x + (a+b)\mathrm{e}^x + bx\mathrm{e}^x\,.$$

Die periodischen Randbedingungen

$$y(0) = y(1)\,, \quad y'(0) = y'(1)\,,$$

liefern nun:

$$\begin{aligned} y(0) = y(1) \quad &\Leftrightarrow \quad a = 1 + a\mathrm{e} + b\mathrm{e}\,, \\ y'(0) = y'(1) \quad &\Leftrightarrow \quad a + b = 2 + a\mathrm{e} + 2b\mathrm{e}\,. \end{aligned}$$

Wir bestimmen $a = \frac{1}{(1-\mathrm{e})^2}$ und $b = \frac{1}{1-\mathrm{e}}$. Die spezielle Lösung

$$y(x) = x^2 + \frac{1}{(1-\mathrm{e})^2}\mathrm{e}^x + \frac{1}{1-\mathrm{e}}x\mathrm{e}^x$$

erfüllt also die periodischen Randbedingungen.

Ü 35.5 Es handelt sich um eine homogene lineare Differentialgleichung 2. Ordnung mit *variablen* Koeffizienten. Deshalb können wir sie nicht einfach mittels unserer üblichen Lösungsmethode für homogene lineare Differentialgleichungen höherer Ordnung lösen, denn diese setzt konstante Koeffizienten voraus.

Stattdessen nutzen wir die spezielle Struktur dieser Gleichung, nämlich die Tatsache, dass in der Gleichung nur Ableitungen von u (und nicht u selber) vorkommen. So können wir durch die Substitution $v = u'$ die Ordnung der Gleichung um eins reduzieren. Wir erhalten eine homogene lineare Differentialgleichung 1. Ordnung für v, welche wir auch für variable Koeffizienten durch Trennung der Variablen lösen können (vgl. Übungsblatt 33).

Die transformierte Gleichung lautet

$$v' + \frac{v}{x} = 0\,.$$

Wir erhalten die allgemeine Lösung

$$v(x) = \frac{C}{x}\,, \quad C \in \mathbb{R}\,.$$

Durch Integration (in gewissem Sinne eine Rücksubstitution) erhalten wir die allgemeine Lösung für u, nämlich

$$u(x) = C\ln|x| + \tilde{C}\,, \quad C, \tilde{C} \in \mathbb{R}\,.$$

Nun müssen wir noch die Konstanten an die Randbedingungen anpassen. Dazu lösen wir das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} C\ln|r_1| + \tilde{C} &= u(r_1) = U_1\,, \\ C\ln|r_2| + \tilde{C} &= u(r_2) = U_2\,. \end{aligned}$$

Es ergibt sich $C = \frac{U_1 - U_2}{\ln|r_1| - \ln|r_2|}$ und $\tilde{C} = \frac{U_2\ln|r_1| - U_1\ln|r_2|}{\ln|r_1| - \ln|r_2|}$. Für das RWP erhalten wir damit die Lösung

$$u(x) = \frac{U_1 - U_2}{\ln|r_1| - \ln|r_2|}\ln|x| + \frac{U_2\ln|r_1| - U_1\ln|r_2|}{\ln|r_1| - \ln|r_2|}\,, \quad r_1 \le x \le r_2\,.$$