Über die periodische Interpolation auf schwach besetzten Gittern mittels de la Vallée Poussin-Kernen

D I P L O M A R B E I T

zur Erlangung des akademischen Grades
Diplom-Mathematiker

FRIEDRICH-SCHILLER-UNIVERSITÄT JENA
Fakultät für Mathematik und Informatik

eingereicht von Tino Ullrich
geb. am 23.03.1980 in Schmalkalden

Betreuer: Prof. Dr. W. Sickel
Jena, 19.03.2004

Einleitung

Die vorliegende Arbeit behandelt spezielle Approximationsprobleme der Fourier Analysis. Es werden Interpolationsverfahren zur Approximation von Funktionen aus periodischen Räumen auf dem ein- und zweidimensionalen Torus betrachtet. Das Hauptaugenmerk liegt dabei im eindimensionalen Fall auf den periodischen Nikolskij-Besov-Räumen $B^s_{p,q}(\mathbb{T})$ sowie im zweidimensionalen Fall auf den periodischen Nikolskij-Besov-Räumen mit dominierender gemischter Glattheit $S^r_{p,q}B(\mathbb{T}^2)$. Im Zuge der Approximation werden von der Funktion nur Funktionswerte auf einem diskreten Gitter benötigt. Ziel der Arbeit war es, die Güte einer solchen Approximation abzuschätzen. Als Maß dafür dient der Approximationsfehler in der L_p-Norm in Abhängigkeit von der Gittergrösse. In Kapitel 1 wird ein Verallgemeinerungsprinzip der klassischen trigonometrischen Interpolation auf dem äquidistanten Gitter angegeben und betrachtet. Dieses Prinzip bringt die periodische de la Vallée Poussin-Interpolation hervor. Auf dieser Basis wird in Kapitel 2 durch spezielle Tensorproduktbildung ein Interpolationsverfahren für den zweidimensionalen Fall konstruiert. Die Konstruktion desselben geht dabei auf Smolyak zurück. Man stellt fest, dass dieses Verfahren weit weniger Information über die Funktion benötigt, als ein Verfahren, das die Idee aus dem Eindimensionalen direkt (mittels Tensorproduktbildung) ins Zweidimensionale überträgt. Man spricht deswegen von Interpolation auf schwach besetzten Gittern. Aufgrund der engen Verwandtschaft der beiden angegebenen periodischen Funktionenraumskalen ist mit den Ergebnissen des ersten Kapitels eine Aussage über den L_p-Approximationsfehler dieses Verfahrens für Funktionen aus $S^r_{p,q}B(\mathbb{T}^2)$ möglich. Diese Aussage bildet das Hauptresultat der Arbeit.

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Periodische Interpolation auf $\mathbb{T}$

1.1 Vorbetrachtungen

Wir bezeichnen mit $\mathbb{N}$ die natürlichen Zahlen (ohne Null) bzw. mit $\mathbb{N}_0$ die natürlichen Zahlen inklusive Null. Mit $\mathbb{Z}$ meinen wir die ganzen Zahlen und es wird $\mathbb{Z}^n = \underbrace{\mathbb{Z} \times ... \times \mathbb{Z}}_{n \text{ mal}}$ für ein $n \in \mathbb{N}$ gesetzt. $\mathbb{R}$ bezeichnet die Menge der reellen Zahlen und analog ist $\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times ... \times \mathbb{R}$. Die Menge der komplexen Zahlen wird mit $\mathbb{C}$ bezeichnet und man verwendet analog $\mathbb{C}^n = \mathbb{C} \times ... \times \mathbb{C}$. Es sei $\mathbb{T} = [0, 2\pi] \subset \mathbb{R}$ der 1-Torus, wobei gegenüberliegende Punkte identifiziert werden. Das heisst $x, y \in \mathbb{R}$ werden genau dann identifiziert, wenn $x - y = 2\pi k$ mit $k \in \mathbb{Z}$ gilt. Spricht man von einer Funktion $f : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$, so meint man eine 2π - periodische Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, d.h. für alle $x \in \mathbb{R}$ ist $f(x) = f(x + 2\pi)$. Analog ist $\mathbb{T}^n = [0, 2\pi]^n \subset \mathbb{R}^n$ der n-Torus. Hier identifiziert man $x = (x_1, ..., x_n)$, $y = (y_1, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$ genau dann, wenn $x - y = 2\pi k$ für $k \in \mathbb{Z}^n$ gilt. Eine Funktion $f : \mathbb{T}^n \to \mathbb{C}$ stellt dann eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ dar, die in jeder Komponente 2π-periodisch ist.

Weiter werden folgende Festlegungen getroffen:

Definition 1.1

(i) Sei $1 \leq p \leq \infty$. Wir setzen:

$$L_p(\mathbb{T}) := \left\{ f : \mathbb{T} \to \mathbb{C} \text{ Lebesgue-messbar} : \|f|L_p(\mathbb{T})\| = \left(\int_{\mathbb{T}} |f(x)|^p dx \right)^{1/p} < \infty \right\}.$$

Im Falle $p = \infty$ ersetzt man das Integral durch das wesentliche Supremum:

$$\|f|L_\infty(\mathbb{T})\| := \inf \{ r \in \mathbb{R} : \{ x \in \mathbb{T} : |f(x)| > r \} \text{ ist Lebesgue-Nullmenge} \} .$$

(ii) Sei $N \in \mathbb{N}_0$. Dann setzen wir:

$$T_N := \left\{ \sum_{k \leq N} \eta_k e^{ikx} : \eta_k \in \mathbb{C} \right\} \text{ (trigonometrische Polynome der Ordnung } \leq N).$$

(iii) Seien $f \in L_1(\mathbb{T})$, $k \in \mathbb{Z}$, $N \in \mathbb{N}_0$. Dann setzen wir:

$$c_k(f) := \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(x) e^{-ikx} dx \text{ (k-ter Fourierkoeffizient von } f), \quad (1.1.1)$$

$$S_N f(x) := \sum_{|k| \leq N} c_k(f) e^{ikx} \text{ (Fourierpartialsumme von } f, \text{ Ordnung } N). \quad (1.1.2)$$

(iv) $C(\mathbb{T})$ bezeichnet den Raum der stetigen Funktionen $f : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$. Dieser Raum ist zusammen mit der Norm
$$\|f|C(\mathbb{T})\| = \sup_{x\in\mathbb{T}} |f(x)|$$
ein Banachraum.

(v) $\mathcal{A}(\mathbb{T})$ sei der Raum der $L_1(\mathbb{T})$-Funktionen mit absolut summierbaren Fourierkoeffizienten, genannt Wieneralgebra, d.h.:

$$\mathcal{A}(\mathbb{T}) := \left\{ f \in L_1(\mathbb{T}) : \|f|\mathcal{A}(\mathbb{T})\| := \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k(f)| < \infty \right\}.$$

Das Paar $(\mathcal{A}(\mathbb{T}), \|\cdot|\mathcal{A}(\mathbb{T})\|)$ ist ein Banachraum. Man kann zeigen, dass $f \in \mathcal{A}(\mathbb{T})$ stetig ist (mit Interpretation) und
$$f \underset{C(\mathbb{T})}{=} \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k(f) e^{ik\cdot}$$
gilt. Damit erhält man sofort die Einbettung

$$\mathcal{A}(\mathbb{T}) \hookrightarrow C(\mathbb{T}).$$

(vi) Sei $0 < q \leq \infty$. Wir setzen:

$$\ell_q := \left\{ (a_j)_j : \|(a_j)_j|\ell_q\| = \left(\sum_{j=0}^{\infty} |a_j|^q \right)^{1/q} < \infty \right\}.$$

Im Falle $q = \infty$ ersetzt man die Reihe druch $\sup_{j=0,1,\dots} |a_j|$. Das Paar $(\ell_q, \|\cdot|\ell_q\|)$ ist ein Quasi-Banachraum (siehe Abschnitt 1.6) und für $q \geq 1$ ein Banachraum.

1.2 Die Fouriertransformation

Definition 1.2 Sei $n \in \mathbb{N}$.

(i) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ Borel-messbar und $1 \leq p \leq \infty$. Wir setzen:

$$L_p(\Omega) := \left\{ f : \Omega \to \mathbb{C} : \|f|L_p(\Omega)\| = \left(\int_\Omega |f(x)|^p \, dx \right)^{1/p} < \infty \right\} \tag{1.2.1}$$

mit der üblichen Modifikation im Falle $p = \infty$ (siehe $L_p(\mathbb{T})$).

(ii) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und zusammenhängend. Dann setzen wir

$$C(\Omega) := \{f : \Omega \to \mathbb{C} : f \text{ gleichmässig stetig und beschränkt auf } \Omega\} \tag{1.2.2}$$

und

(iii)

$$C_0^\infty(\Omega) := \{f : \Omega \to \mathbb{C} : f \text{ beliebig oft differenzierbar und supp} f \text{ kompakt in } \Omega\}, \tag{1.2.3}$$

wobei mit
$$\mathrm{supp} f := \overline{\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \neq 0\}}$$
der Träger von f gemeint ist.

Lemma 1.1 Der Raum $C_0^\infty(\Omega)$ liegt dicht im Raum $L_p(\Omega)$ mit $1 \leq p < \infty$.

Beweis Siehe dazu [Tr1].

Lemma 1.2 Sei $l \in \mathbb{N}_0$ und sei

$$F_l := \left\{ f = \sum_{k \in \Lambda} \alpha_k \chi_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]^n}(2^l x - k) : \; a_k \in \mathbb{C}, \; \Lambda \subset \mathbb{Z}^n \text{ endlich} \right\} \subset L_1(\mathbb{R}^n).$$

Dann gilt:

$$C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \subset cl\left(\bigcup_{l=0}^{\infty} F_l\right),$$

wobei der Abschluss im $L_1(\mathbb{R}^n)$ zu bilden ist.

Beweis Einen Beweis findet man in [Si1].

Bemerkung 1.1 Die Funktionen in F_l haben

(i) kompakten Träger und

(ii) bestehen aus Säulen in den Gitterpunkten $2^{-l}k$, $k \in \Lambda_f$. Die Säulen haben Seitenlänge 2^{-l} und Höhe a_k. Der Punkt $2^{-l}k$ bildet den Mittelpunkt der Säule.

Definition 1.3 *(Fouriertransformation/inverse Fouriertransformation)*
Für $f \in L_1(\mathbb{R}^n)$ ist die Fouriertransformierte $\mathcal{F}f$ definiert als:

$$\mathcal{F}f(\xi) := (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-ix\xi} dx \tag{1.2.4}$$

für $\xi \in \mathbb{R}^n$ und mit $x\xi = \sum_{i=1}^{n} x_i \xi_i$. Unter denselben Voraussetzungen ist die inverse Fouriertransformierte $\mathcal{F}^{-1}f$ erklärt als:

$$\mathcal{F}^{-1}f(\xi) := (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{ix\xi} dx \tag{1.2.5}$$

Bemerkung 1.2 Die Funktion $g(x) = f(x)e^{-ix\xi}$ gehört wegen $|g(x)| = |f(x)|$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ zu $L_1(\mathbb{R}^n)$. Damit macht die letzte Definition Sinn.

Lemma 1.3 *(Eigenschaften der Fouriertransformation)* Die Fouriertransformation hat folgende Eigenschaften:

(i) Für alle $f, g \in L_1(\mathbb{R}^n)$ unf für alle $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ gilt:

$$\mathcal{F}(\lambda f + \mu g) = \lambda \mathcal{F} f + \mu \mathcal{F} g. \tag{1.2.6}$$

Das heisst: $\mathcal{F}$ ist ein linearer Operator.

(ii) Sei $h \in \mathbb{R}^n$. Dann gilt für die Fouriertransformierte von $f(\cdot - h)$:

$$\mathcal{F}(f(\cdot - h))(\cdot) = \mathcal{F}f(\cdot)e^{-ih\cdot}. \tag{1.2.7}$$

(iii) Sei wieder $h \in \mathbb{R}^n$. Dann gilt für die Fouriertransformierte von $e^{ih\cdot}f(\cdot)$:

$$\mathcal{F}(e^{ih\cdot}f(\cdot))(\cdot) = (\mathcal{F}f)(\cdot - h) \tag{1.2.8}$$

(iv) Sei $a > 0$. Dann gilt:

$$a^n \mathcal{F}(f(a\cdot))(\cdot) = (\mathcal{F}f)\left(\frac{\cdot}{a}\right) \tag{1.2.9}$$

Beweis (i),...,(iv) verifiziert man durch einfaches Nachrechnen unter Benutzung von (1.2.4).

Beispiel 1.1

(i) Ich betrachte im Folgenden die Fouriertransformierte von $\chi_{[-1/2,1/2]}(x) = \begin{cases} 1 & : \ x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \\ 0 & : \ \text{sonst} \end{cases}$:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\chi_{[-1/2,1/2]^n}(\cdot)(\xi) &= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\xi} \chi_{[-1/2,1/2]^n}(x)\, dx \\ &= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int\limits_{[\frac{1}{2},\frac{1}{2}]^n} e^{-ix\xi}\, dx \\ &= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \prod_{j=0}^{n} \int\limits_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{-ix_j\xi_j}\, dx_j. \end{aligned} \tag{1.2.10}$$

Jetzt gilt:

$$\int\limits_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{-ix_j\xi_j}\, dx_j = \begin{cases} 1 & : \ \xi_j = 0 \\ \frac{e^{-ix_j\xi_j}}{-i\xi_j}\Big|_{-1/2}^{1/2} & : \ \xi_j \neq 0 \end{cases} = \frac{\sin(\xi_j/2)}{\xi_j/2},$$

wobei

$$\frac{\sin(0)}{0} := 1$$

gesetzt wird. Das ist nichts weiter als die stetige Fortsetzung von $\xi \mapsto \frac{\sin(\xi)}{\xi}$.
Insgesamt gilt also:

$$\mathcal{F}\chi_{[-1/2,1/2]^n}(\cdot)(\xi) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \prod_{j=1}^{n} \frac{\sin(\xi_j/2)}{\xi_j/2}.$$

Man sieht hier zwei Dinge:

(a) $\mathcal{F}\chi_{[-1/2,1/2]^n}(\cdot)(\xi)$ ist unendlich oft differenzierbar und
(b) $\mathcal{F}\chi_{[-1/2,1/2]^n}(\cdot)(\xi) \xrightarrow[|\xi|\to\infty]{} 0$.

(ii) Sei $\Phi \in L_1(\mathbb{R}^n)$, $\Lambda \subset \mathbb{Z}^n$ eine endliche Menge und $h > 0$. Wir betrachten die Funktion:

$$f(x) := \sum_{k\in\Lambda} \alpha_k \Phi\left(\frac{x}{h} - k\right), \quad \text{mit } \alpha_k \in \mathbb{C}.$$

Die Fouriertransformierte von f berechnet sich nun zu:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}f(\xi) &= \mathcal{F}\left(\sum_{k\in\Lambda} \alpha_k \Phi\left(\frac{\cdot}{h} - k\right)\right)(\xi) \\ \text{(Lemma 1.3, (i))} \quad &= \sum_{k\in\Lambda} \alpha_k \mathcal{F}\left(\Phi\left(\frac{1}{h}(\cdot - kh)\right)\right)(\xi) \\ \text{(Lemma 1.3, (ii))} \quad &= \sum_{k\in\Lambda} \alpha_k e^{-ihk\xi} \mathcal{F}\left(\Phi\left(\frac{\cdot}{h}\right)\right)(\xi) \\ \text{(Lemma 1.3, (iv))} \quad &= \left[\sum_{k\in\Lambda} \alpha_k e^{-ihk\xi} h^n\right] \mathcal{F}\Phi(h\xi). \end{aligned}$$

Satz 1.1 *(Riemann-Lebesgue)* Sei $f \in L_1(\mathbb{R}^n)$. Dann ist $\mathcal{F}f \in C(\mathbb{R}^n)$ und:

$$\lim_{|\xi|\to\infty} \mathcal{F}f(\xi) = 0 \tag{1.2.11}$$

Beweis <u>*Schritt 1:*</u>

Im Folgenden wird die gleichmässige Stetigkeit von $\mathcal{F}f(\cdot)$ gezeigt:

$$\begin{aligned}|\mathcal{F}f(\xi+\eta) - \mathcal{F}f(\xi)| &\leq (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} |e^{-i\eta x} - 1||e^{-ix\xi}||f(x)|dx \\ &= (2\pi)^{\frac{n}{2}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} |e^{-i\eta x} - 1||f(x)|dx\end{aligned}$$

Sei $\varepsilon > 0$. Wegen $f \in L_1(\mathbb{R}^n)$ existiert ein $N > 0$ mit $\int\limits_{|x|>N} |f(x)|dx < \frac{\varepsilon}{4}$. Weiter ist:

$$\int\limits_{|x|\leq N} |e^{-i\eta x} - 1||f(x)|dx \leq \frac{\varepsilon}{2\|f|L_1(\mathbb{R}^n)\|} \int\limits_{|x|\leq N} |f(x)|dx \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

für $|\eta| < \delta(\varepsilon, N)$ mit:

$$\sup_{|x|\leq N} |1 - e^{-i\eta x}| < \frac{\varepsilon}{2\|f|L_1(\mathbb{R}^n)\|}. \qquad \text{(Stetigkeit in } \eta = 0 \text{)}$$

Damit folgt insgesamt für $|\eta| < \delta(\varepsilon)$:

$$\begin{aligned}\int\limits_{\mathbb{R}^n} |e^{-i\eta x} - 1||f(x)|dx &= \underbrace{\int\limits_{|x|\leq N} |e^{-i\eta x} - 1||f(x)|dx}_{\leq \frac{\varepsilon}{2}} + \int\limits_{|x|>N} \underbrace{|e^{-i\eta x} - 1|}_{\leq 2}|f(x)|dx \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + 2\int\limits_{|x|>N} |f(x)|dx \\ &\leq \varepsilon.\end{aligned}$$

Damit folgt, dass $\mathcal{F}f(\cdot)$ gleichmässig stetig ist auf $\mathbb{R}^n$.

<u>*Schritt 2:*</u>

Als erstes ist festzuhalten, dass

$$|\mathcal{F}f(\xi)| \leq (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} |e^{-ix\xi}||f(x)|dx \leq \int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(x)|dx = \|f|L_1(\mathbb{R}^n)\| \tag{1.2.12}$$

gilt. Sei $\varepsilon > 0$. Zu zeigen ist: Es existiert ein $N > 0$ mit: $\forall\, |\xi| > N$ ist $|\mathcal{F}f(\xi)| < \varepsilon$.

Aus Lemma 1.1 folgt: $\exists\, g \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit $\|f - g|L_1(\mathbb{R}^n)\| < \frac{\varepsilon}{4}$. Mit Lemma 1.2 folgt weiter $\exists\, l \in \mathbb{N}\ \exists\, h \in F_l$ mit $\|g - h|L_1(\mathbb{R}^n)\| < \frac{\varepsilon}{4}$. Damit folgt:

$$\|f - h|L_1(\mathbb{R}^n)\| \leq \|f - g|L_1(\mathbb{R}^n)\| + \|g - h|L_1(\mathbb{R}^n)\| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{1.2.13}$$

Damit erhält man folgendes:

$$\begin{aligned}|\mathcal{F}f(\xi)| &= |\mathcal{F}(f-h)(\xi) + \mathcal{F}h(\xi)| \\ &\leq |\mathcal{F}(f-h)(\xi)| + |\mathcal{F}h(\xi)| \\ &\overset{(1.2.12)}{\leq} \underbrace{\|f - h|L_1(\mathbb{R}^n)\|}_{\frac{\varepsilon}{2}} + |\mathcal{F}h(\xi)|.\end{aligned} \tag{1.2.14}$$

Mit Beispiel 1.1 gilt dann:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}h(\xi) &= \left[\sum_{k\in\Lambda} \alpha_k e^{-ik2^{-l}\xi} 2^{-ln}\right] \mathcal{F}\chi_{[-1/2,1/2]^n}(2^{-l}\xi) \\ &= \left[\sum_{k\in\Lambda} \alpha_k e^{-ik2^{-l}\xi} 2^{-ln}\right] c \prod_{j=0}^{n} \frac{\sin(2^{-l-1}\xi_j)}{2^{-l-1}\xi_j} \to 0 \quad \text{für} \quad |\xi| \to \infty. \end{aligned} \tag{1.2.15}$$

Sei jetzt $N > 0$ so, dass $|\mathcal{F}h(\xi)| < \frac{\varepsilon}{2}$ für $|\xi| > N$, dann gilt mit (1.2.14) und (1.2.15):

$$|\mathcal{F}f(\xi)| < \varepsilon\,, \quad \text{für } |\xi| > N.$$

1.3 Ein Multiplikatoren-Theorem

Wir stellen hier ein sehr nützliches Resultat bereit. Es geht um die $L_p(\mathbb{T})$-Norm eines trigonometrischen Polynoms, dessen Fourierkoeffizienten mittels einer Gewichtsfunktion aus einer bestimmten Funktionenklasse verändert wurden.

Lemma 1.4 Sei $M \in L_1(\mathbb{R})$ mit $\mathcal{F}^{-1}M \in L_1(\mathbb{R})$. Dann gilt:

$$\mathcal{F}(\mathcal{F}^{-1}M) = M. \tag{1.3.1}$$

Diese Indentität ist vorerst in $L_1(\mathbb{R})$ zu verstehen.

Beweis Einen Beweis dieser Tatsache findet man implizit in [Tr1].

Wie man im Lemma sieht, verhält sich der Operator $\mathcal{F}^{-1}$ in einem gewissen Sinne als Umkehroperator von $\mathcal{F}$. Nach Satz 1.1 folgt sofort aus $M \in L_1(\mathbb{R})$ und $\mathcal{F}^{-1}M \in L_1(\mathbb{R})$, dass M eine stetige Funktion sein muss, die im Unendlichen verschwindet. Also kann man obige Gleichheit auch punktweise verstehen.

Lemma 1.5 *(Faltungslemma)* Sei $g \in L_1(\mathbb{R})$ und $h \in L_1(\mathbb{T})$. Dann existiert die Funktion

$$g * h(x) := \int_{\mathbb{R}} g(y) \cdot h(x-y)dy \tag{1.3.2}$$

als $L_1(\mathbb{T})$-Funktion.

Beweis Sei $w(x,y) : \mathbb{T} \times \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ mit $w(x,y) := g(y)h(x-y)$. Wir untersuchen die Existenz des Integrals

$$\int_{\mathbb{T}} \int_{\mathbb{R}} |g(y)| h(x-y)| dy dx.$$

Mit dem Satz von Fubini gilt:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{T}} \int_{\mathbb{R}} |g(y)| h(x-y)| dy dx &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{T}} |g(y)| h(x-y)| dx dy \\ &= \int_{\mathbb{R}} |g(y)| \int_{\mathbb{T}} |h(x-y)| dx dy \\ \text{(Periodizität von } h\text{)} \quad &= \int_{\mathbb{R}} |g(y)| \int_{\mathbb{T}} |h(x)| dx dy \\ &= \int_{\mathbb{R}} |g(y)| dy \int_{\mathbb{T}} |h(x)| dx \\ &< \infty. \end{aligned}$$

$w(x,y)$ ist also Lebesgue-integrierbar und mit dem Satz von Fubini folgt weiter, dass dann auch $w(x,\cdot)$ für fast alle $x \in \mathbb{T}$ integrierbar ist. Damit macht (1.3.2) Sinn. Aus obiger Rechnung folgt schliesslich, dass $g * h \in L_1(\mathbb{T})$ ist.

Lemma 1.6 Sei $M \in L_1(\mathbb{R})$ eine Funktion mit $\mathcal{F}^{-1}M \in L_1(\mathbb{R})$ (d.h. insbesondere $M \in C(\mathbb{R})$). Sei weiter $f(x) \underset{L_1(\mathbb{T})}{=} \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k e^{ikx}$ eine $L_1(\mathbb{T})$-Funktion. Dann existiert $\sum_{k\in\mathbb{Z}} M(k)c_k e^{ikx}$ in $L_1(\mathbb{T})$ und

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} M(k)c_k e^{ikx} = (2\pi)^{-1/2} \int_{\mathbb{R}} (\mathcal{F}^{-1}M)(y) f(x-y)dy. \tag{1.3.3}$$

Beweis Das Lemma 1.5 stellt sicher, dass die rechte Seite von (1.3.3) als $L_1(\mathbb{T})$-Funktion existiert. Nach Voraussetzung gilt:

$$(2\pi)^{-1/2} \int_{\mathbb{R}} (\mathcal{F}^{-1}M)(y) f(x-y)dy = (2\pi)^{-1/2} \int_{\mathbb{R}} (\mathcal{F}^{-1}M)(y) \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k e^{ik(x-y)} dy$$

Ich zeige als nächstes, dass

$$(2\pi)^{-1/2} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}} (\mathcal{F}^{-1}M)(y) c_k e^{ik(x-y)} dy$$

im $L_1(\mathbb{T})$-Sinne existiert und

$$(2\pi)^{-1/2} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}} (\mathcal{F}^{-1}M)(y) c_k e^{ik(x-y)} dy = (2\pi)^{-1/2} \int_{\mathbb{R}} (\mathcal{F}^{-1}M)(y) \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k e^{ik(x-y)} dy \tag{1.3.4}$$

gilt. Wir zeigen dieses Resultat als Folgerung der allgemeinen Aussage:
Seien $g \in L_1(\mathbb{R})$, $f_k \in L_1(\mathbb{T})$ für $k \in \mathbb{Z}$ und existiere $\sum_{k\in\mathbb{Z}} f_k(x)$ in $L_1(\mathbb{T})$. Dann existiert auch $x \mapsto \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}} g(y) f_k(x-y)dy$ in $L_1(\mathbb{T})$ und es gilt

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}} g(y) f_k(x-y)dy = \int_{\mathbb{R}} g(y) \sum_{k\in\mathbb{Z}} f_k(x-y)dy.$$

Beweis dazu: Seien $M, N \in \mathbb{N}$. Es gilt:

$$\begin{aligned} &\left\| \int_{\mathbb{R}} f(y) \sum_{k\in\mathbb{Z}} f_k(x-y)dy - \sum_{k=-M}^{N} \int_{\mathbb{R}} f(y) f_k(x-y)dy \right| L_1(\mathbb{T}) \right\| \\ = &\left\| \int_{\mathbb{R}} f(y) \sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus[-M,N]} f_k(x-y)dy \right| L_1(\mathbb{T}) \right\| \\ = &\int_{\mathbb{T}} \left| \int_{\mathbb{R}} f(y) \sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus[-M,N]} f_k(x-y)dy \right| dx. \end{aligned} \tag{1.3.5}$$

Die Anwendung der Dreiecksungleichung für Integrale ergibt folgendes:

$$
\begin{aligned}
(1.3.5) \quad &\leq \int_{\mathbb{T}} \int_{\mathbb{R}} |f(y)| \left| \sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus[-M,N]} f_k(x-y) \right| dydx \\
&= \int_{\mathbb{R}} |f(y)| \int_{\mathbb{T}} \left| \sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus[-M,N]} f_k(x-y) \right| dxdy \\
\text{(Fubini+Periodizität)} \quad &= \int_{\mathbb{T}} \left| \sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus[-M,N]} f_k(x) \right| dx \underbrace{\int_{\mathbb{R}} |f(y)|dy}_{C} \\
&= C \left\| \sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus[-M,N]} f_k \right| L_1(\mathbb{T}) \Bigg\| \xrightarrow[M,N\to\infty]{} 0,
\end{aligned} \tag{1.3.6}
$$

da $\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} f_k$ in $L_1(\mathbb{T})$ existiert.
Damit gilt (1.3.4) und man leitet weiter ab:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}} (\mathcal{F}^{-1}M)(y) c_k e^{ik(x-y)} dy &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k \int_{\mathbb{R}} (\mathcal{F}^{-1}M)(y) e^{ik(x-y)} dy \\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k e^{ikx} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} (\mathcal{F}^{-1}M)(y) e^{-iky} dy \\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k \mathcal{F}(\mathcal{F}^{-1}M)(k) e^{ikx} \\
\text{(Lemma 1.4)} \quad &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k M(k) e^{ikx}
\end{aligned}
$$

□

Satz 1.2 Sei $\Lambda \subset \mathbb{Z}$ eine endliche Menge. Die Zahl $d_\Lambda \in \mathbb{N}_0$ ist gegeben durch

$$d_\Lambda := \max_{k,l\in\Lambda} |k-l| > 0. \tag{1.3.7}$$

Sei weiter $1 \leq p \leq \infty$. Dann existiert eine Konstante $c = c(p) > 0$, so dass für alle $t(x) = \sum\limits_{k\in\Lambda} c_k(t) e^{ikx}$ und für alle $M \in W_2^1(\mathbb{R}) \cap L_1(\mathbb{R})$

$$\left\| \sum_{k\in\Lambda} M(k) c_k e^{ikx} \right| L_p(\mathbb{T}) \Bigg\| \leq c \, \|M(d_\Lambda \cdot)|W_2^1(\mathbb{R})\| \cdot \|t|L_p(\mathbb{T})\|. \tag{1.3.8}$$

gilt.

Beweis Dieser Satz ist eine Folgerung aus [STr, Theorem 3.3.4.]. Man braucht für den Beweis die Darstellung eines gewichteten trigonometrischen Polynoms als Faltung (Lemma 1.6). Dabei benötigt man die $L_1(\mathbb{R})$-Zugehörigkeit von $\mathcal{F}^{-1}M$. Dies erhält man mit [STr, Proposition 1.7.5.]. Man wendet die Proposition für $p = 1$ an und erhält mit der Tatsache $W_2^1(\mathbb{R}) \hookrightarrow B_{2,1}^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R})$ die Ungleichung

$$\|\mathcal{F}^{-1}M|L_1(\mathbb{R})\| \leq c\|M|W_2^1(\mathbb{R})\|.$$

Bemerkung 1.3 Es taucht der Funktionenraum $W_2^1(\mathbb{R})$ auf. Für $m \in \mathbb{N}$ wird

$$W_2^m(\mathbb{R}) = \left\{ f \in L_2(\mathbb{R}) : \|f|W_2^m(\mathbb{R})\| := \left(\sum_{|\alpha| \le m} \|D^\alpha f|L_2(\mathbb{R})\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} < \infty \right\} \tag{1.3.9}$$

gesetzt. Dabei bedeutet

$$D^\alpha \varphi = \frac{\partial^{|\alpha|}\varphi}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}}$$

mit $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$ und $|\alpha| = |\alpha_1| + ... + |\alpha_n|$. Es ist $D^\alpha f$ in (1.3.9) im Distributionensinne zu verstehen.

1.4 Eine Ungleichung

Unter dieser Überschrift wird eine nützliche Ungleichung als Folgerung aus der Jensen-schen Ungleichung bewiesen.

Lemma 1.7 *(Jensen-sche Ungleichung)*
Sei Ω eine Borelmenge positiven Masses und Φ eine auf $\mathbb{R}$ konvexe Funktion. Seien weiter $\alpha \in L_1(\Omega)$ eine nichtnegative Funktion mit

$$0 < \|\alpha|L_1(\Omega)\| < \infty$$

und u eine messbare Funktion, so dass $u(x)\alpha(x)$, $\Phi(u(x))\alpha(x) \in L_1(\Omega)$ gilt. Dann ist

$$\Phi\left(\frac{\int_\Omega u(x)\alpha(x)dx}{\|\alpha|L_1(\Omega)\|} \right) \le \frac{\int_\Omega \Phi(u(x))\alpha(x)dx}{\|\alpha|L_1(\Omega)\|}.$$

Beweis Eine Beweisskizze findet man in [Ku1].

Daraus ergibt sich die für uns nützliche

Folgerung 1 Sei $\Omega = \mathbb{R}/\mathbb{T}$. Sei weiter $M \in L_1(\Omega)$ und $f \in L_p(\mathbb{T})$ für $1 \le p \le \infty$. Dann ist $x \mapsto \int_\Omega M(y)f(x-y)dy$ eine $L_p(\mathbb{T})$-Funktion und es gilt:

$$\left\| \left. \int_\Omega M(y)f(x-y)dy \right| L_p(\mathbb{T}, x) \right\| \le \|f|L_p(\mathbb{T})\| \|M|L_1(\Omega)\|. \tag{1.4.1}$$

Beweis Im Falle $p = \infty$ folgt die Ungleichung (1.4.1) sofort.
Sei ab jetzt $1 \le p < \infty$.
Gilt $\|M|L_1(\Omega)\| = 0$, so verschwindet die Funktion $x \mapsto \int_\Omega M(y)f(x-y)$ fast überall auf $\mathbb{T}$ wegen

$$\begin{aligned}
\left\| \left. \int_\Omega M(y)f(x-y)dy \right| L_1(\mathbb{T}, x) \right\| &= \int_\mathbb{T} \left| \int_\Omega M(y)f(x-y)dy \right| dx \\
&\le \int_\mathbb{T} \int_\Omega |M(y)f(x-y)| dy\, dx \\
\text{(Fubini)} \quad &= \int_\Omega |M(y)| \int_\mathbb{T} |f(x-y)| dx\, dy \\
\text{(Periodizität von } f\text{)} \quad &= \|M|L_1(\Omega)\| \, \|f|L_p(\mathbb{T})\| \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Also verschwindet die linke und die rechte Seite der Ungleichung (1.4.1).

Bleibt also noch $\|M|L_1(\Omega)\| > 0$ zu betrachten. Sei $\Phi(t) = t^p$. Wegen $p \geq 1$ ist diese Funktion eine konvexe Funktion auf $\mathbb{R}$. Damit gilt:

$$\left\| \int\limits_\Omega M(y)f(x-y)dy \right| L_p(\mathbb{T},x)\right\| = \left(\int\limits_\mathbb{T} \left| \int\limits_\Omega M(y)f(x-y)dy \right|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int\limits_\mathbb{T} \left| \int\limits_\Omega |M(y)f(x-y)|dy \right|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Wegen $\|M|L_1(\Omega)\| > 0$ kann man folgendermassen fortfahren:

$$\left\| \int\limits_\Omega M(y)f(x-y)dy \right| L_p(\mathbb{T},x)\right\| \leq \left(\int\limits_\mathbb{T} \frac{\left| \int_\Omega |M(y)f(x-y)|dy \right|^p \|M|L_1(\Omega)\|^p}{\|M|L_1(\Omega)\|^p} dx \right)^{\frac{1}{p}} = \|M|L_1(\Omega)\| \left(\int\limits_\mathbb{T} \Phi\left(\frac{\left| \int_\Omega |M(y)f(x-y)|dy \right|}{\|M|L_1(\Omega)\|} \right) dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

An dieser Stelle wenden wir die JENSEN-sche Ungleichung mit $\alpha(y) = M(y)$ und $u(y) = f(x-y)$ an. Das ergibt:

$$\left\| \int\limits_\Omega M(y)f(x-y)dy \right| L_p(\mathbb{T},x)\right\| \leq \|M|L_1(\Omega)\| \left(\int\limits_\mathbb{T} \int\limits_\Omega \frac{|M(y)|\Phi(|f(x-y)|)}{\|M|L_1(\Omega)\|} dy\, dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Mit dem Satz von Fubini ergibt sich schliesslich:

$$\begin{aligned} \left\| \int\limits_\Omega M(y)f(x-y)dy \right| L_p(\mathbb{T},x)\right\| &\leq \|M|L_1(\Omega)\|^{1-1/p} \left(\int\limits_\Omega |M(y)| \int\limits_\mathbb{T} |f(x-y)|^p dx\, dy \right)^{\frac{1}{p}} \\ \text{(Periodizität von f)} &= \|M|L_1(\Omega)\|\, \|f|L_p(\mathbb{T})\|. \end{aligned}$$

1.5 Verschiedene Mittel

Definition 1.4
Die trigonometrischen Polynome $D_N, F_N, v_N \in T_N$ mit

(a)

$$D_N(x) := \frac{1}{2} \sum_{|k|\leq N} e^{ikx} = \begin{cases} \frac{\sin(\frac{2N+1}{2}x)}{2\sin\frac{x}{2}} & : x \neq 2\pi\ell \\ N + \frac{1}{2} & : x = 2\pi\ell \end{cases}, \ \ell \in \mathbb{Z}, \tag{1.5.1}$$

für $N \in \mathbb{N}_0$,

(b)

$$F_N(x) := \frac{1}{N+1} \sum_{j=0}^N D_j(x), \tag{1.5.2}$$

für $N \in \mathbb{N}_0$ und

(c)

$$v_N(x) := \begin{cases} \frac{1}{n} \sum\limits_{j=n+1}^{2n} D_j(x) & : \quad N = 2n \\ \frac{1}{n} \sum\limits_{j=n}^{2n-1} D_j(x) & : \quad N = 2n-1 \end{cases}, \; n \in \mathbb{N}, \tag{1.5.3}$$

für $N \in \mathbb{N}$

heissen DIRICHLET-, FEJER- bzw DE LA VALLÉE POUSSIN - Kerne N-ter Ordnung.

Bemerkung 1.4 Sei $f \in L_1(\mathbb{T})$. Für die oben eingeführte Fourierpartialsumme (siehe (1.1.2)) der Ordnung N gilt folgender Zusammenhang:

$$S_N f(x) = \frac{1}{\pi} f * D_N(x), \tag{1.5.4}$$

wobei der $*$-Operator analog zu (1.3.2) gebraucht wird. Der einzige Unterschied besteht darin, dass man hier zwei $L_1(\mathbb{T})$-Funktionen faltet, d.h:

$$f * D_N(x) = \int\limits_{\mathbb{T}} f(t) D_N(x-t)\, dt. \tag{1.5.5}$$

Hierbei wird (1.5.5) Faltungsintegral genannt. Die Aussage sichert u.a., dass für eine Funktion $f \in L_1(\mathbb{T})$ die Funktion $f * D_N(\cdot)$ immer ein trigonometrisches Polynom der Ordnung N ist.

Beweis Mit der Definition von $S_N f$ folgt:

$$\begin{aligned} S_N f(x) &= \sum_{|k| \le N} c_k(f) e^{ikx} \\ &= \sum_{|k| \le N} \left(\frac{1}{2\pi} \int\limits_{\mathbb{T}} f(t) e^{-ikt}\, dt \right) e^{ikx} \\ &= \sum_{|k| \le N} \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\mathbb{T}} f(t) e^{ik(x-t)}\, dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int\limits_{\mathbb{T}} f(t) \underbrace{\frac{1}{2} \sum_{|k| \le N} e^{ik(x-t)}}_{D_N(x-t)}\, dt. \end{aligned}$$

Definition 1.5 Die Operatoren σ_N, für $N \in \mathbb{N}_0$ und $V_N : L_1(\mathbb{T}) \mapsto T_N$, für $N \in \mathbb{N}$ sind folgendermassen erklärt:

$$\sigma_N f(x) := \frac{1}{\pi} f * F_N(x) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{\mathbb{T}} f(t) F_N(x-t)\, dt \quad \text{und} \tag{1.5.6}$$

$$V_N f(x) := \frac{1}{\pi} f * v_N(x) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{\mathbb{T}} f(t) v_N(x-t)\, dt\,, \quad \text{für } x \in \mathbb{T}. \tag{1.5.7}$$

Aus der Bemerkung 1.4 und der Definition 1.4 folgt, dass $\sigma_N f$, $V_N f \in T_N$ für $f \in L_1(\mathbb{T})$. Man nennt $V_N f$ bzw. $\sigma_N f$ DE LA VALLÉE POUSSIN- bzw. FEJER - Mittel von f.

Die folgenden Betrachtungen dienen dazu, die für uns nützlichen Eigenschaften der DE LA VALLÉE POUSSIN-Mittel zusammenzufassen. Beweistechnisch beschränken wir uns auf V_{2N-1}. Für V_{2N} gelten natürlich analoge Tatsachen.

Lemma 1.8 Sei $N \in \mathbb{N}$ und $f \in L_1(\mathbb{T})$. Dann gelten die folgenden Beziehungen:

(i)

$$\int_{\mathbb{T}} |F_N(x)|\,dx = 1\,, \tag{1.5.8}$$

(ii)

$$v_{2N-1} = 2F_{2N-1}(x) - F_{N-1}(x) = (1 + 2\cos(Nx))F_{N-1}(x)\,, \tag{1.5.9}$$

(iii)

$$c_k(\sigma_N f) = \left(1 - \frac{|k|}{N+1}\right) c_k(f) \quad \text{und} \tag{1.5.10}$$

$$c_k(V_{2N-1}f) = v\left(\frac{|k|}{N}\right) c_k(f) \tag{1.5.11}$$

mit:

$$v(t) := \begin{cases} 1 & : \quad 0 \le t \le 1 \\ 2-t & : \quad 1 < t \le 2 \\ 0 & : \quad t > 2 \end{cases}\,.$$

Das bedeutet insbesondere für $f \in T_N$:

$$V_{2N-1}f = f \tag{1.5.12}$$

Beweis Einen Beweis findet man in [Si1].

Wegen $L_p(\mathbb{T}) \hookrightarrow L_1(\mathbb{T})$ (Beweis mittels Hölderscher Ungleichung) macht $V_N : L_p(\mathbb{T}) \to L_p(\mathbb{T})$ Sinn. Im nächsten Satz wird $\|V_{2N-1} : L_p(\mathbb{T}) \to L_p(\mathbb{T})\|$ betrachtet.

Satz 1.3 Sei $1 \le p \le \infty$ und $N \in \mathbb{N}$. Dann gilt:

$$1 \le \|V_{2N-1} : L_p(\mathbb{T}) \to L_p(\mathbb{T})\| \le 3. \tag{1.5.13}$$

Beweis Sei $f \in L_p(\mathbb{T})$ beliebig. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \|V_{2N-1}f|L_p(\mathbb{T})\| &= \frac{1}{\pi}\left\|\left.\int_{\mathbb{T}} f(x-t)v_{2N-1}(t)\,dt\right| L_p(\mathbb{T},x)\right\| \\ \text{(Lemma 1.8, (ii))} \quad &= \frac{1}{\pi}\left\|\left.\int_{\mathbb{T}} (1+2\cos(Nt))F_{N-1}(t)f(x-t)\,dt\right| L_p(\mathbb{T},x)\right\|. \end{aligned} \tag{1.5.14}$$

Mit der Folgerung 1 ergibt sich:

$$\begin{aligned} \|V_{2N-1}f|L_p(\mathbb{T})\| &\le \frac{1}{\pi}\|f|L_p(\mathbb{T})\| \int_{\mathbb{T}} |(1+2\cos(Nt))F_{N-1}(t)|dt \\ &\le 3\|f|L_p(\mathbb{T})\| \underbrace{\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{T}} |F_{N-1}(t)|\,dt}_{=1} \\ \text{(Lemma 1.8, (i))} \quad &\le 3\|f|L_p(\mathbb{T})\|. \end{aligned}$$

Wegen $V_{2N-1}f = f$ für alle konstanten $f : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ gilt die Abschätzung nach unten.

Lemma 1.9 *(Dichtheit der trigonometrischen Polynome)*

(i) Die Menge $\bigcup_{N \in \mathbb{N}_0} T_N$ liegt dicht in $C(\mathbb{T})$.

(ii) Für $1 \leq p < \infty$ liegt $\bigcup\limits_{N \in \mathbb{N}_0} T_N$ dicht in $L_p(\mathbb{T})$.

Beweis Aussage (i) folgt aus der Tatsache, dass man für $f \in C(\mathbb{T})$

$$\|f - \sigma_N f | C(\mathbb{T})\| \xrightarrow[N \to \infty]{} 0$$

zeigen kann. Siehe dazu auch [Si1].
Für $1 \leq p < \infty$ wissen wir durch Lemma 1.1, dass $C_0^\infty((-\pi, \pi))$ dicht in $L_p((-\pi, \pi))$ liegt. Eine Funktion aus $C_0^\infty(-\pi, \pi)$ lässt sich aufgrund der Trägereigenschaft ohne Probleme 2π-periodisieren. Man muss nur periodisch fortsetzen. Daraus folgt, dass $C(\mathbb{T})$ dicht in $L_p(\mathbb{T})$ liegt. Sei also $f \in L_p(\mathbb{T})$ und $\varepsilon > 0$. Dann finden wir ein $g \in C(\mathbb{T})$ mit $\|f - g|L_p(\mathbb{T})\| < \varepsilon/2$. Wegen $C(\mathbb{T}) \hookrightarrow L_p(\mathbb{T})$ gilt $\|g - \sigma_N g|L_p(\mathbb{T})\| \xrightarrow[N \to \infty]{} 0$. Also gibt es ein $M \in \mathbb{N}$ mit $\|g - \sigma_M g|L_p(\mathbb{T})\| < \varepsilon/2$. Schliesslich gilt:

$$\|f - \sigma_M g|L_p(\mathbb{T})\| \leq \|f - g|L_p(\mathbb{T})\| + \|g - \sigma_M g|L_p(\mathbb{T})\| < \varepsilon.$$

□

Lemma 1.10 Sei $1 \leq p \leq \infty$. Weiter sei $f \in L_p(\mathbb{T})$. Dann konvergieren die DE LA VALLÉE POUSSIN-Mittel von f in $L_p(\mathbb{T})$ gegen f. Im Falle $p = \infty$ hat man $L_p(\mathbb{T})$ duch $C(\mathbb{T})$ zu ersetzen. Wir haben also

$$\lim_{N \to \infty} \|f - V_N f|L_p(\mathbb{T})\| = 0.$$

Beweis Mit Lemma 1.9 folgt, dass die Menge $\bigcup\limits_{N \in \mathbb{N}_0} T_N$ dicht in $L_p(\mathbb{T})$ (bzw. $C(\mathbb{T})$ für $p = \infty$) liegt. Wir wissen weiter, dass für trigonometrische Polynome $V_{2N-1}t = t \ \forall N > N_t$ gilt. Desweiteren haben wir die gleichmässige Beschränktheit von $\|V_{2N-1} : L_p(\mathbb{T}) \to L_p(\mathbb{T})\|$ für alle $N \in \mathbb{N}$ (Satz 1.3). Mit dem Satz von BANACH/STEINHAUS folgt dann sofort

$$\|V_{2N-1}f - f|L_p(\mathbb{T})\| \xrightarrow[N \to \infty]{} 0$$

für alle $f \in L_p(\mathbb{T})$ (bzw. $f \in C(\mathbb{T})$). Analoges gilt für $V_{2N}f$ und man erhält die Aussage des Lemmas.

Definition 1.6 Es sei $(Y, \|\cdot\|)$ ein Banachraum und $X \subset Y$ ein linearer Teilraum. Weiter sei $f \in Y$. Die Grösse $E(f, Y, X)$ ist definiert durch:

$$E(f, Y, X) := \inf_{g \in X} \|f - g|Y\|. \tag{1.5.15}$$

Im Falle $Y = L_p(\mathbb{T})$ und $X = T_N$ mit $N \in \mathbb{N}$ wird abkürzend

$$E_p(N, f) := E(f, L_p(\mathbb{T}), T_N) \tag{1.5.16}$$

gesetzt.

Lemma 1.11 Es sei Y ein Banachraum und $X \subset Y$ ein <u>endlichdimensionaler</u> linearer Teilraum. Dann ist das Infimum in (1.5.15) in Definition 1.6 ein Minimum.

Beweis Wir folgen DE VORE, LORENTZ. Sei $f \in Y$ vorgegeben. Aufgrund der Definition existiert eine Folge $\{g_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ mit: $\|f - g_n\| \xrightarrow[n \to \infty]{} E(f, Y, X)$. Damit gilt:

$$\|g_n|Y\| = \|g_n - f + f|Y\| \leq \underbrace{\|g_n - f|Y\|}_{\leq 1,\, n > n_0} + \|f|Y\|.$$

Damit ist $\{g_n\}$ beschränkt und besitzt eine konvergente Teilfolge $\{g_{n_k}\}_k$ (Bolzano Weierstrass) mit: $g_{n_k} \xrightarrow[k \to \infty]{} g \in X$, da X endlichdimensional und damit abgeschlossen ist. Also gilt:

$$\left.\begin{array}{l} \|g_{n_k} - f|Y\| \xrightarrow[k \to \infty]{} E(f, Y, X) \\ \|g_{n_k} - f|Y\| \xrightarrow[k \to \infty]{} \|g - f|Y\| \end{array}\right\} \Rightarrow E(f, Y, X) = \|f - g|Y\|.$$

Für ein $f \in L_p(\mathbb{T})$ existiert also insbesondere ein $t \in T_N$ mit:

$$E_p(N,f) = \|f - t|L_p(\mathbb{T})\|. \tag{1.5.17}$$

Lemma 1.12 Sei $1 \le p \le \infty$, $N \in \mathbb{N}$ und $f \in L_p(\mathbb{T})$. Dann gilt:

$$E_p(2N-1,f) \le \|f - V_{2N-1}f|L_p\| \le 4E_p(N,f). \tag{1.5.18}$$

Beweis Die erste Ungleichung folgt direkt aus der Definition. Sei $t_N \in T_N$ ein trigonometrisches Polynom mit $\|f - t|L_p(\mathbb{T})\| = E_p(N,f)$. Eine solche Funktion existiert (siehe Lemma 1.11). Damit gilt:

$$\begin{aligned}
\|V_{2N-1}f - f|L_p(\mathbb{T})\| &\le \|V_{2N-1}f - t_N|L_p(\mathbb{T})\| + \|f - t_N|L_p(\mathbb{T})\| \\
\stackrel{(1.5.12)}{=} &\ \|V_{2N-1}(f - t_N)|L_p(\mathbb{T})\| + \|f - t_N|L_p(\mathbb{T})\| \\
\stackrel{(1.5.13)}{\le} &\ 3\|f - t_N|L_p(\mathbb{T})\| + \|f - t_N|L_p(\mathbb{T})\| \\
&= 4\|f - t_N|L_p(\mathbb{T})\| \\
&= 4E_p(N,f).
\end{aligned} \tag{1.5.19}$$

1.6 Nikolskij-Besov-Räume auf $\mathbb{T}$

1.6.1 Definition und äquivalente Charakterisierungen

Definition 1.7 *(Quasinorm)* Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{C}$. Eine Abbildung $\|\cdot\| : V \to [0,\infty)$ heisst Quasinorm auf V, wenn gilt:

$$\begin{array}{ll}
(Q1) & \|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0 \\
(Q2) & \|\lambda \cdot v\| = |\lambda|\|v\|\,,\ \forall v \in V, \lambda \in \mathbb{C} \\
(Q3) & \exists C > 0\ \forall v, w \in V\ \|v + w\| \le C(\|v\| + \|w\|)
\end{array}$$

Bemerkung 1.5 Jede Norm ist eine Quasinorm. $(Q3)$ ist mit $C = 1$ erfüllt.

Definition 1.8 Das Paar $(V, \|\cdot\|)$, bestehend aus einem Vektorraum V und einer Quasinorm $\|\cdot\|$ auf V, ist ein Quasi-Banchachraum, wenn V bzgl. der durch $\|\cdot\|$ erzeugten Topologie vollständig ist, d.h:

$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset V \text{ Cauchy-Folge } \Rightarrow (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ konvergent in } V.$$

Definition 1.9 *(Nikolskij-Besov-Räume)* Seien $1 \le p \le \infty$, $0 < q \le \infty$ und $s > 0$.

(i) Für $0 < q < \infty$ definieren wir

$$B^s_{p,q}(\mathbb{T}) := \left\{ f \in L_p(\mathbb{T}) : \|f|B^s_{p,q}(\mathbb{T})\|_E = \|f|L_p(\mathbb{T})\| + \left(\sum_{j=0}^{\infty} 2^{sjq} E_p(2^j, f)^q \right)^{\frac{1}{q}} < \infty \right\},$$

(ii) bzw für $q = \infty$

$$B^s_{p,\infty}(\mathbb{T}) := \left\{ f \in L_p(\mathbb{T}) : \|f|B^s_{p,\infty}(\mathbb{T})\|_E = \|f|L_p(\mathbb{T})\| + \sup_{j=0,1,\dots} 2^{sj} E_p(2^j, f) < \infty \right\}.$$

Lemma 1.13 $1 \le p \le \infty$, $0 < q \le \infty$, $s > 0$. Die Mengen $B^s_{p,q}(\mathbb{T})$ sind komplexe Vektorräume mit den üblichen Operationen und die Abbildung

$$\|\cdot|B^s_{p,q}(\mathbb{T})\|_E : B^s_{p,q}(\mathbb{T}) \to [0,\infty)$$

ist eine Quasinorm auf $B^s_{p,q}(\mathbb{T})$. Für $q \ge 1$ ist diese Abbildung eine Norm.

Beweis Man rechnet hier leicht die entsprechenden Axiome nach.

Bemerkung 1.6 Für $s > 0$ und $0 < q \leq \infty$ ist $B^s_{\infty,q}(\mathbb{T}) \subset C(\mathbb{T})$. Es gilt nämlich für $f \in B^s_{\infty,q}(\mathbb{T})$

$$E_\infty(2^j, f) \xrightarrow[j\to\infty]{} 0$$

(siehe Definition 1.9). Wegen Lemma 1.11 gibt es eine Folge $(t_j)_{j\in\mathbb{N}}$ mit $t_j \in T_{2^j}$ und

$$\|f - t_j|L_\infty(\mathbb{T})\| \xrightarrow[j\to\infty]{} 0.$$

Das hat $f \in C(\mathbb{T})$ zur Folge.

Satz 1.4 Sei $1 \leq p \leq \infty$, $0 < q \leq \infty$, $s > 0$. Dann existieren $C_1, C_2 > 0$, so dass $\forall f \in L_p(\mathbb{T})$ gilt:

$$C_1\|f|B^s_{p,q}(\mathbb{T})\|_E \underset{\text{(i)}}{\leq} \|f|B^s_{p,q}(\mathbb{T})\|_V \underset{\text{(ii)}}{\leq} C_2\|f|B^s_{p,q}(\mathbb{T})\|_E \tag{1.6.1}$$

mit

$$\|f|B^s_{p,q}(\mathbb{T})\|_V = \|f|L_p(\mathbb{T})\| + \left(\sum_{j=0}^{\infty} 2^{jsq}\|f - V_{2^{j+1}-1}f|L_p(\mathbb{T})\|^q\right)^{\frac{1}{q}} \tag{1.6.2}$$

und der üblichen Modifikation für $q = \infty$.

Beweis Sei $f \in L_p(\mathbb{T})$. <u>*Schritt 1:*</u>

Im Folgenden wird (i) gezeigt. Es gilt:

$$\begin{aligned}
\|f|B^s_{p,q}(\mathbb{T})\|_E &= \|f|L_p(\mathbb{T})\| + \left(\sum_{j=0}^{\infty} 2^{sjq}E_p(2^j, f)^q\right)^{\frac{1}{q}} \\
&= \|f|L_p(\mathbb{T})\| + \left(E_p(1,f)^q + \sum_{j=1}^{\infty} 2^{jsq}E_p(2^j, f)^q\right)^{\frac{1}{q}} \\
&\leq \|f|L_p(\mathbb{T})\| + \left(\underbrace{E_p(1,f)^q}_{\leq\|V_1f-f|L_p(\mathbb{T})\|^q} + \sum_{j=0}^{\infty} 2^{(j+1)sq}\cdot \underbrace{E_p(2^{j+1}-1,f)^q}_{\leq\|V_{2^{j+1}-1}f-f|L_p(\mathbb{T})\|^q}\right)^{\frac{1}{q}}
\end{aligned} \tag{1.6.3}$$

Zieht man den ausserhalb der Summe stehenden Summanden wieder in die Summe, so kann man folgendermassen vergrössern:

$$\begin{aligned}
(1.6.3) &\leq \|f|L_p(\mathbb{T})\| + \left(\sum_{j=0}^{\infty} 2^{(j+1)sq+1}\|V_{2^{j+1}-1}f - f|L_p(\mathbb{T})\|^q\right)^{\frac{1}{q}} \\
&= \|f|L_p(\mathbb{T})\| + 2^{s+\frac{1}{q}}\left(\sum_{j=0}^{\infty} 2^{jsq}\|V_{2^{j+1}-1}f - f|L_p(\mathbb{T})\|^q\right)^{\frac{1}{q}}.
\end{aligned} \tag{1.6.4}$$

Wegen $2^{s+\frac{1}{q}} > 1$ gilt:

$$\begin{aligned}
(1.6.4) &\leq 2^{s+\frac{1}{q}}\left(\|f|L_p(\mathbb{T})\| + \left(\sum_{j=0}^{\infty} 2^{jsq}\|V_{2^{j+1}-1}f - f|L_p(\mathbb{T})\|^q\right)^{\frac{1}{q}}\right) \\
&=: \frac{1}{C_1}\|f|B^s_{p,q}(\mathbb{T})\|_V.
\end{aligned}$$

Es ist hier sicherlich günstiger, die Ungleichungskette von hinten nach vorn zu lesen, d.h. bei $\|f|B^s_{p,q}(\mathbb{T})\|_V < \infty$ zu starten, nach unten abschätzen und schliesslich bei $C_1\|f|B^s_{p,q}(\mathbb{T})\|_E$ enden. Auf diese Weise ist in jedem Schritt gesichert, das die vorkommenden Reihen auch im eigentlichen Sinne existieren.

Schritt 2:

Im Folgenden wird (ii) gezeigt. Es gilt:

$$\begin{aligned}
\|f|B^s_{p,q}\|_V &= \|f|L_p(\mathbb{T})\| + \left(\sum_{j=0}^{\infty} 2^{jsq}\|V_{2^{j+1}-1}f - f|L_p(\mathbb{T})\|^q\right)^{\frac{1}{q}} \\
\overset{\text{(Satz 1.3)}}{} &\leq \|f|L_p(\mathbb{T})\| + \left(\sum_{j=0}^{\infty} 2^{jsq}3^q E_p(2^j,f)^q\right)^{\frac{1}{q}} \\
&\leq 3\left(\|f|L_p(\mathbb{T}\| + \left(\sum_{j=0}^{\infty} 2^{jsq}E_p(2^j,f)^q\right)^{\frac{1}{q}}\right) \\
&=: C_2\|f|B^s_{p,q}(\mathbb{T})\|_E.
\end{aligned}$$

Hier sollte man wieder die Ungleichungskette aus den oben schon erwähnten Gründen von hinten nach vorn lesen.

Folgerung 2 Mit dem Satz zeigt sich, dass für $f \in L_p(\mathbb{T})$ gilt:

$$\|f|B^s_{p,q}(\mathbb{T})\|_V < \infty \quad \Longleftrightarrow \quad f \in B^s_{p,q}(\mathbb{T}).$$

Man könnte also $B^s_{p,q}(\mathbb{T})$ auch mittels $\|f|B^s_{p,q}(\mathbb{T})\|_V$ charakterisieren. Leichtes Nachrechnen ergibt, dass $\|\cdot|B^s_{p,q}(\mathbb{T})\|_V$ eine Quasinorm auf $B^s_{p,q}(\mathbb{T})$ ist. Der Satz zeigt also, dass die beiden Quasinormen $\|\cdot|B^s_{p,q}(\mathbb{T})\|_E$ und $\|\cdot|B^s_{p,q}(\mathbb{T})\|_V$ äquivalent sind und demzufolge die gleiche Topologie auf $B^s_{p,q}(\mathbb{T})$ erzeugen.

Im Folgenden beweisen wir noch eine nützliche äquivalente Charakterisierung der Räume $B^s_{p,q}(\mathbb{T})$ für $s > 0$ und $1 \leq p,q \leq \infty$.

Satz 1.5 Es sei $s > 0$, $1 \leq p \leq \infty$ und $1 \leq q \leq \infty$. Für $f \in L_p(\mathbb{T})$ definieren wir die Grösse

$$\|f|B^s_{p,q}(\mathbb{T})\|^* = \left(\|V_1 f|L_p(\mathbb{T})\|^q + \sum_{j=1}^{\infty}\|V_{2^{j+1}-1}f - V_{2^j-1}f|L_p(\mathbb{T})\|^q\right)^{1/q}. \tag{1.6.5}$$

mit der üblichen Modifikation im Falle $q = \infty$. Es gibt Konstanten $C_1, C_2 > 0$, so dass für alle $f \in L_p(\mathbb{T})$

$$C_1\|f|B^s_{p,q}(\mathbb{T})\|_V \underset{(i)}{\leq} \|f|B^s_{p,q}(\mathbb{T})\|^* \underset{(ii)}{\leq} C_2\|f|B^s_{p,q}(\mathbb{T})\|_V.$$

Beweis Aus der Tatsache $V_{2^{j+1}-1}f - V_{2^j-1}f = V_{2^{j+1}-1}(f - V_{2^j-1}f)$ und dem Satz 1.3 folgt sofort die Ungleichung (ii).
Bleibt noch die Ungleichung (i) zu zeigen. Wir zeigen zuerst $\|f|L_p(\mathbb{T})\| \leq C\|f|B^s_{p,q}(\mathbb{T})\|^*$. Dazu nutzen wir aus, dass für $f \in L_p(\mathbb{T})$

$$f \underset{L_p(\mathbb{T})}{=} \sum_{j=1}^{\infty}(V_{2^{j+1}-1}f - V_{2^j-1}f) + V_1 f \tag{1.6.6}$$

gilt. Wir müssen allerdings $L_\infty(\mathbb{T})$ durch $C(\mathbb{T})$ ersetzen. Diese Tatsache ist eine direkte Konsequenz aus Lemma 1.10. Es gilt:

$$\begin{aligned}
\|f|L_p(\mathbb{T})\| &\leq \|V_1 f|L_p(\mathbb{T})\| + \sum_{j=1}^{\infty} \|V_{2^{j+1}-1}f - V_{2^j-1}f|L_p(\mathbb{T})\| \\
&\leq \|V_1 f|L_p(\mathbb{T})\| + \sum_{j=1}^{\infty} 2^{-js}2^{js}\|V_{2^{j+1}-1}f - V_{2^j-1}f|L_p(\mathbb{T})\| \\
&\leq \|V_1 f|L_p(\mathbb{T})\| + \sup_{j=1,2,\ldots} 2^{js}\|V_{2^{j+1}-1}f - V_{2^j-1}f|L_p(\mathbb{T})\| \underbrace{\sum_{j=1}^{\infty} 2^{-js}}_{=:C} \\
&\leq (C+1)\|f|B^s_{p,\infty}(\mathbb{T})\|^* \\
&\underset{(l_q \hookrightarrow \ell_\infty)}{\leq} \tilde{C}\|f|B^s_{p,q}(\mathbb{T})\|^*.
\end{aligned} \tag{1.6.7}$$

Sei vorerst $q < \infty$. Wir schätzen nun den zweiten Summanden von (1.6.2) ab. Dazu nutzen wir analog (1.6.6) für $f \in L_p(\mathbb{T})$

$$f - V_{2^{j+1}-1}f \underset{L_p(\mathbb{T})}{=} \sum_{k=1}^{\infty}(V_{2^{j+k+1}-1}f - V_{2^{k+j}-1}f).$$

Es gilt also:

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{j=0}^{\infty} \|2^{js}(f - V_{2^{j+1}-1}f)|L_p(\mathbb{T})\|^q\right)^{1/q} &= \left(\sum_{j=0}^{\infty} \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{2^{js}(V_{2^{k+j+1}-1}f - V_{2^{k+j}-1}f)}_{=:f_j^k(x)} \right| L_p(\mathbb{T}) \right\|^q \right)^{1/q} \\
&\leq \left(\sum_{j=0}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{\infty} \|f_j^k|L_p(\mathbb{T})\|\right)^q\right)^{1/q}
\end{aligned} \tag{1.6.8}$$

Wir erklären für jedes $k \in \mathbb{N}$ durch $A^k := (\|f_1^k|L_p(\mathbb{T}), \|f_2^k|L_p(\mathbb{T})\|, ..., \|f_j^k|L_p(\mathbb{T})\|, ...)$ eine Zahlenfolge reeller Zahlen. Damit gilt:

$$(1.6.8) = \left\| \sum_{k=1}^{\infty}(A_j^k)_j \right| \ell_q \bigg\| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \|(A_j^k)_j|\ell_q\|. \tag{1.6.9}$$

Wegen $q \geq 1$ ist ℓ_q ein Banachraum. Die Abschätzung in (1.6.9) ist dadurch möglich.
Jetzt folgt weiter:

$$\begin{aligned}
(1.6.8) &\leq \sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{\infty} \|2^{-ks}2^{(j+k)s}(V_{2^{j+k+1}-1}f - V_{2^{j+k}-1}f)\|^q\right)^{1/q} \\
&\leq \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-ks}\|f|B^s_{p,q}(\mathbb{T})\|^* \\
&= c\|f|B^s_{p,q}(\mathbb{T})\|^*.
\end{aligned}$$

Also haben wir

$$\|f|B^s_{p,q}(\mathbb{T})\|_V \leq (\tilde{C} + c)\|f|B^s_{p,q}(\mathbb{T})\|^*.$$

Diese Ungleichung erhält man mit den entsprechenden Modifikationen auch für $q = \infty$. □

Wir können damit den Raum $B^s_{p,q}(\mathbb{T})$ auch mit $\|\cdot|B^s_{p,q}\|^*$ charakterisieren.

1.6.2 Vollständigkeit der $B^s_{p,q}(\mathbb{T})$

Satz 1.6 Sei $1 \leq p \leq \infty$, $0 < q \leq \infty$, $s > 0$. Dann ist das Paar $\left(B^s_{p,q}(\mathbb{T}), \|\cdot|B^s_{p,q}\|_V\right)$ bzw $\left(B^s_{p,q}(\mathbb{T}), \|\cdot|B^s_{p,q}\|_E\right)$ ein Quasi-Banachraum (für $q \geq 1$ ein Banachraum) und wir bezeichnen es ab jetzt kurz mit $B^s_{p,q}(\mathbb{T})$.

Beweis Sei $(f_n)_n$ eine Cauchyfolge in $B^s_{p,q}(\mathbb{T})$,
d.h.: $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, $\forall n, m > n_\varepsilon$:

$$\|f_n - f_m|B^s_{p,q}(\mathbb{T})\|_V < \varepsilon.$$

Zu zeigen ist:

$$\exists f \in B^s_{p,q}(\mathbb{T}) \text{ mit } \|f - f_n|B^s_{p,q}(\mathbb{T})\|_V \to 0 \text{ für } n \to \infty.$$

Die folgenden Betrachtungen setzen $q < \infty$ voraus. Für $q = \infty$ erhält man analoge Resultate mit den üblichen Modifikationen.
Es gilt:

$$\left(\sum_{j=0}^{\infty} 2^{jsq}\|f_n - V_{2^{j+1}-1}f_n|L_p(\mathbb{T})\|^q\right)^{\frac{1}{q}} \leq \|f_n|B^s_{p,q}(\mathbb{T})\|_V < \infty\,,\ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Damit folgt:

$$(A^n_j)_j := \left(2^{js}\|f_n - V_{2^{j+1}-1}f_n|L_p(\mathbb{T})\|\right)_j \in \ell_q\,,\ \forall n \in \mathbb{N}$$

Ich zeige als nächstes: $\left((A^n_j)_j\right)_n \subset \ell_q$ ist eine Cauchy-folge in ℓ_q. Wir betrachten dazu:

$$\begin{aligned}
\|(A^n_j)_j - (A^m_j)_j|\ell_q\|^q &= \sum_{j=0}^{\infty} |A^n_j - A^m_j|^q \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} 2^{jsq}\left|\left(\|f_n - V_{2^{j+1}-1}f_n|L_p(\mathbb{T})\| - \|f_m - V_{2^{j+1}-1}f_m|L_p(\mathbb{T})\|\right)\right|^q \\
&\leq \sum_{j=0}^{\infty} 2^{jsq}\|f_n - f_m - V_{2^{j+1}-1}f_n + V_{2^{j+1}-1}f_m|L_p(\mathbb{T})\|^q \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} 2^{jsq}\|f_n - f_m - (V_{2^{j+1}-1}f_n - V_{2^{j+1}-1}f_m)|L_p(\mathbb{T})\|^q.
\end{aligned}$$

Also folgt insgesamt:

$$\begin{aligned}
\|(A^n_j)_j - (A^m_j)_j|\ell_q\| &\leq \left(\sum_{j=0}^{\infty} 2^{jsq}\|f_n - f_m - V_{2^{j+1}-1}(f_n - f_m)|L_p(\mathbb{T})\|^q\right)^{\frac{1}{q}} \\
&\leq \|f_n - f_m|B^s_{p,q}(\mathbb{T})\|_V.
\end{aligned}$$

Aus der Vollständigkeit des ℓ_q folgt, dass es ein $(A_j)_j \in \ell_q$ gibt, mit:

$$\|(A^n_j)_j - (A_j)_j|\ell_q\| \to 0\,,\quad \text{für } n \to \infty. \tag{1.6.10}$$

Man sieht jetzt für $n, j \in \mathbb{N}$:

$$|A^n_j - A_j|^q \leq \sum_{j=0}^{\infty} |A^n_j - A_j|^q = \|(A^n_j)_j - (A_j)_j|\ell_q\|^q \to 0\,,\quad \text{für } n \to \infty \text{ (siehe (1.6.10))}.$$

Damit gilt also $\forall j \in \mathbb{N}$:

$$A^n_j \to A_j\,,\quad \text{für } n \to \infty \tag{1.6.11}$$

Wegen $\|g|L_p(\mathbb{T})\| \leq \|g|B^s_{p,q}(\mathbb{T})\|_V$ $\forall g \in L_p(\mathbb{T})$ (siehe Definition) ist $(f_n)_n$ auch eine Cauchyfolge in $L_p(\mathbb{T})$ (bzgl. $\|\cdot|L_p(\mathbb{T})\|$). Damit existiert ein $f \in L_p(\mathbb{T})$ mit:

$$\|f - f_n|L_p(\mathbb{T})\| \to 0\,, \quad \text{für } n \to \infty \tag{1.6.12}$$

Ich zeige:

(i) $f \in B^s_{p,q}(\mathbb{T})$ und

(ii) $\|f - f_n|B^s_{p,q}(\mathbb{T})\| \to 0$ für $n \to \infty$.

Um (i) zu zeigen, argumentieren wir so: Wegen (1.6.12) gilt $\forall j \in \mathbb{N}_0$:

$$A^n_j = 2^{js}\|f_n - V_{2^{j+1}-1}f_n|L_p(\mathbb{T})\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 2^{js}\|f - V_{2^{j+1}-1}f|L_p(\mathbb{T})\| = A_j. \tag{1.6.13}$$

Hier wird nur verwendet, dass $V_{2^{j+1}-1}$ ein stetiger Operator von $L_p(\mathbb{T}) \to L_p(\mathbb{T})$ ist. Die gleichmässige Beschränktheit der Normen (Satz 1.3) braucht man nicht.
Damit gilt wegen $(A_j)_j \in \ell_q$:

$$\left(\sum_{j=0}^{\infty} 2^{jsq}\|f - V_{2^{j+1}-1}f|L_p(\mathbb{T})\|^q\right)^{\frac{1}{q}} = \left(\sum_{j=0}^{\infty} |A_j|^q\right)^{\frac{1}{q}} < \infty. \tag{1.6.14}$$

Und das bedeutet:

$$f \in B^s_{p,q}(\mathbb{T}).$$

Für (ii) fixieren wir ein $\varepsilon > 0$. Es genügt zu zeigen, dass es ein $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ gibt, so dass:

$$\sum_{j=0}^{\infty} 2^{jsq}\|f_n - f - V_{2^{j+1}-1}(f_n - f)|L_p(\mathbb{T})\|^q \leq \varepsilon^q\,,\ \forall n > n(\varepsilon). \tag{1.6.15}$$

Dazu reicht es wiederum zu zeigen, dass gilt:

$$\exists n(\varepsilon) \in \mathbb{N},\ \forall n > n(\varepsilon)\,\forall M \in \mathbb{N} : \sum_{j=0}^{M} 2^{jsq}\|f_n - f - V_{2^{j+1}-1}(f_n - f)|L_p(\mathbb{T})\|^q < \varepsilon^q.$$

Da $(f_n)_n \subset B^s_{p,q}(\mathbb{T})$ eine Cauchyfolge ist, existiert ein $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, so dass

$$\sum_{j=0}^{\infty} 2^{jsq}\|f_n - f_m - V_{2^{j+1}-1}(f_n - f_m)|L_p(\mathbb{T})\|^q < \frac{\varepsilon^q}{2}\,,\ \forall n, m > n(\varepsilon).$$

Sei $M \in \mathbb{N}$ beliebig und fest. Dann gilt:

$$\sum_{j=0}^{M} 2^{jsq}\|f_n - f_m - V_{2^{j+1}-1}(f_n - f_m)|L_p(\mathbb{T})\|^q < \frac{\varepsilon^q}{2}\,,\ \forall n, m > n(\varepsilon).$$

Wie oben schon gesehen, gilt für festes $j \in \mathbb{N}_0$:

$$2^{jsq}\|f_m - f - V_{2^{j+1}-1}(f_m - f)|L_p(\mathbb{T})\|^q \xrightarrow[m\to\infty]{} 0.$$

Eine <u>endliche Summe</u> von Nullfolgen ist wieder ein Nullfolge. Damit gilt $\forall m > m(M, \varepsilon)$:

$$\sum_{j=0}^{M} 2^{jsq}\|f_m - f - V_{2^{j+1}-1}(f_m - f)|L_p(\mathbb{T})\|^q < \frac{\varepsilon^q}{2}.$$

Also gilt $\underline{\forall n > n(\varepsilon)}$ und für ein $m > \max(n(\varepsilon), m(M,\varepsilon))$:

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{M} 2^{jsq}\|f_n - f - V_{2^{j+1}-1}(f_n - f)|L_p(\mathbb{T})\|^q &\leq \sum_{j=0}^{M} 2^{jsq}\|f_n - f_m - V_{2^{j+1}-1}(f_n - f_m)|L_p(\mathbb{T})\|^q \\ &+ \sum_{j=0}^{M} 2^{jsq}\|f_m - f - V_{2^{j+1}-1}(f_m - f)|L_p(\mathbb{T})\|^q \\ &< \frac{\varepsilon^q}{2} + \frac{\varepsilon^q}{2} \\ &< \varepsilon^q.\end{aligned}$$

Liest man nur den Anfang und das Ende der Ungleichungskette, so folgt $\forall n > n(\varepsilon)$:

$$\sum_{j=0}^{M} 2^{jsq}\|f_n - f - V_{2^{j+1}-1}(f_n - f)|L_p(\mathbb{T})\|^q < \varepsilon^q \tag{1.6.16}$$

Da das $M \in \mathbb{N}$ beliebig gewählt wurde, nachdem das $n(\varepsilon)$ fest war, gilt (1.6.16) für alle endlichen Summen dieser Art. Wegen der nichtnegativen Summanden, folgt (1.6.15) aus der Tatsache, dass die Partialsummenfolge monoton steigend und nach oben durch ε^q beschränkt sind. □

1.6.3 Die Einbettung von $B^s_{p,q}(\mathbb{T})$ in $C(\mathbb{T})$

Definition 1.10 Sei $t(x)$ ein trigonometrisches Polynom. Wir setzen:

$$\operatorname{supp} \hat{t} := \{k \in \mathbb{Z} : c_k(t) \neq 0\}.$$

Lemma 1.14 *(*NIKOLSKIJ*-Ungleichung)*
Sei $0 < p < \infty$, $p < q \leq \infty$ und p_0 die kleinste natürliche Zahl grösser oder gleich $p/2$. Wir setzen für ein trigonometrisches Polynom $t(x)$

$$C_{p_0,t} = \frac{1}{2\pi}|\operatorname{supp} \widehat{t^{p_0}}|.$$

Dann gilt die Ungleichung

$$\|t(x)|L_q(\mathbb{T})\| \leq (C_{p_0,t})^{1/p-1/q}\|t(x)|L_p(\mathbb{T})\|.$$

Beweis Siehe dazu [STr, Abschnitt 3.3.2.].

Satz 1.7 Sei $1 \leq p \leq \infty$, $1 \leq q \leq \infty$ und $s > 1/p$. Dann ist

$$B^s_{p,q}(\mathbb{T}) \hookrightarrow C(\mathbb{T}).$$

Beweis Wir zeigen die Aussage zunächst für $p < \infty$. Dazu wird $B^s_{p,q}(\mathbb{T}) \subset C(\mathbb{T})$ und

$$\|f|C(\mathbb{T})\| \leq C\|f|B^s_{p,q}(\mathbb{T})\|^* \quad , \quad \forall f \in B^s_{p,q}(\mathbb{T})$$

gezeigt. Sei $f \in B^s_{p,q}(\mathbb{T})$. Wegen $\ell_q \hookrightarrow \ell_\infty$ ist natürlich $f \in B^s_{p,\infty}(\mathbb{T})$. Mithilfe der NIKOLSKIJ-Ungleichung sind wir in der Lage, $\|\underbrace{V_{2^{j+1}-1}f - V_{2^j-1}f}_{t(x)}|C(\mathbb{T})\|$ abzuschätzen. Dazu müssen wir als erstes die Grössenordnung von $C_{p_0,t}$ bestimmen. Für das trigonometrische Polynom t gilt:

$$c_k(t) \neq 0 \quad \Longrightarrow \quad |k| \leq 2^{j+1}.$$

Damit gilt für t^{p_0}:

$$c_k(t^{p_0}) \neq 0 \quad \Longrightarrow \quad |k| \leq p_0 2^{j+1}$$

Somit ist $C(p_0,t)^{1/p} \le c(p)2^{j/p}$. Die NIKOLSKIJ-Ungleichung führt dann zu Folgendem:

$$\|V_{2^{j+1}-1}f - V_{2^j-1}f|C(\mathbb{T})\| \le c2^{j/p}\|V_{2^{j+1}-1}f - V_{2^j-1}f|L_p(\mathbb{T})\| \quad , \quad \text{wobei}$$

das c nicht von f und j abhängt. Wir haben also:

$$\begin{aligned}\|V_{2^{j+1}-1}f - V_{2^j-1}f|C(\mathbb{T})\| &= \|V_{2^{j+1}-1}f - V_{2^j-1}f|C(\mathbb{T})\|2^{-js}2^{js}2^{-j/p}2^{j/p} \\ &= 2^{j(1/p-s)}2^{js}\underbrace{2^{-j/p}\|V_{2^{j+1}-1}f - V_{2^j-1}f|C(\mathbb{T})\|}_{\le c\|V_{2^{j+1}-1}f - V_{2^j-1}f|L_p(\mathbb{T})\|} \\ &\le c2^{j(1/p-s)}\|f|B^s_{p,\infty}(\mathbb{T})\|^*.\end{aligned}$$

Und das führt zu

$$\begin{aligned}\|V_1f|C(\mathbb{T})\| + \sum_{j=1}^{\infty}\|V_{2^{j+1}-1}f - V_{2^j-1}f|C(\mathbb{T})\| &\le \|f|B^s_{p,\infty}(\mathbb{T})\|^* + \|f|B^s_{p,\infty}(\mathbb{T})\|^*\underbrace{c\sum_{j=1}^{\infty}2^{j(1/p-s)}}_{=:C} \\ &\underset{(s>1/p)}{\le} C_1\|f|B^s_{p,\infty}(\mathbb{T})\|^* \end{aligned} \tag{1.6.17}$$

Aufgrund der absoluten Konvergenz von $V_1f + \sum_{j=1}^{\infty}(V_{2^{j+1}-1}f - V_{2^j-1}f)$ in $C(\mathbb{T})$ existiert $\tilde{f} = V_1f + \sum_{j=1}^{\infty}(V_{2^{j+1}-1}f - V_{2^j-1}f)$ in $C(\mathbb{T})$. Wir haben nun die Einbettung $C(\mathbb{T}) \hookrightarrow L_p(\mathbb{T})$ zur Verfügung. Damit ist auch $\tilde{f} = V_1f + \sum_{j=1}^{\infty}(V_{2^{j+1}-1}f - V_{2^j-1}f)$ in $L_p(\mathbb{T})$. Wegen $p < \infty$ gilt (1.6.6). Die Eindeutigkeit des Grenzwertes hat dann $f = \tilde{f}$ (fast überall) zur Folge. Also ist $f \in C(\mathbb{T})$ und wegen

$$\|f|C(\mathbb{T})\| \le \|V_1f|C(\mathbb{T})\| + \sum_{j=1}^{\infty}\|V_{2^{j+1}-1}f - V_{2^j-1}f|C(\mathbb{T})\|$$

gilt mit (1.6.17)

$$\|f|C(\mathbb{T})\| \le C_1\|f|B^s_{p,\infty}(\mathbb{T})\|^* \underset{\ell_q\hookrightarrow\ell_\infty}{\le} C_2\|f|B^s_{p,q}(\mathbb{T})\|^*.$$

Im Falle $p = \infty$ haben wir für $s > 0$

$$B^s_{\infty,q}(\mathbb{T}) \hookrightarrow C(\mathbb{T}).$$

Liest man die Ungleichungskette (1.6.7) ab der zweiten Zeile, so erhält man für $f \in B^s_{\infty,q}(\mathbb{T})$

$$\|V_1f|C(\mathbb{T})\| + \sum_{j=1}^{\infty}\|V_{2^{j+1}-1}f - V_{2^j-1}f|C(\mathbb{T})\| \le C_3\|f|B^s_{\infty,\infty}(\mathbb{T})\| < \infty. \tag{1.6.18}$$

Damit existiert

$$\tilde{f} = V_1f + \sum_{j=1}^{\infty}(V_{2^{j+1}-1} - V_{2^j-1}f) = \lim_{N\to\infty} V_{2^N-1}f \tag{1.6.19}$$

in $C(\mathbb{T})$. Sei jetzt $k \in \mathbb{Z}$. Dann gilt:

$$c_k(\tilde{f}) = \lim_{N\to\infty} c_k(V_{2^N-1}f) = c_k(f).$$

Damit muss fast überall $f = \tilde{f}$ gelten. Mit (1.6.18) und (1.6.19) erhält man dann
$\|f|C(\mathbb{T})\| \le C_3\|f|B^s_{\infty,\infty}(\mathbb{T})\| \le C_4\|f|B^s_{\infty,q}(\mathbb{T})\|$. □

1.7 Die klassische trigonometrische Interpolation

Das folgende Lemma nimmt Bezug auf den in Definition 1.4 eingeführten Dirichlet-Kern. Bis jetzt wissen wir, dass $D_N(\cdot) \in T_N$ gilt.

Lemma 1.15 Sei $D_N(x)$ der in Definition 1.4 erklärte Dirichlet-Kern. Dann gilt für $l \in \{0, ..., 2N\}$

$$D_N\left(\frac{2\pi l}{2N+1}\right) = \frac{2N+1}{2}\,\delta_{0\,l}. \tag{1.7.1}$$

Beweis Betrachtet wird $D_N(x)$ auf dem Intervall $[0, 2\pi)$. Aus der Definition folgt, dass $D_N(0) = \frac{2N+1}{2}$ gilt. Sei jetzt $0 < x < 2\pi$. Damit ist $D_N(x) = \frac{\sin(\frac{2N+1}{2}x)}{2\sin(\frac{x}{2})}$ und $\sin(\frac{x}{2}) \neq 0$. Also gilt:

$$\begin{aligned} D_N(x) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \sin\left(\frac{2N+1}{2}x\right) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{2N+1}{2}x = l\pi \text{ für ein } l \in \mathbb{Z} \\ &\Leftrightarrow \quad x = \frac{2\pi l}{2N+1}\ . \end{aligned} \tag{1.7.2}$$

Damit folgt (1.7.1).

Diese Eigenschaft wird sich für die klassische trigonometrische Interpolation als besonders nützlich erweisen. Die Aufgabe dieser klassischen trigonometrischen Interpolation besteht nun darin, eine 2π-periodische Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ durch ein trigonometrisches Polynom $t(x)$ in einem vorgegebenen äquidistanten Gitter zu interpolieren. Das heisst, dass die Funktionswerte von f und t in den Gitterpunkten übereinstimmen. Verfeinert man das zugrundeliegende Gitter, so wird auf diese Weise ein Approximationsprozess für die Funktion f definiert. Der folgende Satz macht eine Aussage über die Lösbarkeit dieser Interpolationsaufgabe.

Satz 1.8 Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eine 2π-periodische, stetige Funktion (d.h.: $f : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$) und $N \in \mathbb{N}$. Sei weiter

$$\left\{x_l = \frac{2\pi l}{2N+1} : l = 0, ..., 2N\right\}$$

das gleichmässige Gitter mit $2N+1$ Gitterpunkten auf $[0, 2\pi]$.
Dann gibt es <u>genau ein</u> trigonometrisches Polynom $t \in T_N$ mit

$$f(x_l) = t(x_l)\,, \text{ für alle } l = 0, .., 2N$$

und dieses lautet:

$$t(x) = I_N f(x) := \frac{2}{2N+1}\sum_{l=0}^{2N} f(x_l) D_N(x - x_l). \tag{1.7.3}$$

Dabei heisst der Operator I_N Interpolationsoperator der Ordnung N.

Beweis $I_N f$ ist ein trigonometrisches Polynom der Ordnung N, da es eine Summe solcher Funktionen ist. Sei $l \in \{0, ..., 2N\}$. Wir betrachten $I_N f(x_l)$. Es gilt:

$$\begin{aligned} I_N f(x_l) &= \frac{2}{2N+1}\sum_{k=0}^{2N} f(x_k) D_N(x_l - x_k) \\ \text{(Lemma 1.15, Periodizität von } D_N) \quad &= \frac{2}{2N+1} f(x_l) D_N(0) \\ &= f(x_l). \end{aligned}$$

Die Eindeutigkeit folgt aus der Tatsache, dass für ein trigonometrisches Polynom der Ordnung N genau $2N+1$ Fourierkoeffizienten aus der Information über das Verhalten in den Gitterpunkten zu bestimmen sind. Dies führt auf ein lineares Gleichungssystem mit $2N + 1$ Unbekannten und $2N + 1$ Gleichungen, bei dem die Koeffizientendeterminante nicht verschwindet, weil man das gleichmässige Gitter benutzt. Man erhält eine Vandermonde - Koeffizientendeterminante.

1.8 Eine Verallgemeinerung der klassischen trigonometrischen Interpolation

Ziel dieses Abschnittes ist die Verallgemeinerung des klassischen Konzepts in dem Sinne, dass man die Dirichlet-Kerne in (1.7.3) durch andere Funktionen ersetzt, von denen man eine ähnliche Eigenschaft wie (1.7.1) fordert.

Hierzu sind im Vorfeld einige Festlegungen zu treffen:

Sei $N \in \mathbb{N}$. Dann setzen wir

$$\begin{aligned} J_N &= \left\{ k \in \mathbb{Z} : -\frac{N}{2} \leq k < \frac{N}{2} \right\} \text{ und} \\ x_l &= 2\pi \frac{l}{N}, \text{ für } l \in J_N. \end{aligned}$$

Die Festlegung wurde also so getroffen, dass $|J_N| = N$ gilt.

Definition 1.11 Sei $N \in \mathbb{N}$. Eine 2π-periodische stetige Funktion Λ_N^π mit der Eigenschaft:

$$\Lambda_N^\pi(x_l) = \begin{cases} 1 & : \quad l = 0 \\ 0 & : \quad l \neq 0 \end{cases}, \; l \in J_N \tag{1.8.1}$$

heisst Fundamentalinterpolant für das Gitter $\{x_l : l \in J_N\}$.

Definition 1.12 $N \in \mathbb{N}$, Λ_N^π ein Fundamentalinterpolant und $f : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ eine (2π-periodische) stetige Funktion. Dann wird die Funktion $I_N f : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ erklärt durch:

$$I_N f(x) = \sum_{l \in J_N} f(x_l) \Lambda_N^\pi(x - x_l) \tag{1.8.2}$$

Bemerkung 1.7 Die Funktion $I_N f$ interpoliert f auf dem gleichmässigen Gitter $\{x_l : l \in J_N\}$. Das zeigt man analog zur klassischen trigonometrischen Interpolation. Da an den Fundamentalinterpolanten Λ_N^π nur die Forderung (1.8.1) gestellt wird, ist $I_N f$ im allgemeinen kein trigonometrisches Polynom.

Man kann jetzt die Frage nach den Fourierkoeffizienten von $I_N f$ stellen, da aufgrund der Stetigkeit von Λ_N^π und der daraus resultierenden Stetigkeit von $I_N f$ natürlich $I_N f \in L_1(\mathbb{T})$ folgt. Diese Frage wird im nächsten Lemma behandelt.

Lemma 1.16 Sei $f : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ stetig. Sei $N \in \mathbb{N}$ und I_N wie in Definition 1.12. Dann gilt für die Fourierkoeffizienten $c_k(I_N f)$, $k \in \mathbb{Z}$ folgende Beziehung:

$$c_k(I_N f) = c_k(\Lambda_N^\pi) \sum_{\ell \in J_N} f(x_\ell) e^{-ikx_\ell}. \tag{1.8.3}$$

Gilt zusätzlich $f \in \mathcal{A}(\mathbb{T})$, dann ergibt sich sogar:

$$c_k(I_N f) = N c_k(\Lambda_N^\pi) \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} c_{k+\ell N}(f). \tag{1.8.4}$$

Beweis Mit der Definition von $I_N f$ und der Linearität der c_k für $k \in \mathbb{Z}$ kann man folgendes ableiten:

$$\begin{aligned} c_k(I_N f) &= c_k\left(\sum_{\ell \in J_N} f(x_\ell)\Lambda_N^\pi(\cdot - x_\ell)\right) \\ &= \sum_{l \in J_N} f(x_\ell) c_k(\Lambda_N^\pi(\cdot - x_\ell)) \\ &= c_k(\Lambda_N^\pi) \sum_{\ell \in J_N} f(x_\ell) e^{-ikx_\ell}. \end{aligned}$$

(1.8.4) ergibt sich, indem man ausnutzt, dass $f(x) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} c_m(f) e^{imx}$ für Funktionen aus $\mathcal{A}(\mathbb{T})$ gilt. Ersetzt man also in (1.8.3) $f(x_\ell)$ durch $\sum_{m \in \mathbb{Z}} c_m(f) e^{i\frac{2\pi m}{N}\ell}$, so erhält man nach einigen Umformungsschritten (1.8.4).

Für nachfolgende Untersuchungen ist es wichtig, zu sichern dass $I_N f \in \mathcal{A}(\mathbb{T})$ für $f \in \mathcal{A}(\mathbb{T})$ gilt. Darüber macht das folgende Lemma eine Aussage:

Lemma 1.17 Sei $N \in \mathbb{N}$, $\Lambda_N^\pi \in \mathcal{A}(\mathbb{T})$ und $f \in \mathcal{A}(\mathbb{T})$. Dann gilt für den zugehörigen Interpolationsoperator

$$\|I_N f|\mathcal{A}(\mathbb{T})\| \leq N\|\Lambda_N^\pi|\mathcal{A}(\mathbb{T})\| \, \|f|\mathcal{A}(\mathbb{T})\|, \quad \text{d.h.}$$

$I_N f$ bleibt im Raum $\mathcal{A}(\mathbb{T})$.

Beweis Sei $f \in \mathcal{A}(\mathbb{T})$. Zu zeigen ist: $\|I_N f|\mathcal{A}(\mathbb{T})\| < \infty$.
Es gilt:

$$\begin{aligned} \sum_{\mathrm{k} \in \mathbb{Z}} |\mathrm{c_k}(\mathrm{I_N f})| &\underset{(1.8.4)}{=} N \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left| c_k(\Lambda_N^\pi) \sum_{l \in \mathbb{Z}} c_{k+lN}(f) \right| \\ &\leq N \sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_k(\Lambda_N^\pi)| \underbrace{\sum_{l \in \mathbb{Z}} |c_{k+lN}(f)|}_{\leq \|f|\mathcal{A}(\mathbb{T})\|} \\ &\leq N\|f|\mathcal{A}(\mathbb{T})\| \sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_k(\Lambda_N^\pi)| < \infty \\ &\leq N\|\Lambda_N^\pi|\mathcal{A}(\mathbb{T})\| \, \|f|\mathcal{A}(\mathbb{T})\|. \end{aligned}$$

1.9 Zur Konstruktion von Fundamentalinterpolanten

Anschliessend soll die Frage nach der Konstruktion von Funktionen Λ_N^π beantwortet werden. Es wird im Folgenden ein Konstruktionsverfahren angegeben, das als Ausgangspunkt nichts weiter als eine Funktion $\Lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit bestimmten, aber leicht zu realisierenden, Eigenschaften hat.

Nachfolgend sei $\Lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit den beiden Eigenschaften:

(E1) $\Lambda(2\pi k) = \delta_{0\,k}$ und

(E2) $\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\Lambda(x + 2\pi k)|$ konvergiert gleichmässig auf $[0, 2\pi]$.

Eigenschaft (E2) sichert, dass $G(x) := \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\Lambda(x + 2\pi k)|$, $x \in [0, 2\pi]$ existiert und eine stetige Funktion auf $[0, 2\pi]$ ist. Von (E2) wird auch die Konvergenz von $\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\Lambda(x + 2\pi k)|$ auf ganz $\mathbb{R}$

gesichert, das ist aber i.a. keine gleichmässige Konvergenz:
Sei $y \in \mathbb{R}$, dann ist $x = y - 2\pi l \in [0, 2\pi]$ für ein $l \in \mathbb{Z}$. Damit folgt:

$$\begin{aligned}\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\Lambda(x+2\pi k)| &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\Lambda(\underbrace{x+2\pi l}_{y}+2\pi(k-l)| \\ &= \sum_{u\in\mathbb{Z}} |\Lambda(y+2\pi u)|.\end{aligned}$$

Aus dieser Rechnung geht sofort hervor, dass $G(x) := \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\Lambda(x + 2\pi k)|$ mit $x \in \mathbb{R}$ eine 2π - periodische stetige Funktion ist.

Lemma 1.18 Sei $\Lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, die (E2) erfüllt. Dann ist $\Lambda \in L_1(\mathbb{R})$.

Beweis Es ist zu zeigen, dass $\int_{\mathbb{R}} |\Lambda(x)|\, dx < \infty$ gilt. Es gilt folgende Gleichungskette:

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} |\Lambda(x)|\, dx \underset{\text{(B. Levi)}}{=} & \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_{2\pi k}^{2\pi(k+1)} |\Lambda(x)|dx \\ = & \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_0^{2\pi} |\Lambda(x+2\pi k)|dx. \qquad (1.9.1)\end{aligned}$$

Erneute Anwendung des Satzes von B. Levi bringt:

$$\begin{aligned}(1.9.1) &= \int_0^{2\pi} \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\Lambda(x+2\pi k)|dx \\ &= \int_0^{2\pi} G(x)dx \\ &\underset{\text{(Stetigkeit von G(x))}}{<} \infty\end{aligned}$$

Das letzte Lemma sichert, dass die Fouriertransformierte $\mathcal{F}\Lambda$ von Λ existiert und in $C(\mathbb{R})$ ist (Satz 1.1 Riemann-Lebesgue).

Lemma 1.19 Sei Λ eine stetige Funktion, die (E1) und (E2) erfüllt. Dann ist folgendes äquivalent:

(i) $\forall x \in \mathbb{T}$ gilt $\sum_{l=-\infty}^{\infty} \Lambda(x - 2\pi l) = 1$ und

(ii) $\forall k \in \mathbb{Z}$ gilt $\mathcal{F}\Lambda(k) = \sqrt{2\pi}\delta_{0\,k}$.

Man beweist diese Aussage mit dergleichen Technik, die im Beweis des Lemmas 1.18 angewandt wurde.

Lemma 1.20 Sei $\Lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, die (E2) erfüllt und sei $N \in \mathbb{N}$. Dann konvergiert auch $\sum_{l\in\mathbb{Z}} |\Lambda(Nx + 2l\pi)|$ gleichmässig in $[0, 2\pi]$.

Beweis Sei $x \in [0, 2\pi]$, dann existiert ein $k(x) \in \{0, ..., N\}$, so dass $y(x) = Nx - 2\pi k(x) \in [0, 2\pi]$ gilt. Wir betrachten jetzt die Partialsummenfolge

$$\begin{aligned}S_{mn}(x) := \sum_{l=-m}^{n} |\Lambda(Nx + 2l\pi)| &= \sum_{l=-m}^{n} |\Lambda(y(x) + 2(k(x) + l)\pi)| \\ &= \sum_{u=-m+k(x)}^{n+k(x)} |\Lambda(y(x) + 2u\pi)|.\end{aligned}$$

Wegen (E2) gilt für $\varepsilon > 0$

$$\left| \sum_{u=-m+k(x)}^{n+k(x)} |\Lambda(y(x)+2u\pi)| - G(y(x)) \right| < \varepsilon \tag{1.9.2}$$

für $m - k(x), n + k(x) > n(\varepsilon)$, wobei das $n(\varepsilon)$ nicht von $y(x)$ bzw. von x abhängt. Damit gilt (1.9.2) für $m, n > N + n(\varepsilon)$.
Also konvergiert $S_{mn}(x)$ gleichmässig in $x \in [0, 2\pi]$ für $m, n \to \infty$.

Folgerung 3 Die Reihe

$$\sum_{l\in\mathbb{Z}} |\Lambda(Nx + 2\pi lN)|$$

konvergiert gleichmässig auf $[0, 2\pi]$. Es sei nochmal verdeutlicht, dass der Unterschied zur Aussage im Lemma 1.20 im zweiten Summanden des Argumentes der Funktion Λ besteht.

Beweis Konvergiert eine Reihe stetiger Funktionen gleichmässig, so konvergiert auch jede Teilreihe gleichmässig. Die Funktion

$$\Lambda_N(x) := \sum_{l\in\mathbb{Z}} \Lambda(Nx + 2\pi lN)$$

ist damit eine stetige Funktion auf $[0, 2\pi]$. Mit denselben Argumenten wie für die Funktion $G(x)$ kann man $\Lambda_N(x)$ auf $\mathbb{R}$ erweitern. Diese Funktion ist dann natürlich auch 2π - periodisch und damit eine stetige Funkion auf $\mathbb{R}$. Wir bezeichnen sie mit $\Lambda_N^\pi(x)$.

Satz 1.9 Sei $\Lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine 2π-periodische Funktion, die (E1) und (E2) erfüllt und $N \in \mathbb{N}$. Dann ist die auf $\mathbb{R}$ stetige 2π - periodische Funktion (siehe Folgerung 3)

$$\Lambda_N^\pi(x) := \sum_{u\in\mathbb{Z}} \Lambda(Nx + 2\pi uN)$$

ein Fundamentalinterpolant, d.h.

$$\Lambda_N^\pi\left(\frac{2k\pi}{N}\right) = \delta_{0,k}\,, \quad \text{für } k \in J_N \tag{1.9.3}$$

und es gilt für $\ell \in \mathbb{Z}$:

$$c_\ell(\Lambda_N^\pi) = \frac{1}{N\sqrt{2\pi}} \mathcal{F}\Lambda\left(\frac{\ell}{N}\right). \tag{1.9.4}$$

Beweis Die Eigenschaft (1.9.3) rechnet man leicht nach. Sei $k \in J_N$.

$$\Lambda_N^\pi\left(\frac{2\pi k}{N}\right) = \sum_{u\in\mathbb{Z}} \Lambda(2\pi(k + uN)).$$

Damit ist $\Lambda_N^\pi(0) = \sum\limits_{u\in\mathbb{Z}} \Lambda(2\pi uN) = 1$ wegen (E1).
Sei jetzt $0 \neq k \in J_N$. Wegen $J_N \subset [-N/2, N/2]$ folgt $k + uN \neq 0$ für alle $u \in \mathbb{Z}$. Damit ist $\Lambda(2\pi(k + uN)) = 0$ für alle $u \in \mathbb{Z}$ (siehe (E1)). Also ist $\Lambda_N^\pi(\frac{2\pi k}{N}) = 0$.

Die Fourierkoeffizienten $c_\ell(\Lambda_N^\pi)$ für ein $\ell \in \mathbb{Z}$ berechnen sich folgendermassen:

$$c_\ell(\Lambda_N^\pi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{u\in\mathbb{Z}} \Lambda(Nx + 2\pi uN) e^{-i\ell x} dx.$$

Aufgrund der gleichmässigen Konvergenz der Reihe im Integranden ist Summe und Integral vertauschbar. Damit folgt:

$$\begin{aligned}
c_\ell(\Lambda_N^\pi) &= \frac{1}{2\pi}\sum_{u\in\mathbb{Z}}\int_0^{2\pi}\Lambda(N(x+2\pi u))e^{-i\ell x}dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\sum_{u\in\mathbb{Z}}\int_{2\pi u}^{2\pi(u+1)}\Lambda(Ny)e^{-i\ell(y-2\pi u)}dy \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\Lambda(Ny)e^{-i\ell y}dy \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\Lambda(z)e^{-i\frac{\ell}{N}z}\frac{dz}{N} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}N}\mathcal{F}\Lambda\left(\frac{\ell}{N}\right).
\end{aligned}$$

1.10 Fehlerabschätzungen in der L_p-Norm, erste Resultate

Ziel dieses Abschnittes ist es, Fehlerabschätzungen für den oben eingeführten Approximationsprozess $I_N f$ zu beweisen. Wir beschränken uns hierbei auf die Approximation von Funktionen aus der Klasse $B^s_{p,\infty}(\mathbb{T})\cap\mathcal{A}(\mathbb{T})$ mit $s>0$ und $1\le p\le\infty$.
Wir bezeichnen mit $\Psi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ eine $C_0^\infty(\mathbb{R})$-Funktion mit der Eigenschaft:

$$\Psi(x)=\begin{cases}1 & : \ |x|\le 1\\ 0 & : \ |x|>2\end{cases} \quad \text{dar.} \tag{1.10.1}$$

Das Hauptresultat des ersten Kapitels ist der folgende Satz:

Satz 1.10 Sei $\Lambda:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ eine stetige Funktion, welche die Eigenschaften (E1) und (E2) erfüllt. Es gelte für alle $N\in\mathbb{N}$:

$$\Lambda_N^\pi\in\mathcal{A}(\mathbb{T}), \tag{1.10.2}$$

wobei die Λ_N^π die zu Λ gehörenden Fundamentalinterpolanten (siehe Satz 1.9) sind. Weiter gelte für $k\in\mathbb{Z}$:

$$\mathcal{F}\Lambda(k)=\sqrt{2\pi}\delta_{0\,k}. \tag{1.10.3}$$

(gleichwertig dazu: $\sum_{l=-\infty}^{\infty}\Lambda(x-2\pi l)=1,\ \forall x\in\mathbb{T}$ (siehe Lemma 1.19))
Für die Zahlen $0\le\beta<\alpha$ erfülle die Fouriertransformierte von Λ folgende Forderungen:

(F1) Die Funktionen

$$A(\xi) := \Psi\left(\frac{\xi}{2}\right)|\xi|^{-\alpha}\left(1-\frac{\mathcal{F}\Lambda(\xi)}{\sqrt{2\pi}}\right), \tag{1.10.4}$$

$$B_l(\xi) := \Psi\left(\frac{\xi}{2}\right)|\xi|^{-\alpha}\mathcal{F}\Lambda(\xi+l) \quad , \quad \text{für } l\in\mathbb{Z}\setminus\{0\} \tag{1.10.5}$$

gehören zu $L_1(\mathbb{R})$,

(F2)

$$\int_{\mathbb{R}}|\mathcal{F}^{-1}A(w)|dw<\infty, \tag{1.10.6}$$

(F3)

$$\sum_{l\neq 0}\int_{\mathbb{R}} |\mathcal{F}^{-1}B_l(w)|dw < \infty \quad \text{und} \tag{1.10.7}$$

(F4) die Funktionen

$$C_l(\xi) := (1-\Psi(2\xi))|\xi|^{-\beta}\mathcal{F}\Lambda(\xi - l) \quad , \quad \text{für } l \in \mathbb{Z} \tag{1.10.8}$$

gehören zu $L_1(\mathbb{R})$,

(F5)

$$\sum_{l\in\mathbb{Z}}\int_{\mathbb{R}} |\mathcal{F}^{-1}C_l(w)|dw < \infty. \tag{1.10.9}$$

Seien I_N die zu Λ bzw Λ_N^π gehörenden Interpolationsoperatoren (siehe Definition 1.12). Sei weiter $\beta < s < \alpha$ und $1 \leq p \leq \infty$.

Dann existiert eine Zahl $C(s,p) > 0$, so dass für alle $f \in B^s_{p,\infty}(\mathbb{T}) \cap \mathcal{A}(\mathbb{T})$ und alle $N \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\|f - I_N f|L_p(\mathbb{T})\| \leq CN^{-s}\|f|B^s_{p,\infty}(\mathbb{T})\|. \tag{1.10.10}$$

Bemerkung 1.8

(i) Wegen der L_1-Zugehörigkeit der Funkionen $\mathcal{F}^{-1}A(w)$, $\mathcal{F}^{-1}B_l(w)$ und (siehe (1.10.6) und (1.10.7)) folgt aus Lemma 1.4, dass die Funktionen $A(\xi), B_l(\xi)$ und $C_l(\xi)$ stetig sein müssen. Die Stetigkeit von $A(\xi)$, oder besser: die Tatsache, dass es in der Äquivalenzklasse von $A(\xi)$ einen stetigen Vertreter gibt, zieht nach sich, dass $\mathcal{F}\Lambda(0) = \sqrt{2\pi}$ gelten muss. Die Stetigkeit (mit Interpretation) der Funktionen $B_l(\xi)$ zieht nach sich, dass $\mathcal{F}\Lambda(l) = 0$ für alle $l \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$ gelten muss. Die Voraussetzung (1.10.3) ist damit eigentlich redundant.

(ii) Mit (F1) ... (F5) wird ein bestimmtes Verhalten von $\mathcal{F}\Lambda$ lokal sowie global in den Gitterpunkten $l \in \mathbb{Z}$ gefordert. Diese Forderungen sind z.B. mit den Strang-Fix-Bedingungen realisiert.

Wir zerlegen den Beweis von Satz 1.10 in zwei Lemmatas.

Lemma 1.21 Sei $\Lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion, die (E1), (E2), (1.10.2), (1.10.3), (F1), (F2) und (F3) erfüllt. Sei $0 < s < \alpha$ und $1 \leq p \leq \infty$. Dann existiert eine Konstante $C(s,p) > 0$, so dass für alle $N \in \mathbb{N}$ und für alle $f \in T_{2N-1}$

$$\|f - I_N f|L_p(\mathbb{T})\| \leq CN^{-s}\|f|B^s_{p,\infty}(\mathbb{T})\| \tag{1.10.11}$$

gilt.

Beweis Sei $N \in \mathbb{N}$ und $f \in T_{2N-1} \subset \mathcal{A}(\mathbb{T})$. Wegen (1.10.2) und Lemma 1.17 ist $I_N f \in \mathcal{A}(\mathbb{T})$. Damit gilt im Sinne der gleichmässigen Konvergenz:

$$f(x) - I_N f(x) = \sum_{m\in\mathbb{Z}}\left(c_m(f) - Nc_m(\Lambda_N^\pi)\sum_{l\in\mathbb{Z}} c_{m+lN}(f)\right)e^{imx}. \tag{1.10.12}$$

Ersetzt man in (1.10.12) $c_m(\Lambda_N^\pi)$ mittels Satz 1.9, so erhält man:

$$\begin{aligned}
f(x) - I_N f(x) &= \sum_{m\in\mathbb{Z}} \left(c_m(f) - N\frac{1}{N\sqrt{2\pi}}\mathcal{F}\Lambda\left(\frac{m}{N}\right)\sum_{l\in\mathbb{Z}} c_{m+lN}(f)\right) e^{imx} \\
&= \sum_{m\in\mathbb{Z}} \left[c_m(f) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(c_m(f)\mathcal{F}\Lambda\left(\frac{m}{N}\right) + \mathcal{F}\Lambda\left(\frac{m}{N}\right)\sum_{l\neq 0} c_{m+lN}(f)\right)\right] e^{imx} \\
&= \sum_{m\in\mathbb{Z}} c_m(f)\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathcal{F}\Lambda\left(\frac{m}{N}\right)\right) e^{imx} \\
&\quad - \sum_{m\in\mathbb{Z}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathcal{F}\Lambda\left(\frac{m}{N}\right)\sum_{l\neq 0} c_{m+lN}(f) e^{imx}.
\end{aligned}$$

In der ersten Summe kann aufgrund von (1.10.3) ohne $m = 0$ summiert werden. Man erhält:

$$f(x) - I_N f(x) = F_1(x) - F_2(x),$$

mit

$$F_1(x) := \sum_{m\neq 0} c_m(f)\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathcal{F}\Lambda\left(\frac{m}{N}\right)\right) e^{imx} \quad \text{und} \tag{1.10.13}$$

$$F_2(x) := \sum_{m\in\mathbb{Z}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathcal{F}\Lambda\left(\frac{m}{N}\right)\sum_{l\neq 0} c_{m+lN}(f) e^{imx}. \tag{1.10.14}$$

Geht man jetzt zur Norm über, so ergibt sich:

$$\|f(x) - I_N f(x)|L_p(\mathbb{T})\| \leq \|F_1|L_p(\mathbb{T})\| + \|F_2|L_p(\mathbb{T})\|.$$

Wir nehmen uns nun der Summanden auf der rechten Seite an. $F_1(x)$ lässt sich folgendermassen umschreiben:

$$F_1(x) = \sum_{m\neq 0} c_m(f)|m|^\alpha M(m) e^{imx}$$

mit

$$M(\xi) := \Psi\left(\frac{\xi}{2N}\right)|\xi|^{-\alpha}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathcal{F}\Lambda(\xi)\right).$$

Der ergänzte Term $\Psi\left(\frac{m}{2N}\right)$ ändert nichts, da mit f auch F_1 ein trigonometrisches Polynom der Ordnung $2N-1$ und $\Psi\left(\frac{m}{2N}\right) = 1$ für $|m| \leq 2N-1$ ist.
Wir wollen jetzt Lemma 1.6 auf $F_1(x)$ anwenden. Dazu ist zu zeigen, dass

(i) $M \in L_1(\mathbb{R})$ und

(ii) $\mathcal{F}^{-1}M \in L_1(\mathbb{R})$ gilt.

Punkt (i) folgt sofort, wenn man in $\int_{\mathbb{R}} |M(\xi)|d\xi$ die Substitution $\eta = \xi/N$ durchführt. Man erhält dann im wesentlichen das Integral über den Betrag von $A(\xi)$, welches nach Voraussetzung existiert. Um (ii) zu zeigen, beschafft man sich als erstes $\mathcal{F}^{-1}M$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}^{-1}M(y) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} \Psi\left(\frac{\xi}{2N}\right)|\xi|^{-\alpha}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathcal{F}\Lambda\left(\frac{\xi}{N}\right)\right) e^{i\xi y}\, d\xi \\
{\scriptstyle (\eta = \xi/N)} &= N^{-\alpha}N\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} \Psi\left(\frac{\eta}{2}\right)|\eta|^{-\alpha}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathcal{F}\Lambda(\eta)\right) e^{i\eta(Ny)} d\eta \\
&= N^{-\alpha}N(\mathcal{F}^{-1}A)(Ny)
\end{aligned}$$

Also gilt wegen (F3):

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} |\mathcal{F}^{-1}M(y)|dy &= N^{-\alpha}N\int_{\mathbb{R}} |(\mathcal{F}^{-1}A)(Ny)|dy \\
&\underset{(w=Ny)}{=} N^{-\alpha}\int_{\mathbb{R}} |(\mathcal{F}^{-1}A)(w)|dw \\
&= N^{-\alpha}C \qquad (1.10.15)\\
&< \infty.
\end{aligned}$$

Lemma 1.6 kann damit auf das trigonometrische Polynom F_1 angewendet werden. Es ergibt sich:

$$F_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}^{-1}M(y)\sum_{m\neq 0} c_m(f)|m|^\alpha e^{im(x-y)}dy$$

und damit

$$\|F_1(x)|L_p(\mathbb{T})\| \leq \left\| \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}^{-1}M(y)\sum_{m\neq 0} c_m(f)|m|^\alpha e^{im(x-y)}dy \,\middle|\, L_p(\mathbb{T})\right\|.$$

An dieser Stelle hilft wieder Folgerung 1 weiter. Damit folgt:

$$\begin{aligned}
\|F_1(x)|L_p(\mathbb{T})\| &\leq \left\|\sum_{m\neq 0} c_m(f)|m|^\alpha e^{imx}\,\middle|\, L_p(\mathbb{T})\right\| \int_{\mathbb{R}} |\mathcal{F}^{-1}M(y)|dy \\
&\underset{(1.10.15)}{\leq} CN^{-\alpha}\left\|\sum_{m\neq 0} c_m(f)|m|^\alpha e^{imx}\,\middle|\, L_p(\mathbb{T})\right\|. \qquad (1.10.16)
\end{aligned}$$

Analog verfährt man mit $F_2(x)$. Die iterierte Reihe in (1.10.14) ist absolut konvergent, denn:

$$\begin{aligned}
\sum_{m\in\mathbb{Z}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left|\mathcal{F}\Lambda\left(\frac{m}{N}\right)\right| \underbrace{\sum_{l\neq 0}|c_{m+lN}(f)|}_{=:c<\infty} &\leq c\sum_{m\in\mathbb{Z}}\left|\mathcal{F}\Lambda\left(\frac{m}{N}\right)\right| \qquad (1.10.17)\\
&< \infty,
\end{aligned}$$

da $\Lambda_N^\pi \in \mathcal{A}(\mathbb{T})$ nach Voraussetzung gilt und man in (1.10.17) im wesentlichen die Beträge der Fourierkoeffizienten von Λ_N^π aufsummiert. Die Summation ist demzufolge wegen des CAUCHY schen Doppelreihensatzes vertauschbar, also:

$$F_2(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{l\neq 0}\sum_{m\in\mathbb{Z}} \mathcal{F}\Lambda\left(\frac{m}{N}\right) c_{m+lN}(f)e^{imx}.$$

Wir gehen zur $L_p(\mathbb{T})$-Norm über und erhalten:

$$\begin{aligned}
\|F_2|L_p(\mathbb{T})\| &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left\|\sum_{l\neq 0}\sum_{m\in\mathbb{Z}} \mathcal{F}\Lambda\left(\frac{m}{N}\right) c_{m+lN}(f)e^{imx}\,\middle|\, L_p(\mathbb{T})\right\| \\
&\underset{(\triangle\text{-Ungleichung})}{\leq} \sum_{l\neq 0}\left\|\sum_{m\in\mathbb{Z}} \mathcal{F}\Lambda\left(\frac{m}{N}\right) c_{m+lN}(f)e^{imx}\,\middle|\, L_p(\mathbb{T})\right\|
\end{aligned}$$

Die L_p-Norm einer Funktion ist invariant gegenüber Multiplikation mit Funktionen, deren Betrag 1 ist. Es kann also in der Norm problemlos mit e^{ilNx} multipliziert werden. Weiterhin multiplizieren wir noch mit $\Psi\left(\frac{m+lN}{2N}\right)$. Wie oben ändert sich nichts, da $f \in T_{2N-1}$ gilt. Wir haben also:

$$\|F_2(x)|L_p(\mathbb{T})\| \leq \sum_{l\neq 0}\left\|\sum_{m\in\mathbb{Z}} \mathcal{F}\Lambda\left(\frac{m}{N}\right) c_{m+lN}(f)\Psi\left(\frac{m+lN}{2N}\right) e^{i(m+lN)x}\,\middle|\, L_p(\mathbb{T})\right\|. \qquad (1.10.18)$$

Ist $m + lN = 0$ für $l \neq 0$, so ist $0 \neq m = -lN$ und wegen (1.10.3) $\mathcal{F}\Lambda\left(\frac{m}{N}\right) = 0$. Demnach kann man (1.10.18) auch schreiben als:

$$\|F_2(x)|L_p(\mathbb{T})\| \leq \sum_{l\neq 0} \left\| \sum_{m\in\mathbb{Z},\, m+lN\neq 0} M_l(m)|m+lN|^\alpha c_{m+lN}(f) e^{i(m+lN)x} \middle| L_p(\mathbb{T}) \right\|, \qquad (1.10.19)$$

mit

$$M_l(\xi) = \mathcal{F}\Lambda\left(\frac{\xi}{N}\right)|\xi + lN|^{-\alpha}\Psi\left(\frac{\xi+lN}{2N}\right).$$

Als nächstes wenden wir wieder Lemma 1.6 an. Dazu ist die Zugehörigkeit der M_l zu $L_1(\mathbb{T})$ zu prüfen. Mit einer offensichtlichen Substitution bringt man $\int_{\mathbb{R}} |M_l(\xi)|d\xi$ im wesentlichen auf $\int_{\mathbb{R}} |B_l(\xi)|d\xi$, was nach (F3) existiert. Analog zu (1.10.15) erhält man hier:

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} |\mathcal{F}^{-1}M_l(y)|dy &= N^{-\alpha}N\int_{\mathbb{R}} |\mathcal{F}^{-1}B_l(Ny)|dy \\ &= N^{-\alpha}\int_{\mathbb{R}} |\mathcal{F}^{-1}B_l(w)|dw \qquad (1.10.20)\\ &< \infty.\end{aligned}$$

Lemma 1.6 kann also auf das trigonometrische Polynom

$$\sum_{m\in\mathbb{Z},\, m+lN\neq 0} M_l(m)|m+lN|^\alpha c_{m+lN}(f)e^{i(m+lN)x}$$

in (1.10.19) angewendet werden. Damit erhalten wir:

$$\begin{aligned}\|F_2(x)|L_p(\mathbb{T})\| &\leq \sum_{l\neq 0}\left\| \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}^{-1}M_l(y)\sum_{m\in\mathbb{Z}}|m+lN|^\alpha c_{m+lN}(f)e^{i(m+lN)(x-y)}dy \middle| L_p(\mathbb{T})\right\| \\ \overset{\text{(Folgerung 1)}}&{\leq} \sum_{l\neq 0}\int_{\mathbb{R}} |\mathcal{F}^{-1}M_l(y)| \left\| \sum_{m\in\mathbb{Z}} |m+lN|^\alpha c_{m+lN}(f)e^{i(m+lN)x}\middle| L_p(\mathbb{T})\right\| dy.\end{aligned}$$

Das trigonometrische Polynom in der $L_p(\mathbb{T})$ - Norm ist unabhängig von der Summation. Das ergibt:

$$\begin{aligned}\|F_2(x)|L_p(\mathbb{T})\| &\leq \left\|\sum_{m\in\mathbb{Z}}|m|^\alpha c_m(f)e^{imx}\middle| L_p(\mathbb{T})\right\| \sum_{l\neq 0}\underbrace{\int_{\mathbb{R}}|\mathcal{F}^{-1}M_l(y)|dy}_{\leq N^{-\alpha}\int_{\mathbb{R}}|\mathcal{F}^{-1}B_l(w)|dw} \\ \overset{(1.10.20)}&{\leq} N^{-\alpha}\left\|\sum_{m\in\mathbb{Z}}|m|^\alpha c_m(f)e^{imx}\middle| L_p(\mathbb{T})\right\|\sum_{l\neq 0}\int_{\mathbb{R}}|\mathcal{F}^{-1}B_l(w)|dw.\end{aligned}$$

Mit (F3) folgt damit

$$\|F_2(x)|L_p(\mathbb{T})\| \leq N^{-\alpha}C\left\|\sum_{m\in\mathbb{Z}}|m|^\alpha c_m(f)e^{imx}\middle| L_p(\mathbb{T})\right\|. \qquad (1.10.21)$$

Bleibt nur noch

$$\left\|\sum_{m\in\mathbb{Z}}|m|^\alpha c_m(f)e^{imx}\middle| L_p(\mathbb{T})\right\| \qquad (1.10.22)$$

zu untersuchen.
Eine Funktion $g \in T_{2N-1}$ besitzt die Darstellung:

$$g(x) = \sum_{|k|\leq 2N-1} c_m(g)e^{imx}$$

Wir nutzen jetzt die Struktur der in Definition 1.5 eingeführten DE LA VALEE POUSSIN-Kerne aus. Es gelte $2^{r-1} \leq 2N-1 < 2^r$. Dann folgt mit (1.5.12) die Gleichung:

$$g = V_{2^{r+1}-1}g.$$

Mittels einer Teleskopsumme erhält man die Darstellung:

$$g = \sum_{l=1}^{r}(V_{2^{l+1}-1}g - V_{2^l-1}g) + V_1(g).$$

Formel (1.5.11) lässt nun eine Aussage darüber zu, welche Frequenzen in den trigonometrischen Polynomen $V_{2^{l+1}-1}g - V_{2^l-1}g$ für $l = 1...r$ vorkommen.
Es folgt sofort, dass für $|m| \leq 2^{l-1}$ gilt:

$$c_m(V_{2^{l+1}-1}g - V_{2^l-1}g) = 0.$$

Damit findet man folgende Darstellung mit Zahlen $v_m^l \in \mathbb{R}$ (diese ergeben sich aus (1.5.11)):

$$V_{2^{l+1}-1}g - V_{2^l-1}g = \sum_{2^{l-1}<|m|\leq 2^{l+1}} v_m^l c_m(g)e^{imx}.$$

Insgesamt erhält man:

$$g(x) = \sum_{l=1}^{r} \sum_{2^{l-1}<|m|\leq 2^{l+1}} v_m^l c_m(g)e^{imx} + V_1 g. \tag{1.10.23}$$

Dieses Resultat wenden wir jetzt auf die uns interessierende Funktion (siehe (1.10.22))

$$\tilde{f}(x) = \sum_{|m|\leq 2N-1} |m|^\alpha c_m(f)e^{imx} \quad \text{an.}$$

Davon interessiert uns die $L_p(\mathbb{T})$-Norm. Mit der Dreiecksungleichung und der Tatsache, dass $V_1\tilde{f} = V_1 f$ gilt, folgt die Ungleichung:

$$\|\tilde{f}|L_p(\mathbb{T})\| \leq \sum_{l=1}^{r}\left\|\sum_{2^{l-1}<|m|\leq 2^{l+1}} v_m^l c_m(f)|m|^\alpha e^{imx}\right| L_p(\mathbb{T})\Bigg\| + \|V_1 f|L_p(\mathbb{T})\|.$$

Wir kommen jetzt zur Anwendung des Satzes 1.2 auf den Ausdruck in der Norm. Ziel soll es sein, das Gewicht $|m|^\alpha$ zu Lasten einer Konstanten unabhängig von l und von N (d.h. unabhängig von r) zu entfernen. Im Satz 1.2 ist die dort mit d_Λ bezeichnete Grösse von Interesse. Man sieht leicht, dass

$$\max\{k - m : 2^{l-1} < |k| < 2^{l+1},\, 2^{l-1} < |m| < 2^{l+1}\} = 2^{l+2}$$

gilt. Jetzt gilt:

$$\begin{aligned}
\|\tilde{f}|L_p(\mathbb{T})\| &\leq \sum_{l=1}^{r}\left\|\sum_{2^{l-1}<|m|\leq 2^{l+1}} v_m^l c_m(f)|m|^\alpha e^{imx}\right| L_p(\mathbb{T})\Bigg\| + \|V_1 f|L_p(\mathbb{T})\| \\
&= \sum_{l=1}^{r}\left\|\sum_{2^{l-1}<|m|\leq 2^{l+1}} v_m^l c_m(f)2^{\alpha(l+2)}\left|\frac{m}{2^{l+2}}\right|^\alpha e^{imx}\right| L_p(\mathbb{T})\Bigg\| + \|V_1 f|L_p(\mathbb{T})\| \\
&= \sum_{l=1}^{r} 2^{\alpha(l+2)}\left\|\sum_{2^{l-1}<|m|\leq 2^{l+1}} v_m^l c_m(f)P_l(m)e^{imx}\right| L_p(\mathbb{T})\Bigg\| + \|V_1 f|L_p(\mathbb{T})\|,
\end{aligned}$$

wobei

$$P_l(x) = \left(\frac{|x|}{2^{l+2}}\right)^\alpha \chi\left(\frac{x}{2^{l+1}}\right) \tag{1.10.24}$$

und $\chi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine $C_0^\infty(\mathbb{R})$-Funktion mit der Eigenschaft

$$\chi(x) = \begin{cases} 0 & : \quad |x| \le \frac{1}{8} \\ 1 & : \quad \frac{1}{4} \le |x| \le 1 \\ 0 & : \quad |x| > 2 \end{cases} \qquad \text{ist.}$$

Für $2^{l-1} < |m| \le 2^{l+1}$ und damit $\frac{1}{4} < \left|\frac{m}{2^{l+1}}\right| \le 1$ gilt nämlich

$$P_l(m) = \left(\frac{|m|}{2^{l+2}}\right)^\alpha \chi\left(\frac{m}{2^{l+1}}\right) = \left(\frac{|m|}{2^{l+2}}\right)^\alpha .$$

Mit (1.10.24) ist sichergestellt, dass $P_l \in C_0^\infty(\mathbb{R}) \subset W_2^1(\mathbb{R})$ für alle $l \in \mathbb{N}$ gilt. Erst jetzt wendet man Satz 1.2 an und erhält:

$$\begin{aligned}
\|\tilde{f}|L_p(\mathbb{T})\| &\le \sum_{l=1}^r 2^{\alpha(l+2)} c \|P_l(2^{l+2}\cdot)|W_2^1(\mathbb{R})\| \cdot \left\| \sum_{2^{l-1}<|m|\le 2^{l+1}} v_m^l c_m(f) e^{imx} \middle| L_p(\mathbb{T}) \right\| \\
&\quad + \|V_1 f|L_p(\mathbb{T})\| \\
\overset{(1.10.23)}{} &= \sum_{l=1}^r 2^{\alpha(l+2)} c \|P_l(2^{l+2}\cdot)|W_2^1(\mathbb{R})\| \cdot \|V_{2^{l+1}-1} f - V_{2^l-1} f|L_p(\mathbb{T})\| + \|V_1 f|L_p(\mathbb{T})\| \\
\overset{(P(x)=|x|^\alpha\chi(2x))}{} &= \sum_{l=1}^r 2^{\alpha(l+2)} c \underbrace{\|P|W_2^1(\mathbb{R})\|}_{\text{unabh. von l und r}} \cdot \|V_{2^{l+1}-1} f - V_{2^l-1} f|L_p(\mathbb{T})\| + \|V_1 f|L_p(\mathbb{T})\| \\
&\le C \sum_{l=1}^r 2^{\alpha(l+2)} \|V_{2^{l+1}-1} f - V_{2^l-1} f|L_p(\mathbb{T})\| + \|V_1 f|L_p(\mathbb{T})\|.
\end{aligned}$$

Mit der letzten Abschätzung ist man schon fast am Ziel. Man greift jetzt auf die in Satz 1.4 eingeführte Charakterisierung der Nikolskij-Besov-Räume zurück:

$$\|f|B_{p,\infty}^s(\mathbb{T})\|_V = \|f|L_p(\mathbb{T})\| + \sup_{j=0,1,\ldots} 2^{js} \|f - V_{2^{j+1}-1} f|L_p(\mathbb{T})\|.$$

Im folgendem schreiben wir $\|f|B_{p,\infty}^s(\mathbb{T})\|$ anstatt $\|f|B_{p,\infty}^s(\mathbb{T})\|_V$.
Zunächst ist aber die Tatsache aus Satz 1.3 nützlich. Für $l = 1 \ldots r$ gilt nämlich:

$$\begin{aligned}
\|V_{2^{l+1}-1} f - V_{2^l-1} f|L_p(\mathbb{T})\| &\underset{(1.5.12)}{=} \|V_{2^{l+1}-1}(f - V_{2^l-1} f)|L_p(\mathbb{T})\| \\
&\underset{(\text{Satz1.3})}{\le} 3\|f - V_{2^l-1} f|L_p(\mathbb{T})\|.
\end{aligned}$$

Damit ergibt sich ($0 < s < \alpha$):

$$\begin{aligned}
\|\tilde{f}|L_p(\mathbb{T})\| &\le C_2 \sum_{l=1}^r 2^{\alpha(l+2)} 2^{-ls} \underbrace{2^{ls}\|f - V_{2^l-1} f|L_p(\mathbb{T})\|}_{\le c\|f|B_{p,\infty}^s(\mathbb{T})\|} + 3 \underbrace{\|f|L_p(\mathbb{T})\|}_{\le \|f|B_{p,\infty}^s(\mathbb{T})\|} . \\
&\le C_3 \|f|B_{p,\infty}^s(\mathbb{T})\| \sum_{l=1}^r 2^{l(\alpha-s)} + 3\|f|B_{p,\infty}^s(\mathbb{T})\| \\
&\le C_4 \|f|B_{p,\infty}^s(\mathbb{T})\| 2^{(r-1)(\alpha-s)} + 3\|f|B_{p,\infty}^s(\mathbb{T})\| \\
\overset{(2^{r-1}<2N-1))}{} &\le C_4 (2N-1)^{\alpha-s} \|f|B_{p,\infty}^s(\mathbb{T})\| + 3\|f|B_{p,\infty}^s(\mathbb{T})\| \\
&\le C_5 N^{\alpha-s} \|f|B_{p,\infty}^s(\mathbb{T})\| + 3\|f|B_{p,\infty}^s(\mathbb{T})\|.
\end{aligned}$$

Letztendlich folgt mit (1.10.16) und (1.10.21):

$$\begin{aligned}\|F_1|L_p(\mathbb{T})\| + \|F_2|L_p(\mathbb{T})\| &\leq CN^{-\alpha}N^{\alpha-s}\|f|B^s_{p,\infty}(\mathbb{T})\| + CN^{-\alpha}\|f|B^s_{p,\infty}(\mathbb{T})\| \\ {\scriptstyle(\alpha>s)} &\leq CN^{-s}\|f|B^s_{p,\infty}(\mathbb{T})\|\end{aligned}$$

□

Lemma 1.22 Sei $\Lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion, die (E1), (E2), (1.10.2), (1.10.3), (F4), und (F5) erfüllt. Sei $s > \beta$ und $1 \leq p \leq \infty$. Dann existiert eine Konstante $C(s,p) > 0$, so dass für alle $N \in \mathbb{N}$ und für alle $f \in B^s_{p,\infty}(\mathbb{T}) \cap \mathcal{A}(\mathbb{T})$

$$\|I_N(f - V_{2N-1}f)|L_p(\mathbb{T})\| \leq CN^{-s}\|f|B^s_{p,\infty}(\mathbb{T})\| \tag{1.10.25}$$

gilt.

Beweis Sei $N \in \mathbb{N}$ und $f \in B^s_{p,\infty}(\mathbb{T}) \cap \mathcal{A}(\mathbb{T})$ fest. Sei $m \in \mathbb{Z}$. Für den Fourierkoeffizient $c_m(I_N(f - V_{2N-1}f))$ gilt mit Lemma 1.16:

$$\begin{aligned}c_m(I_N(f - V_{2N-1}f)) &= Nc_m(\Lambda^\pi_N)\sum_{l\in\mathbb{Z}} c_{m+lN}(f - V_{2N-1}f) \\ {\scriptstyle(\text{Satz } 1.9)} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathcal{F}\left(\frac{m}{N}\right)\sum_{l\in\mathbb{Z}} c_{m+lN}(f - V_{2N-1}f).\end{aligned}$$

Um an dieser Stelle Lemma 1.16 anwenden zu können, ist die Voraussetzung $f \in \mathcal{A}(\mathbb{T})$ wichtig. Ausserdem muss wegen der Definition der I_Nf (Definition 1.12) die Stetigkeit von f gesichert werden. Diese Forderung könnte man aber auch ohne $\mathcal{A}(\mathbb{T})$ realisieren, indem man zusätzliche Forderungen an s stellt.
Wegen (1.10.2) und Lemma 1.17 ist $I_N(f - V_{2N-1}f) \in \mathcal{A}(\mathbb{T})$. Damit gilt im Sinne der gleichmässigen Konvergenz auf $\mathbb{T}$:

$$I_N(f - V_{2N-1}f)(x) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathcal{F}\left(\frac{m}{N}\right)\sum_{l\in\mathbb{Z}} c_{m+lN}(f - V_{2N-1}f)e^{imx}.$$

Man kann hier wieder ohne weiteres die Summationsreihenfolge vertauschen und erhält (im Sinne der gleichmässigen Konvergenz):

$$I_N(f - V_{2N-1}f)(x) = \sum_{l\in\mathbb{Z}}\sum_{m\in\mathbb{Z}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathcal{F}\left(\frac{m}{N}\right) c_{m+lN}(f - V_{2N-1}f)e^{imx}.$$

Gleichmässige Konvergenz auf $\mathbb{T}$ zieht Konvergenz im $L_p(\mathbb{T})$-Sinne nach sich. Geht man also zur $L_p(\mathbb{T})$-Norm über, so darf man bzgl. des Summationsindex l die Dreiecksungleichung anwenden und man findet:

$$\begin{aligned}&\|I_N(f - V_{2N-1}f)|L_p(\mathbb{T})\| \\ &\leq \sum_{l\in\mathbb{Z}}\left\|\sum_{m\in\mathbb{Z}}\mathcal{F}\left(\frac{m}{N}\right)c_{m+lN}(f - V_{2N-1}f)e^{imx}\middle|L_p(\mathbb{T})\right\| \\ &= \sum_{l\in\mathbb{Z}}\left\|\sum_{m\in\mathbb{Z},m+lN\neq0}\mathcal{F}\left(\frac{m}{N}\right)c_{m+lN}(f - V_{2N-1}f)|m+lN|^\beta|m+lN|^{-\beta}e^{imx}\middle|L_p(\mathbb{T})\right\| \\ &= \sum_{l\in\mathbb{Z}}\left\|\sum_{m\in\mathbb{Z},m+lN\neq0}\mathcal{F}\left(\frac{m}{N}\right)c_{m+lN}(f - V_{2N-1}f)|m+lN|^\beta|m+lN|^{-\beta}e^{i(m+lN)x}\middle|L_p(\mathbb{T})\right\|.\end{aligned}$$

Im letzten Schritt ändert sich die Norm nicht, da mit der Funktion e^{iNlx} multipliziert wurde, welche im Betrag konstant 1 ist. Der letzte Term ändert sich immer noch nicht, wenn wir in der

Norm den Faktor $F = \left(1 - \Psi\left(2\frac{m+lN}{N}\right)\right)$ ergänzen. Ist nämlich $|m + lN| \leq N$, so ist aufgrund von Lemma 1.8 $c_{m+lN}(f - V_{2N-1}f) = 0$ und damit spielt F keine Rolle. Ist hingegen $|m + lN| > N$, so ist $F = 1$ und spielt auch hier keine Rolle. Wir benötigen F, um später die Voraussetzung (F4) und (F5) ausnutzen zu können. Aussserdem kann man den Summanden mit $m + lN = 0$ bei der Summation weglassen, da $c_0(f - V_{2N-1}f) = 0$ ist. Wir führen nun die Funktion

$$M_l(\xi) := \left(1 - \Psi\left(2\frac{\xi + lN}{N}\right)\right) |\xi + lN|^{-\beta} \mathcal{F}\Lambda\left(\frac{\xi}{N}\right)$$

ein und erhalten damit folgendes:

$$\|I_N(f - V_{2N-1}f)|L_p(\mathbb{T})\| \leq \sum_{l\in\mathbb{Z}} \left\| \sum_{m\in\mathbb{Z}, m+lN\neq 0} c_{m+lN}(f - V_{2N-1}f)|m + lN|^\beta M_l(m) e^{i(m+lN)x} \right| L_p(\mathbb{T}) \right\|.$$

Wir erinnern nochmal daran, dass für jedes $l \in \mathbb{Z}$ die Reihen bzgl. m sogar im Sinne der gleichmässigen Konvergenz existieren. Das heisst insbesondere, dass die Reihen im $L_p(\mathbb{T})$-Sinne existieren. Jetzt erfolgt noch eine Indextransformation und man erhält:

$$\|I_N(f - V_{2N-1}f)|L_p(\mathbb{T})\| = \sum_{l\in\mathbb{Z}} \left\| \sum_{m\in\mathbb{Z}, m\neq 0} c_m(f - V_{2N-1}f)|m|^\beta M_l(m - lN) e^{imx} \right| L_p(\mathbb{T}) \right\|.$$

Wir führen damit die Bezeichnung

$$h_l(x) \underset{L_p(\mathbb{T})}{=} \sum_{m\in\mathbb{Z}, m\neq 0} c_m(f - V_{2N-1}f)|m|^\beta M_l(m - lN) e^{imx}$$

ein. Wir zeigen als nächstes:

(i) Es existiert eine Funktion $g \in L_p(\mathbb{T})$ mit $c_m(g) = |m|^\beta c_m(f - V_{2N-1}f)$ und

(ii)
$$\|h_l|L_p(\mathbb{T})\| \leq C\|g|L_p(\mathbb{T})\| \int_{\mathbb{R}} |\mathcal{F}^{-1}M_l(y)|dy,$$

wobei $C > 0$ unahängig von $l \in \mathbb{Z}$ ist.

<u>*Schritt 1:*</u>

Wir zeigen (i).
Zunächst führen wir für $k \in \mathbb{N}$ die trigonometrischen Polynome

$$g_k(x) := \sum_{|m|\leq 2^k-1} c_m(f)|m|^\beta e^{imx}$$

ein. Sei $r \in \mathbb{N}$ so gewählt, dass $2^r \leq N < 2^{r+1}$ gilt. Für $M \in \mathbb{N}$ betrachten wir das trigonometrische Polynom

$$t_M = V_{2^{M+1}-1}g_{M+1} - V_{2N-1}g_{r+3}.$$

Mittels einer Teleskopsumme erhält man folgende Summendarstellung:

$$t_M = \sum_{l=r+3}^{M} (V_{2^{l+1}-1}g_{l+1} - V_{2^l-1}g_l) + V_{2^{r+3}-1}(g_{r+3} - V_{2N-1}g_{r+3}).$$

Hier ist zu beachten, dass $2N - 1 < 2^{r+2}$ und damit $V_{2^{r+3}-1}$ das trigonometrische Polynom $V_{2N-1}g_{r+3}$ aufgrund der Eigenschaft (1.5.12) der de la Vallée Poussin-Mittel invariant lässt. Jetzt zeigen wir die Konvergenz der Folge $(t_M)_{M\in\mathbb{N}}$ in $L_p(\mathbb{T})$, indem wir zeigen, dass die Reihe

$$\sum_{l=r+3}^{\infty} (V_{2^{l+1}-1}g_{l+1} - V_{2^l-1}g_l)$$

in $L_p(\mathbb{T})$ absolut konvergiert, d.h. dass

$$\sum_{l=r+3}^{\infty} \|V_{2^{l+1}-1}g_{l+1} - V_{2^l-1}g_l|L_p(\mathbb{T})\| < \infty$$

gilt.
Aufgrund der Struktur der DE LA VALLEE POUSSIN-Mittel existieren Zahlen v_m^l für $2^{l-1} < |m| \leq 2^{l+1}$ (siehe Beweis des letzten Lemmas) mit:

$$V_{2^{l+1}-1}g_{l+1} - V_{2^l-1}g_l = \sum_{2^{l-1}<|m|\leq 2^{l+1}} v_m^l c_m(f)|m|^\beta e^{imx}. \tag{1.10.26}$$

Jetzt wird vollkommen analog zum Beweis des letzten Lemmas verfahren. Das bringt die folgende Abschätzung:

$$\begin{aligned}\|V_{2^{l+1}-1}g_{l+1} - V_{2^l-1}g_l|L_p\mathbb{T}\| &\underset{(1.10.26)}{=} \left\|\left.\sum_{2^{l-1}<|m|\leq 2^{l+1}} v_m^l c_m(f)|m|^\beta e^{imx}\right| L_p(\mathbb{T})\right\| \\ &\leq C2^{(l+2)\beta}\|V_{2^{l+1}-1}f - V_{2^l-1}f|L_p(\mathbb{T})\|,\end{aligned}$$

wobei $C > 0$ unabhängig von l und r ist. Damit gilt:

$$\begin{aligned}\sum_{l=r+3}^{\infty} \|V_{2^{l+1}-1}g_{l+1} - V_{2^l-1}g_l|L_p(\mathbb{T})\| &\leq C\sum_{l=r+3}^{\infty} 2^{(l+2)\beta}\|V_{2^{l+1}-1}f - V_{2^l-1}f|L_p(\mathbb{T})\| \\ &\leq C_2\sum_{l=r+3}^{\infty} 2^{(l+2)\beta}\underbrace{\|f - V_{2^l-1}f|L_p(\mathbb{T})\|}_{\leq c2^{-ls}\|f|B^s_{p,\infty}(\mathbb{T})\|} \\ &\leq C_4\|f|B^s_{p,\infty}(\mathbb{T})\|\sum_{l=r+3}^{\infty} 2^{l(\beta-s)}.\end{aligned}$$

Wegen $\beta < s$ und $2^{r+3} \sim N$ folgt schliesslich

$$\sum_{l=r+3}^{\infty} \|V_{2^{l+1}-1}g_{l+1} - V_{2^l-1}g_l|L_p(\mathbb{T})\| \leq C_5N^{\beta-s}\|f|B^s_{p,\infty}(\mathbb{T})\| < \infty. \tag{1.10.27}$$

Da aus der absoluten Konvergenz die Konvergenz folgt, existiert die Reihe

$$\sum_{l=r+3}^{\infty} (V_{2^{l+1}-1}g_{l+1} - V_{2^l-1}g_l)$$

und damit der Grenzwert der $(t_M)_{M\in\mathbb{N}}$ in $L_p(\mathbb{T})$. Wir nennen diesen Grenzwert g. Wegen $t_M = V_{2^{M+1}-1}g_{M+1} - V_{2N-1}g_{r+3}$ ist offensichtlich, dass für alle $m \in \mathbb{Z}$

$$c_m(g) = |m|^\beta c_m(f - V_{2N-1}f)$$

gilt. Wir sind weiterhin an der $L_p(\mathbb{T})$-Norm von g interessiert. Dazu lässt sich folgendes aussagen:

$$\begin{aligned}\|g|L_p(\mathbb{T})\| &= \left\|\left.\sum_{l=r+3}^{\infty}(V_{2^{l+1}-1}g_{l+1} - V_{2^l-1}g_l) + V_{2^{r+3}-1}(g_{r+3} - V_{2N-1}g_{r+3})\right|L_p(\mathbb{T})\right\| \\ &\leq \sum_{l=r+3}^{\infty}\|V_{2^{l+1}-1}g_{l+1} - V_{2^l-1}g_l|L_p(\mathbb{T})\| + \|V_{2^{r+3}-1}(g_{r+3} - V_{2N-1}g_{r+3})|L_p(\mathbb{T})\| \\ &\underset{(1.10.27)}{\leq} C_5N^{\beta-s}\|f|B^s_{p,\infty}(\mathbb{T})\| + \|V_{2^{r+3}-1}(g_{r+3} - V_{2N-1}g_{r+3})|L_p(\mathbb{T})\|\end{aligned} \tag{1.10.28}$$

Bleibt noch der zweite Summand. Man findet Zahlen w_m für $2^r < |m| \leq 2^{r+3}$, so dass gilt:

$$\begin{aligned} V_{2^{r+3}-1}(g_{r+3} - V_{2N-1}g_{r+3}) &\underset{(1.5.12)}{=} \sum_{2^r<|m|\leq 2^{r+3}} w_m |m|^\beta c_m(f) e^{imx} \\ &= 2^{(r+4)\beta} \sum_{2^r<|m|\leq 2^{r+3}} w_m \left|\frac{m}{2^{r+4}}\right|^\beta c_m(f) e^{imx} \\ &= 2^{(r+4)\beta} \sum_{2^r<|m|\leq 2^{r+3}} w_m P_r(m) c_m(f), \end{aligned}$$

mit

$$P_r(x) = \left|\frac{x}{2^{r+4}}\right|^\beta \chi\left(\frac{x}{2^{r+3}}\right), \text{ wobei}$$

$$\chi(x) = \begin{cases} 0 & : \ |x| \leq \frac{1}{16} \\ 1 & : \ \frac{1}{8} \leq |x| \leq 1 \\ 0 & : \ |x| > 2 \end{cases}$$

eine $C_0^\infty(\mathbb{R})$-Funktion ist. Man sieht wieder (analog zum Beweis des letzten Lemmas), dass $P_r(m) = \left|\frac{m}{2^{r+4}}\right|^\beta$ für $2^r < |m| \leq 2^{r+3}$. Geht man zur Norm über, erhält man:

$$\|V_{2^{r+3}-1}(g_{r+3} - V_{2N-1}g_{r+3})|L_p(\mathbb{T})\| = 2^{(r+4)\beta} \left\| \sum_{2^r<|m|\leq 2^{r+3}} w_m P_r(m) c_m(f) \right| L_p(\mathbb{T}) \right\|$$

Jetzt wird Satz 1.2 angewendet. Hierbei ist wieder P_r so konstruiert, dass die gebildete $W_2^1(\mathbb{R})$-Norm von $P_r(2^{r+4}\cdot)$ unabhängig von r ist. Also folgt:

$$\begin{aligned} \|V_{2^{r+3}-1}(g_{r+3} - V_{2N-1}g_{r+3})|L_p(\mathbb{T})\| &\leq C 2^{(r+4)\beta} \left\| \sum_{2^r<|m|\leq 2^{r+3}} w_m c_m(f) \right| L_p(\mathbb{T}) \right\| \\ &= C 2^{(r+4)\beta} \|V_{2^{r+3}-1}(f - V_{2N-1}f)|L_p(\mathbb{T})\| \\ &\leq 3C 2^{(r+4)\beta} \underbrace{\|f - V_{2N-1}f|L_p(\mathbb{T})\|}_{\leq c 2^{-rs}\|f|B^s_{p,\infty}(\mathbb{T})\|} \\ &\leq C_2 2^{(\beta-s)r} \|f|B^s_{p,\infty}(\mathbb{T})\| \\ &\leq C_3 N^{\beta-s} \|f|B^s_{p,\infty}\| \end{aligned}$$

Zusammen mit (1.10.28) folgt also, dass eine Konstante $C > 0$ unabhängig von N existiert, so dass

$$\|g|L_p(\mathbb{T})\| \leq C N^{\beta-s} \|f|B^s_{p,\infty}(\mathbb{T})\| \tag{1.10.29}$$

gilt.

Schritt 2:

Wir zeigen (ii).
Für $M \in \mathbb{N}$ beliebig gilt:

$$\|h_l|L_p(\mathbb{T})\| \leq \|h_l - V_{2M-1}h_l|L_p(\mathbb{T})\| + \|V_{2M-1}h_l|L_p(\mathbb{T})\|. \tag{1.10.30}$$

Wir untersuchen nun den Ausdruck $\|V_{2M-1}h_l|L_p(\mathbb{T})\|$. Mit (1.5.11) erhält man:

$$V_{2M-1}h_l = \sum_{|m|\leq 2M-1} c_m(f - V_{2N-1}f)|m|^\beta M_l(m - lN) v\left(\frac{m}{M}\right) e^{imx} \tag{1.10.31}$$

Auf dieses trigonometrische Polynom wird als nächstes Lemma 1.6 angewendet. Dazu ist zu zeigen, dass $M_l(\cdot - lN)$, $\mathcal{F}^{-1}M_l(\cdot - lN) \in L_1(\mathbb{R})$ gilt. Es ist $M_l \in L_1(\mathbb{R})$ genau dann, wenn $M_l(\cdot - lN) \in L_1(\mathbb{R})$. Wie oben kann man $\int\limits_{\mathbb{R}} |M_l(\xi)|d\xi$ mit einer geeigneten Substitution in $\int\limits_{\mathbb{R}} |C_l(\xi)|d\xi$ überführen (bis auf Vorfaktoren). Dieses Integral existiert nach Voraussetzung. Weiter gilt:

$$(\mathcal{F}^{-1}M_l(\cdot - lN))(y) = e^{ilNy}(\mathcal{F}^{-1}M_l)(y).$$

Damit reicht es $\int\limits_{\mathbb{R}} |\mathcal{F}^{-1}M_l(y)|dy < \infty$ zu zeigen. Analog zu (1.10.15) erhält man:

$$\begin{aligned}\int\limits_{\mathbb{R}} |\mathcal{F}^{-1}M_l(y)|dy &= N^{-\beta}N\int\limits_{\mathbb{R}} |\mathcal{F}^{-1}C_l(Ny)|dy \\ &= N^{-\beta}\int\limits_{\mathbb{R}} |\mathcal{F}^{-1}C_l(w)|dw \\ &< \infty.\end{aligned} \tag{1.10.32}$$

Lemma 1.6 ist also anwendbar und es ergibt sich:

$$\begin{aligned}\|V_{2M-1}h_l|L_p(\mathbb{T})\| &= \left\| \sum_{|m|\le 2M-1} c_m(f - V_{2N-1}f)|m|^{\beta}M_l(m-lN)v\left(\frac{m}{M}\right)e^{imx}\middle| L_p(\mathbb{T})\right\| \\ \overset{\text{(Lemma 1.6+Folg. 1)}}{\le} &\left\| \sum_{|m|\le 2M-1} c_m(f - V_{2N-1}f)|m|^{\beta}v\left(\frac{m}{M}\right)e^{imx}\middle| L_p(\mathbb{T})\right\| \int\limits_{\mathbb{R}} |\mathcal{F}^{-1}M_l(y)|dy.\end{aligned}$$

Jetzt nutzen wir Punkt (i) aus und vereinfachen die $L_p(\mathbb{T})$-Norm zu $\|V_{2M-1}g|L_p(\mathbb{T})\|$.
Also folgt:

$$\|V_{2M-1}h_l|L_p(\mathbb{T})\| \le \|V_{2N-1}g|L_p(\mathbb{T})\| \int\limits_{\mathbb{R}} |\mathcal{F}^{-1}M_l(y)|dy.$$

In (1.10.30) eingesetzt folgt:

$$\begin{aligned}\|h_l|L_p(\mathbb{T})\| &\le \|h_l - V_{2M-1}h_l|L_p(\mathbb{T})\| + \|V_{2M-1}g|L_p(\mathbb{T})\| \int\limits_{\mathbb{R}} |\mathcal{F}^{-1}M_l(y)|dy \\ &\le \|h_l - V_{2M-1}h_l|L_p(\mathbb{T})\| + 3\|g|L_p(\mathbb{T})\| \int\limits_{\mathbb{R}} |\mathcal{F}^{-1}M_l(y)|dy.\end{aligned} \tag{1.10.33}$$

Lemma 1.10 sichert $\lim\limits_{M\to\infty} \|h_l - V_{2M-1}h_l|L_p(\mathbb{T})\| = 0$. Wegen der Stetigkeit von h_l gilt dies auch für $p = \infty$. Folglich ist

$$\begin{aligned}\|h_l|L_p(\mathbb{T})\| &\le 3\|g|L_p(\mathbb{T})\| \int\limits_{\mathbb{R}} |\mathcal{F}^{-1}M_l(y)|dy \\ &\overset{(1.10.29)}{\le} CN^{\beta-s}\|f|B^s_{p,\infty}(\mathbb{T})\| \int\limits_{\mathbb{R}} |\mathcal{F}^{-1}M_l(y)|dy \\ &\overset{(1.10.32)}{=} CN^{-s}\|f|B^s_{p,\infty}(\mathbb{T})\| \int\limits_{\mathbb{R}} |\mathcal{F}^{-1}C_l(y)|dy.\end{aligned} \tag{1.10.34}$$

Damit haben wir schliesslich

$$\begin{aligned}\|I_N(f - V_{2N-1}f)|L_p(\mathbb{T})\| &\leq \sum_{l\in\mathbb{Z}} \|h_l|L_p(\mathbb{T})\| \\ &\overset{(1.10.34)}{\leq} CN^{-s}\|f|B^s_{p,\infty}(\mathbb{T})\| \sum_{l\in\mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}} |\mathcal{F}^{-1}C_l(y)|dy \\ &\underset{(F5)}{\leq} C_2N^{-s}\|f|B^s_{p,\infty}(\mathbb{T})\|\end{aligned}$$

□

Mit dieser Vorarbeit folgt jetzt unmittelbar der

Beweis des Satzes 1.10

Sei also jetzt $\beta < s < \alpha$. Es gilt:

$$\begin{aligned}\|f - I_Nf|L_p(\mathbb{T})\| &= \|f - V_{2N-1}f + V_{2N-1}f - I_N(V_{2N-1}f) + I_N(V_{2N-1}f) - I_Nf|L_p(\mathbb{T})\| \\ &\leq \|f - V_{2N-1}f|L_p(\mathbb{T})\| + \|V_{2N-1}f - I_N(V_{2N-1}f)|L_p(\mathbb{T})\| + \\ &\quad \|I_N(V_{2N-1}f - f)|L_p(\mathbb{T})\|. \end{aligned} \tag{1.10.35}$$

Für den ersten Summanden gilt:

$$\|f - V_{2N-1}f|L_p(\mathbb{T})\| \leq C_1N^{-s}\|f|B^s_{p,\infty}(\mathbb{T})\|. \tag{1.10.36}$$

Da $V_{2N-1}f \in T_{2N-1}$, können wir den zweiten Summanden mittels Lemma 1.21 abschätzen. Es folgt:

$$\|V_{2N-1}f - I_N(V_{2N-1}f)|L_p(\mathbb{T})\| \leq C_2N^{-s}\|V_{2N-1}f|B^s_{p,\infty}(\mathbb{T})\|. \tag{1.10.37}$$

Den dritten Summand vergrössert man mittels Lemma 1.22 und man erhält:

$$\|I_N(V_{2N-1}f - f)|L_p(\mathbb{T})\| \leq C_3N^{-s}\|f|B^s_{p,\infty}(\mathbb{T})\| \tag{1.10.38}$$

Bleibt also nur noch

$$\|V_{2N-1}f|B^s_{p,\infty}(\mathbb{T})\| \leq C_4\|f|B^s_{p,\infty}(\mathbb{T})\|$$

zu zeigen, wobei C_4 unabhängig von N ist.
Sei r so gewählt, dass $2^r \leq N < 2^{r+1}$ gilt. Dann ist

$$\|V_{2N-1}f|B^s_{p,\infty}(\mathbb{T})\| = \|V_{2N-1}f|L_p(\mathbb{T})\| + \sup_{j=0,\dots,r+1} 2^{js}\|V_{2N-1}f - V_{2^{j+1}-1}(V_{2N-1}f)|L_p(\mathbb{T})\|,$$

da

$$V_{2^{j+1}-1}V_{2N-1}f = V_{2N-1}f$$

für $j > r+1$.
Sei $0 \leq j \leq r+1$. Weiter gilt:

$$\begin{aligned}\|V_{2N-1}f - V_{2^{j+1}-1}(V_{2N-1}f)|L_p(\mathbb{T})\| &\leq \|V_{2N-1}f - f|L_p(\mathbb{T})\| + \|f - V_{2^{j+1}-1}f|L_p(\mathbb{T})\| \\ &\quad + \|V_{2^{j+1}-1}(f - V_{2N-1}f)\|.\end{aligned}$$

Damit erhält man:

$$\begin{aligned}\|V_{2N-1}f|B^s_{p,\infty}(\mathbb{T})\| &\leq 3\|f|L_p(\mathbb{T})\| + \sup_{j=0,1,\dots} 2^{js}\|f - V_{2^{j+1}-1}f|L_p(\mathbb{T})\| \\ &\quad + cN^s\|f - V_{2N-1}f|L_p(\mathbb{T})\| + c3N^s\|f - V_{2N-1}f|L_p(\mathbb{T})\|\end{aligned}$$

Die letzten beiden Terme wurden oben schon abgeschätzt. Damit erhält man:

$$\|V_{2N-1}f|B^s_{p,\infty}(\mathbb{T})\| \le \underbrace{(3+4cC_1)}_{=:C_4} \|f|B^s_{p,\infty}(\mathbb{T})\| \tag{1.10.39}$$

Setzt man alles in (1.10.35) ein, so folgt schliesslich:

$$\|f - I_N f|L_p(\mathbb{T})\| \le CN^{-s}\|f|B^s_{p,\infty}(\mathbb{T})\|.$$

□

Im folgenden Corollar wird die Fehlerabschätzung für $\|f-I_N f|L_p(\mathbb{T})\|$ für alle stetigen Funktionen $f \in B^s_{p,\infty}(\mathbb{T})$ gezeigt. Die Stetigkeit von f ist mindestens nötig, da der Interpolationsprozess andernfalls nicht sinnvoll erklärt ist.
Die Stetigkeit von f könnte man beispielsweise realisieren, indem man den Besov-Raum $B^s_{p,\infty}(\mathbb{T})$ mit $s > \frac{1}{p}$ zugrunde legt.

Corollar 1 Es gelten die Voraussetzungen des Satzes 1.10. Sei $\beta < s < \alpha$ und $1 \le p \le \infty$. Dann existiert eine Konstante $C > 0$, so dass für alle $N \in \mathbb{N}$ und für alle stetigen $f \in B^s_{p,\infty}(\mathbb{T})$

$$\|f - I_N f|L_p(\mathbb{T})\| \le CN^{-s}\|f|B^s_{p,\infty}(\mathbb{T})\|$$

gilt.

Beweis Sei $f \in B^s_{p,\infty}(\mathbb{T})$ und $N \in \mathbb{N}$. Wir betrachten die Differenz

$$\begin{aligned}\|f - I_N f|L_p(\mathbb{T})\| &= \|f - V_{2M-1}f + V_{2M-1}f - I_N(V_{2M-1}f) + I_N(V_{2M-1}f) - I_N f|L_p(\mathbb{T})\| \\ &\le \|f - V_{2M-1}f|L_p(\mathbb{T})\| + \|V_{2M-1}f - I_N(V_{2M-1}f)|L_p(\mathbb{T})\| \\ &\quad + \|I_N(V_{2M-1}f) - I_N f|L_p(\mathbb{T})\|. \end{aligned} \tag{1.10.40}$$

Sei $\varepsilon > 0$. Wegen Lemma 1.10 findet man ein $M_0(\varepsilon)$, so dass für alle $M > M_0$

$$\|f - V_{2M-1}f|L_p(\mathbb{T})\| < \varepsilon/2 \tag{1.10.41}$$

gilt. Den zweiten Summanden schätzt man mit Satz 1.10 ab. Da $V_{2M-1}f \in \mathcal{A}(\mathbb{T}) \cap B^s_{p,\infty}(\mathbb{T})$, folgt:

$$\begin{aligned}\|I_N(V_{2M-1}f) - V_{2M-1}f|L_p(\mathbb{T})\| &\le CN^{-s}\|V_{2M-1}f|L_p(\mathbb{T})\| \\ \text{(siehe (1.10.39))} \quad &\le C_2N^{-s}\|f|B^s_{p,\infty}(\mathbb{T})\| \end{aligned} \tag{1.10.42}$$

Für den dritten Summand gilt:

$$\begin{aligned}\|I_N(V_{2M-1}f) - I_N f|L_p(\mathbb{T})\| &= \left\| \sum_{l\in J_N} (V_{2M-1}f - f)(x_l)\Lambda^\pi_N(x - x_l) \right| L_p(\mathbb{T}) \Bigg\| \\ &\le \sum_{l\in J_N} |(V_{2M-1}f - f)(x_l)| \, \|\Lambda^\pi_N(x)|L_p(\mathbb{T})\| \\ &\le \|\Lambda^\pi_N(x)|L_p(\mathbb{T})\| \sum_{l\in J_N} \|V_{2M-1}f - f|L_\infty(\mathbb{T})\| \\ \text{(Lemma 1.10)} \quad &< \varepsilon/2\,, \end{aligned} \tag{1.10.43}$$

für $M > M_1(N,\varepsilon)$.
Setzt man nun (1.10.41), (1.10.42) und (1.10.43) in (1.10.40) ein, so erhält man unabhängig von M:

$$\|f - I_N f|L_p(\mathbb{T})\| \le \varepsilon + C_2N^{-s}\|f|B^s_{p,\infty}(\mathbb{T})\|.$$

Diese Abschätzung gilt für alle $\varepsilon > 0$, was schliesslich

$$\|f - I_N f|L_p(\mathbb{T})\| \le C_2N^{-s}\|f|B^s_{p,\infty}(\mathbb{T})\|$$

zur Folge hat. □

1.11 Interpolation mit de la Vallée Poussin - Kernen, Ein Beispiel

Als nächstes geben wir eine konkrete Interpolationsoperatorenfolge an, indem wir eine Funktion Λ finden, die den Voraussetzungen genügt. Diese speziellen Interpolationsoperatoren benötigen wir auch im folgenden Kapitel, in dem es um periodische Interpolation auf $\mathbb{T}^2$ geht. Das Beispiel soll anhand der Forderungen an die zugrundeliegende Funktion Λ und ihre Fouriertransformierte $\mathcal{F}\Lambda$ im Satz 1.10 motiviert werden.

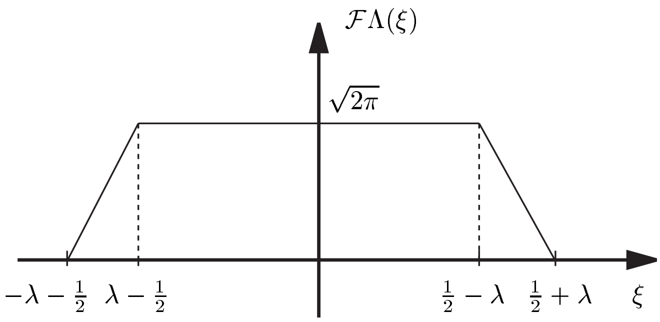
Die Funktion Λ muss (E1) erfüllen, woraus sich sofort ergibt, dass

$$\int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}\Lambda(\xi)\, d\xi = \sqrt{2\pi} \tag{1.11.1}$$

gelten muss. Die stetige Funktion $\mathcal{F}\Lambda$ muss weiterhin (1.10.3) erfüllen, was man z.B. realisiert, wenn sich der Träger von $\mathcal{F}\Lambda$ in $(-1,1)$ befindet. Ausserdem sollen die Fundamentalinterpolanten Λ_N^π zu $\mathcal{A}(\mathbb{T})$ gehören, was bedeutet, dass

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}N} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left| \mathcal{F}\Lambda\left(\frac{k}{N}\right)\right| < \infty$$

gelten muss. Auch diese Forderung realisiert man mit einem kompakten Träger von $\mathcal{F}\Lambda$. Der Kern der Konstruktion ist aber die Tatsache, dass durch einen kompakten Träger von $\mathcal{F}\Lambda$ ein stetiges f durch I_N auf ein trigonometrisches Polynom vom Grade höchstens N abgebildet wird (siehe Lemma 1.16). Zusätzlich sind noch die Forderungen (F1),...,(F5) aus Satz 1.10 zu erfüllen. Ist der Träger von $\mathcal{F}\Lambda$ in $(-1,1)$, womit $\mathcal{F}\Lambda$ in Umgebungen von Gitterpunkten $\neq 0$ verschwindet, und sichert man $\mathcal{F}\Lambda$ konstant $\sqrt{2\pi}$ in einer Umgebung der Null, so werden die Funktionen A und B_l zu stetigen Funktionen mit kompaktem Träger für alle $\alpha > 0$. Damit ist (F1) für alle $\alpha > 0$ erfüllt. Aufgrund des Faktors $(1 - \Psi(2\xi))$ sind die Funktionen C_l stetig mit kompaktem Träger für alle $\beta > 0$, womit (F4) erfüllt ist.
Sei jetzt $0 < \lambda < \frac{1}{2}$. Dann sind die bis jetzt diskutierten Forderungen realisierbar, wenn $\mathcal{F}\Lambda$ eine stückweise lineare Funktion der Gestalt



ist. Diese Darstellung ist in einem gewissen Sinne zwingend. Legt man sich qualitativ auf diese Gestalt fest, so muss das ebene Stück echt vor $\xi = \frac{1}{2}$ enden, da sonst (1.11.1) und die Stetigkeit nicht mehr gleichzeitig realisierbar sind. Die Länge des schrägen Stückes ergibt sich dann aus der Forderung (1.11.1). Damit kommt man zu der obigen Darstellung. Hat $\mathcal{F}\Lambda$ diese Gestalt, so kann man die Funktionen $A(\xi)$ und $B_l(\xi)$ aus den Voraussetzungen des Satzes 1.10 für alle $\alpha > 0$ als Produkte einer stückweise linearen Funktion mit kompaktem Träger und einer $C_0^\infty(\mathbb{R})$-Funktion auffassen. Aufgrund der Ungleichung

$$\|\mathcal{F}^{-1}M|L_1(\mathbb{R})\| \leq c\|M|W_2^1(\mathbb{R})\|$$

(siehe Bemerkung 1.3) gehören also die inversen Fouriertransformierten dieser Funktionen zu $L_1(\mathbb{R})$. Forderung (F3) ist wegen des kompakten Trägers von $\mathcal{F}\Lambda$ nur eine endliche Summe und damit endlich.
Bis jetzt sind also die Forderungen (F1), (F2), (F3) und (F4) für alle $\alpha, \beta > 0$ erfüllt. Wegen des kompakten Trägers von $\mathcal{F}\Lambda$ ist für l gross genug $C_l(\xi) = \frac{\mathcal{F}\Lambda(\xi-l)}{|\xi|^\beta}$. Mit obiger Ungleichung erhält man

$$\|\mathcal{F}^{-1}C_l|L_1(\mathbb{R})\| \leq c\|C_l|W_2^1(\mathbb{R})\| = c\left\|\frac{\mathcal{F}\Lambda(\cdot - l)}{|\cdot|^\beta}\right|W_2^1(\mathbb{R})\right\| .$$

Die Träger dieser Funktionen liegen um $l \in \mathbb{Z}$. Betrachtet man also die $L_2(\mathbb{R})$-Norm dieser Funktion und ihrer ersten (distributiven) Ableitung, so sieht man leicht, dass

$$\left\|\frac{\mathcal{F}\Lambda(\cdot - l)}{|\cdot|^\beta}\right|W_2^1(\mathbb{R})\right\| \sim \frac{1}{|l|^\beta}$$

gilt. Folglich ist (F5) für $\beta > 1$ gesichert.

Sei also für $0 < \lambda < \frac{1}{2}$

$$\mathcal{F}\Lambda_\lambda(\xi) := \sqrt{2\pi}\begin{cases} 1 & : \quad |\xi| \leq \frac{1}{2} - \lambda \\ \frac{1}{2\lambda}\left(\frac{1}{2} + \lambda - |\xi|\right) & : \quad \frac{1}{2} - \lambda < |\xi| < \frac{1}{2} + \lambda \\ 0 & : \quad \frac{1}{2} + \lambda \leq |\xi| \end{cases} .$$

Eine elementare Rechnung zeigt, dass dafür

$$\Lambda_\lambda(x) = 2\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)\sin(\lambda x)}{\lambda x^2}$$

gelten muss. Mit dieser Funktion sind jetzt auch sofort die Eigenschaften (E1) und (E2) gesichert. Wir bezeichnen mit I_N^λ die zu Λ_λ gehörenden Interpolationsoperatoren. Diese Konstruktion bietet noch einen entscheidenden Vorteil, den wir im folgenden Lemma formulieren:

Lemma 1.23 Sei $0 < \lambda < 1/2$ und $N \in \mathbb{N}$. I_N^λ bezeichnet den in diesem Abschnitt erklärten Interpolationsoperator. Sei $M = \lfloor(1/2 - \lambda)N\rfloor$. Dann gilt für alle $t \in T_M$

$$I_N^\lambda t = t.$$

Beweis Sei $t(x) = e^{ikx}$ mit $|k| \leq (1/2 - \lambda)N$. Es genügt zu zeigen, dass $c_\ell(I_N^\lambda(e^{ik\cdot})) = \delta_{\ell,k}$ für $\ell \in \mathbb{Z}$ gilt. Mit Satz 1.9 und Lemma 1.16 gilt:

$$c_\ell(I_N^\lambda e^{ik\cdot}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathcal{F}\Lambda_\lambda\left(\frac{\ell}{N}\right)\cdot\begin{cases} 1 & : \quad N|\ell - k \\ 0 & : \quad \text{sonst} \end{cases} , \tag{1.11.2}$$

wobei mit $N|\ell - k$ „N teilt $\ell - k$" gemeint ist. Wegen $|k| \leq (1/2 - \lambda)N$ folgt daraus sofort $c_k(I_N^\lambda(e^{ik\cdot})) = 1$. Sei $\ell \neq k$. Wegen (1.11.2) ist $c_\ell(I_N^\lambda(e^{ik\cdot})) = 0$ für $\left|\frac{\ell}{N} - \frac{k}{N}\right| < 1$. Im Falle $\left|\frac{\ell}{N} - \frac{k}{N}\right| \geq 1$ muss wegen $|k| \leq (1/2 - \lambda)N$ die Ungleichung $\left|\frac{\ell}{N}\right| \geq (1/2 + \lambda)$ gelten. Und damit ist $\mathcal{F}\Lambda_\lambda\left(\frac{\ell}{N}\right) = 0$. Also ist $c_\ell(I_N^\lambda(e^{ik\cdot})) = 0$. □

Wir werden dieses Resultat in Kapitel 2 verwenden, wo wir mit Hilfe dieser Interpolationsoperatoren approximieren. Die Anwendung von Corollar 1 auf diese Interpolation führt uns jetzt zu folgendem

Lemma 1.24 Seien $0 < \lambda < \frac{1}{2}$ und I_N^λ die gerade eingeführten Interpolationsoperatoren. Sei weiter $1 \leq p \leq \infty$ und $\underline{s > 1}$. Dann existiert eine Konstante $C(s,p) > 0$ derart, dass für alle $N \in \mathbb{N}$ und alle $f \in B_{p,\infty}^s(\mathbb{T})$

$$\|f - I_N^\lambda f|L_p(\mathbb{T})\| \leq CN^{-s}\|f|B_{p,\infty}^s(\mathbb{T})\| \tag{1.11.3}$$

gilt. □

Man braucht hier nicht noch zusätzlich die Stetigkeit von f zu fordern, da diese aufgrund von $B^s_{p,\infty}(\mathbb{T}) \hookrightarrow C(\mathbb{T})$ schon gesichert ist.
Im Falle $p = \infty$ führt eine Folgerung aus einem Resultat von RIES, STENS (siehe dazu [Si2, Proposition 1]) zu folgender Aussage:

Lemma 1.25 Seien $0 < \lambda < \frac{1}{2}$ und I^λ_N die gerade eingeführten Interpolationsoperatoren. Sei weiter $\underline{s > 0}$. Dann existiert eine Konstante $C(s) > 0$, so dass für alle $N \in \mathbb{N}$ und alle $f \in B^s_{\infty,\infty}(\mathbb{T})$

$$\|f - I^\lambda_N f | L_\infty(\mathbb{T})\| \leq C N^{-s} \|f | B^s_{\infty,\infty}(\mathbb{T})\| \tag{1.11.4}$$

gilt. (Die $L_\infty(\mathbb{T})$-Norm kann hier selbstverständlich durch die $C(\mathbb{T})$-Norm ersetzt werden.) □

Mit Hilfe komplexer Interpolation und diesen beiden Lemmatas ist es jetzt möglich, die Abschätzung (1.11.3) auf Werte $s > 1/p$ zu erweitern. Da die Menge der trigonometrischen Polynome <u>nicht</u> dicht in den Räumen $B^s_{p,\infty}(\mathbb{T})$ liegt, führen wir für den Abschluss dieser Menge eine neue Bezeichnung ein:

Definition 1.13 Sei $1 \leq p \leq \infty$ und $s > 0$. Wir bezeichnen mit $b^s_{p,\infty}(\mathbb{T})$ den Abschluss des Unterraumes $\bigcup\limits_{N \in \mathbb{N}_0} T_N$ in $B^s_{p,\infty}(\mathbb{T})$. □

Die Räume $b^s_{p,\infty}(\mathbb{T})$ eignen sich gut für eine komplexe Interpolationsmethode. Es gilt für $\vartheta \in (0,1)$, $s_0, s_1 > 0, 1 \leq p_0, p_1 \leq \infty$ und

$$s = (1-\vartheta)s_0 + \vartheta s_1 \quad , \quad \frac{1}{p} = \frac{1-\vartheta}{p_0} + \frac{\vartheta}{p_1}$$

die Gleichheit

$$[b^{s_0}_{p_0,\infty}(\mathbb{T}), b^{s_1}_{p_1,\infty}(\mathbb{T})]_\vartheta = b^s_{p,\infty}(\mathbb{T}).$$

Desweiteren weiss man, dass bzgl. dieser Methode auch

$$[L_{p_0}(\mathbb{T}), L_{p_1}(\mathbb{T})]_\vartheta = L_p(\mathbb{T})$$

gilt. Es interessiert hierbei nicht, wie die Interpolationsmethode genau funktioniert. Wir verweisen auf [Tr2, 2.4.2 zusammen mit 1.18]. (Die Ausdehnung auf $p_0, p_1 = \infty$ funktioniert dabei reibungslos). Die entscheidende Tatsache ist folgendes:
Seien E, F lineare Hausdorff-Räume mit $b^{s_0}_{p_0,\infty}(\mathbb{T}), b^{s_1}_{p_1,\infty}(\mathbb{T}) \hookrightarrow E$ und $L_{p_0}(\mathbb{T}), L_{p_1}(\mathbb{T}) \hookrightarrow F$ (man könnte hier z.B. $E = F = L_1(\mathbb{T})$ nehmen). Sei weiter $T : E \to F$ ein linearer Operator und die Einschränkungen

$$T : b^{s_0}_{p_0,\infty}(\mathbb{T}) \to L_{p_0}(\mathbb{T}) \quad , \quad T : b^{s_1}_{p_1,\infty}(\mathbb{T}) \to L_{p_1}(\mathbb{T})$$

stetig. Dann ist

$$b^s_{p,\infty}(\mathbb{T}) = [b^{s_0}_{p_0,\infty}(\mathbb{T}), b^{s_1}_{p_1,\infty}(\mathbb{T})]_\vartheta \hookrightarrow E \quad , \quad L_p(\mathbb{T}) = [L_{p_0}(\mathbb{T}), L_{p_1}(\mathbb{T})]_\vartheta \hookrightarrow F$$

und

$$T : b^s_{p,\infty}(\mathbb{T}) \to L_p(\mathbb{T})$$

ist stetig mit

$$\|T : b^s_{p,\infty}(\mathbb{T}) \to L_p(\mathbb{T})\| \leq \|T : b^{s_0}_{p_0,\infty}(\mathbb{T}) \to L_{p_0}(\mathbb{T})\|^{1-\vartheta} \cdot \|T : b^{s_1}_{p_1,\infty}(\mathbb{T}) \to L_{p_1}(\mathbb{T})\|^\vartheta \tag{1.11.5}$$

Satz 1.11 Seien $0 < \lambda < \frac{1}{2}$ und I^λ_N die gerade eingeführten Interpolationsoperatoren. Sei weiter $\underline{1 \leq p \leq \infty}$ und $\underline{s > 1/p}$. Dann existiert eine Konstante $C(s,p) > 0$, so dass für alle $N \in \mathbb{N}$ und $\underline{\text{alle } f \in B^s_{p,\infty}(\mathbb{T})}$

$$\|f - I^\lambda_N f | L_p(\mathbb{T})\| \leq C N^{-s} \|f | B^s_{p,\infty}(\mathbb{T})\|$$

gilt.

Beweis Sei also $(s, 1/p)$ mit $1 < p < \infty$ und $s > 1/p$ gegeben. Sei $p_0 = 1$ und $p_1 = \infty$. Wir wählen eine Zahl $1 < s_0 < p \cdot s$. Damit existiert eine Zahl $s_1 > 0$, mit

$$\boxed{\begin{array}{llll} (i) & \frac{1}{p} & = & \frac{1-\vartheta}{p_0} + \frac{\vartheta}{p_1} \\ & & & \\ (ii) & s & = & (1-\vartheta)s_0 + \vartheta s_1 \end{array}}$$

für ein $\vartheta \in (0,1)$. Es gilt nämlich $(i) \Leftrightarrow \vartheta = 1 - 1/p$. Und damit $(i), (ii) \Leftrightarrow s_1 = \frac{s - \frac{s_0}{p}}{1-\frac{1}{p}} > 0$. Wir betrachten den Operator

$$I - I_N^\lambda : C(\mathbb{T}) \to C(\mathbb{T}).$$

Wir setzen hier also $E = F = C(\mathbb{T})$. Lemma 1.24 und Lemma 1.25 geben Auskunft über das Verhalten von $I - I_N^\lambda$ zwischen den Eckräumen. D.h. es gilt:

$$\|I - I_N^\lambda : b_{p_0,\infty}^{s_0}(\mathbb{T}) \to L_{p_0}(\mathbb{T})\| \leq C_0 N^{-s_0} \quad \text{und} \quad \|I - I_N^\lambda : b_{p_1,\infty}^{s_1}(\mathbb{T}) \to L_{p_1}(\mathbb{T})\| \leq C_1 N^{-s_1}.$$

Mit (1.11.5) folgt dann:

$$\begin{aligned} \|I - I_N^\lambda : b_{p,\infty}^s(\mathbb{T}) \to L_p(\mathbb{T})\| &\leq \underbrace{C_0^{1-\vartheta} C_1^\vartheta}_{c(p,s)} N^{-s_0(1-\vartheta)} N^{-s_1\vartheta} \\ &= cN^{-s}. \end{aligned} \tag{1.11.6}$$

Sei jetzt $f \in B_{p,\infty}^s(\mathbb{T})$. Dann gilt wegen (1.11.6) für alle $M \in \mathbb{N}$ die Ungleichung:

$$\begin{aligned} \|V_{2M-1}f - I_N^\lambda(V_{2M-1}f)|L_p(\mathbb{T})\| &\leq cN^{-s}\|V_{2M-1}f|b_{p,\infty}^s(\mathbb{T})\| \\ &= cN^{-s}\|V_{2M-1}f|B_{p,\infty}^s(\mathbb{T})\| \\ &\underset{(1.10.39)}{\leq} CN^{-s}\|f|B_{p,\infty}^s(\mathbb{T})\|. \end{aligned} \tag{1.11.7}$$

Damit haben wir:

$$\begin{aligned} \|f - I_N^\lambda f|L_p(\mathbb{T})\| &\leq \|f - V_{2M-1}f|L_p(\mathbb{T})\| + \underbrace{\|V_{2M-1}f - I_N^\lambda(V_{2M-1}f)|L_p(\mathbb{T})\|}_{\leq CN^{-s}\|f|B_{p,\infty}^s(\mathbb{T})\|} \\ &+ \|I_N^\lambda(V_{2M-1}f - f)|L_p(\mathbb{T})\|. \end{aligned}$$

Sei $\varepsilon > 0$. Dann existiert wegen Lemma 1.10 und der Stetigkeit von f ein M, so dass

$$\|f - V_{2M-1}f|L_p(\mathbb{T})\| + \|I_N^\lambda(V_{2M-1}f - f)|L_p(\mathbb{T})\| < \varepsilon \text{ gilt.}$$

Wegen (1.11.7) ist also

$$\|f - I_N^\lambda f|L_p(\mathbb{T})\| \leq CN^{-s}\|f|B_{p,\infty}^s(\mathbb{T})\|.$$

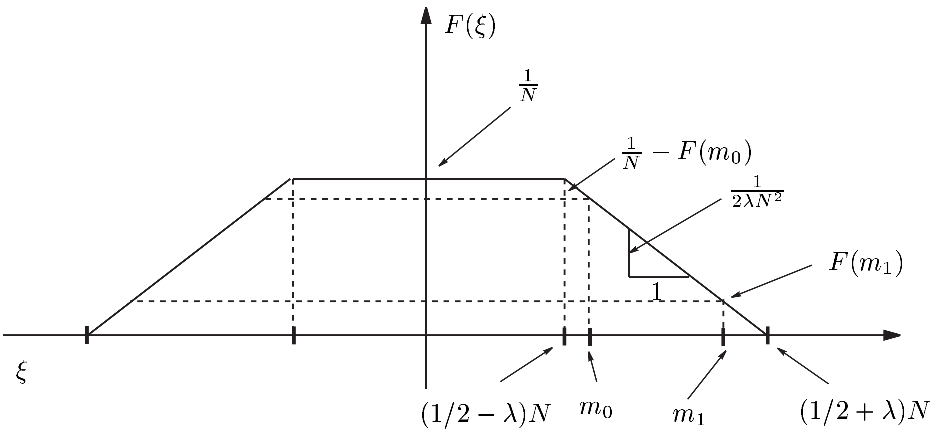
$\square$

Für bestimmte Zwecke ist es erforderlich, die Fundamnetalinterpolanten $\Lambda_N^\pi(x)$ als Linearkombination von DIRICHLET-Kernen darzustellen. Damit meinen wir die trigonometrischen Polynome

$$D_M(x) = \sum_{|k| \leq M} e^{ikx} \quad \text{für} \quad M \in \mathbb{N}_0$$

(siehe Abschnitt 1.5, dort haben diese Kerne noch den Vorfaktor $\frac{1}{2}$). Wir wissen:

$$\Lambda_N^\pi(x) = \sum_{|\ell| \leq (1/2+\lambda)N} F(\ell) e^{i\ell x},$$



mit $F(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}N}\mathcal{F}\Lambda_\lambda\left(\frac{\xi}{N}\right)$. In der Abbildung ist diese Funktion graphisch dargestellt. Dabei kommen die natürlichen Zahlen m_0, m_1 folgendermassen zustande:

$$m_0 := \lceil (1/2-\lambda)N \rceil \quad \text{und} \quad m_1 := \lfloor (1/2+\lambda)N \rfloor.$$

Wir weisen daraufhin, dass durch $\lceil\cdot\rceil$ bzw. $\lfloor\cdot\rfloor$ aufgerundet bzw abgerundet wird und ganze Zahlen nicht verändert werden. m_0 bzw. m_1 können also durchaus mit $(1/2-\lambda)N$ bzw. $(1/2+\lambda)N$ zusammenfallen. Wir setzen voraus, dass das N hinreichend gross ist, so dass wir keine Spezialfälle betrachten müssen. Sei also N so gross, dass $m_1 > m_0$ gilt. Mit Hilfe der Abbildung kann man dann die Linearkombination sofort hinschreiben: Wir haben:

$$\begin{aligned}
\Lambda_N^\pi(x) &= \left(\frac{1}{N} - F(m_0)\right) D_{m_0-1}(x) + \sum_{k=m_0}^{m_1-1} \frac{1}{2\lambda N^2} D_k(x) + F(m_1) D_{m_1}(x) \\
&= \frac{1}{N}\left(1 - \frac{1}{2\lambda}(1/2+\lambda-m_0/N)\right) D_{m_0-1}(x) + \sum_{k=m_0}^{m_1-1} \frac{1}{2\lambda N^2} D_k(x) \\
&\quad + \frac{1}{2\lambda N}(1/2+\lambda-m_1/N) D_{m_1}(x).
\end{aligned}$$

Gilt $m_0 = (1/2-\lambda)N$ und $m_1 = (1/2+\lambda)N$, so ist

$$\Lambda_N^\pi(x) = \frac{1}{N}\frac{1}{m_1-m_0}\sum_{k=m_0}^{m_1-1} D_k(x). \tag{1.11.8}$$

Dabei erinnert $\frac{1}{m_1-m_0}\sum\limits_{k=m_0}^{m_1-1} D_k(x)$ stark an die in Definition 1.4/(1.5.3) eingeführten de la Vallée Poussin-Kerne. Daher sprechen wir in diesem Abschnitt auch von Interpolation mit de la Vallée Poussin-Kernen. Wir werden im Folgenden für $\lambda = 1/4$ eine explizite Darstellung der Fundamentalinterpolanten $\Lambda_N^\pi(x)$ angeben. Damit wäre man dann in der Lage, die Funktionen $I_N f$ explizit zu berechnen. Dazu schlagen wir einen anderen Weg als den eben begonnenen ein.
Sei also jetzt $\lambda = 1/4$. Dann ist

$$\Lambda(x) := \Lambda_{\frac{1}{4}}(x) = 8\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)\sin\left(\frac{x}{4}\right)}{x^2}.$$

Wir betrachten für ein $N \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}\Lambda_N^\pi(x) &= 8\sum_{\ell\in\mathbb{Z}} \frac{\sin\left(\frac{Nx+2\pi\ell N}{2}\right)\sin\left(\frac{Nx+2\pi\ell N}{4}\right)}{(Nx+2\pi\ell N)^2}\\ &= \frac{8}{N^2}\sum_{\ell\in\mathbb{Z}} \frac{\sin\left(\frac{Nx+2\pi\ell N}{2}\right)\sin\left(\frac{Nx+2\pi\ell N}{4}\right)}{(x+2\pi\ell)^2}\end{aligned}$$

Wir betrachten diese Reihe vorerst auf $(-\pi,\pi)\setminus\{0\}$, um die Null im Nenner zu umgehen. Mit den Additionstheoremen erhält man

$$\begin{aligned}\sin\left(\frac{Nx+2\pi\ell N}{2}\right) &= \sin\left(\frac{Nx}{2}\right)\cos(\pi\ell N)+\cos\left(\frac{Nx}{2}\right)\sin(\pi\ell N)\\ &= \sin\left(\frac{Nx}{2}\right)(-1)^{\ell N}.\end{aligned}$$

Analog bekommt man

$$\begin{aligned}\sin\left(\frac{Nx+2\pi\ell N}{4}\right) &= \sin\left(\frac{Nx}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}\ell N\right)+\cos\left(\frac{Nx}{4}\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}\ell N\right)\\ &= a_{\ell N}\sin\left(\frac{Nx}{4}\right)+b_{\ell N}\cos\left(\frac{Nx}{4}\right),\end{aligned}$$

mit

$$a_k=\cos\left(k\frac{\pi}{2}\right)=\begin{cases}1 &: k\equiv 0(4)\\ 0 &: k\equiv 1(4)\\ -1 &: k\equiv 2(4)\\ 0 &: k\equiv 3(4)\end{cases}\quad \text{und}\quad b_k=\sin\left(k\frac{\pi}{2}\right)=\begin{cases}0 &: k\equiv 0(4)\\ 1 &: k\equiv 1(4)\\ 0 &: k\equiv 2(4)\\ -1 &: k\equiv 3(4)\end{cases}.$$

man erhält die Darstellung:

$$\Lambda_N^\pi(x)=\frac{8}{N^2}\sin\left(\frac{Nx}{2}\right)\left(\sin\left(\frac{Nx}{2}\right)\sum_{\ell\in\mathbb{Z}}\frac{a_{\ell N}}{(x+2\pi\ell)^2}-\cos\left(\frac{Nx}{4}\right)\sum_{\ell\in\mathbb{Z}}\frac{b_{\ell N}}{(x+2\pi\ell)^2}\right) \tag{1.11.9}$$

Als nächstes betrachten wir die Reihen

$$(1)\quad \sum_{\ell\in\mathbb{Z}}\frac{a_{\ell N}}{(x+2\pi\ell)^2}\quad \text{und}\quad (2)\quad \sum_{\ell\in\mathbb{Z}}\frac{b_{\ell N}}{(x+2\pi\ell)^2}.$$

Dazu ist eine Fallunterscheidung für die natürliche Zahl N nötig.

<u>*1. Fall:*</u> N ist ungerade.
In (1) fallen verschwinden alle Summanden, bei denen ℓN ungerade ist. Das führt zu folgender Gleichheit:

$$\sum_{\ell\in\mathbb{Z}}\frac{a_{\ell N}}{(x+2\pi\ell)^2}=\sum_{\ell\in\mathbb{Z}}\frac{a_{4\ell N}}{(x+2\pi 4\ell)^2}+\sum_{\ell\in\mathbb{Z}}\frac{a_{(4\ell+2)N}}{(x+2\pi(4\ell+2))^2}.$$

Das ergibt:

$$\boxed{\sum_{\ell\in\mathbb{Z}}\frac{a_{\ell N}}{(x+2\pi\ell)^2}=\sum_{\ell\in\mathbb{Z}}\frac{1}{(x+2\pi 4\ell)^2}-\sum_{\ell\in\mathbb{Z}}\frac{1}{(x+2\pi(4\ell+2))^2}}.$$

Man kann die Reihe aufgrund Ihrer absoluten Konvergenz derartig umordnen.
In (2) verschwinden die Reihenglieder, bei denen ℓN gerade, d.h. ℓ gerade ist. Man erhält damit:

$$\sum_{\ell\in\mathbb{Z}}\frac{b_{\ell N}}{(x+2\pi\ell)^2}=\sum_{\ell\in\mathbb{Z}}\frac{b_{(4\ell+1)N}}{(x+2\pi(4\ell+1))^2}+\sum_{\ell\in\mathbb{Z}}\frac{b_{(4\ell+3)N}}{(x+2\pi(4\ell+3))^2}. \tag{1.11.10}$$

Fall 1.1: Es ist $N \equiv 1(4)$.
Dann vereinfacht sich (1.11.10) zu

$$\boxed{\sum_{\ell\in\mathbb{Z}} \frac{b_{\ell N}}{(x+2\pi\ell)^2} = \sum_{\ell\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(x+2\pi(4\ell+1))^2} - \sum_{\ell\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(x+2\pi(4\ell+3))^2}}.$$

Fall 1.2: Es ist $N \equiv 3(4)$.
Dann erhält man:

$$\boxed{\sum_{\ell\in\mathbb{Z}} \frac{b_{\ell N}}{(x+2\pi\ell)^2} = \sum_{\ell\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(x+2\pi(4\ell+3))^2} - \sum_{\ell\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(x+2\pi(4\ell+1))^2}}.$$

2. Fall N ist gerade.
Das hat zur Folge, dass ℓN gerade ist und damit verschwindet (2) komplett, d.h

$$\boxed{\sum_{\ell\in\mathbb{Z}} \frac{b_{\ell N}}{(x+2\pi\ell)^2} = 0}.$$

Fall 2.1: Es ist $N \equiv 0(4)$.
Dann ist auch $\ell N \equiv 0(4)$, was

$$\boxed{\sum_{\ell\in\mathbb{Z}} \frac{a_{\ell N}}{(x+2\pi\ell)^2} = \sum_{l\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(x+2\pi\ell)^2}}$$

impliziert.

Fall 2.2: Es ist $N \equiv 2(4)$.
In diesem Fall kann man folgendermassen zerlegen:

$$\sum_{\ell\in\mathbb{Z}} \frac{a_{\ell N}}{(x+2\pi\ell)^2} = \sum_{\ell\in\mathbb{Z}} \frac{a_{2\ell N}}{(x+2\pi 2\ell)^2} + \sum_{\ell\in\mathbb{Z}} \frac{a_{(2\ell+1)N}}{(x+2\pi(2\ell+1))^2}.$$

Daraus folgt:

$$\boxed{\sum_{\ell\in\mathbb{Z}} \frac{a_{\ell N}}{(x+2\pi\ell)^2} = \sum_{\ell\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(x+4\pi\ell)^2} - \sum_{\ell\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(x+2\pi(2\ell+1))^2}}.$$

Hier kommen immer wieder Reihen der Bauart

$$\sum_{\ell\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(x+2\pi m+(2\pi k)\ell)^2}$$

vor, wobei $x \in (-\pi,\pi)\setminus\{0\}$, $k \in \mathbb{N}$ und $m \in \mathbb{N}_0$ feste Zahlen sind.
Diese Reihen behandeln wir mittels der Partialbruchzerlegung der Cotangens-Funktion. Es gilt die folgende Identität:

$$\pi\cot(\pi x) = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x+n} + \frac{1}{x-n},$$

für alle $x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$.
Unter diesem Gesichtspunkt betrachten wir für $k \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{N}_0$ und $x \in (-\pi,\pi)\setminus\{0\}$ folgende Reihe

$$f_0(x) + \sum_{\ell=1}^{\infty}(f_\ell(x) + f_{-\ell}(x)),$$

mit

$$f_\ell(x) = \frac{1}{x+2\pi m+(2\pi k)\ell} \quad , \quad \ell \in \mathbb{Z}.$$

Wir erhalten

$$
\begin{aligned}
f_0(x)+\sum_{\ell=1}^{\infty}(f_\ell(x)+f_{-\ell}(x)) &= \frac{1}{2\pi k}\left(\frac{1}{\frac{x+2\pi m}{2\pi k}}+\sum_{\ell=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\frac{x+2\pi m}{2\pi k}+\ell}+\frac{1}{\frac{x+2\pi m}{2\pi k}-\ell}\right)\right)\\
&= \frac{1}{2\pi k}\pi\cot\left(\pi\frac{x+2\pi m}{2\pi k}\right)\\
&= \frac{1}{2k}\cot\left(\frac{x}{2k}+\pi\frac{m}{k}\right) \qquad (1.11.11)\\
&=: g_{m,k}(x).
\end{aligned}
$$

Weiter ist klar, dass die Reihe

$$
\begin{aligned}
f_0'(x)+\sum_{\ell=1}^{\infty}f_\ell'(x)+f_{-\ell}'(x) &= -\frac{1}{(x+2\pi m)^2}-\sum_{\ell=1}^{\infty}\left(\frac{1}{(x+2\pi m+(2\pi k)\ell)^2}+\frac{1}{(x+2\pi m-(2\pi k)\ell)^2}\right)\\
&= -\sum_{l\in\mathbb{Z}}\frac{1}{(x+2\pi m(2\pi k)\ell)^2}\\
&=: h_{m,k}(x).
\end{aligned}
$$

in jeder Umgebung $U(x)\subset(-\pi,\pi)\setminus\{0\}$ gleichmässig konvergiert. Sie verhält sich nämlich wie $-\sum_{l\in\mathbb{Z}}\frac{1}{\ell^2}$. Mit diesen Tatsachen lässt sich nun ein Satz aus der elementaren Analysis anwenden, der besagt, dass in dieser Situation

$$h_{m,k}(x)=g_{m,k}'(x)$$

auf $(-\pi,\pi)\setminus\{0\}$ gilt. Mit (1.11.11) folgt schliesslich, dass

$$
\begin{aligned}
\sum_{\ell\in\mathbb{Z}}\frac{1}{(x+2\pi m+(2\pi k)\ell)^2} &= -\frac{1}{2k}\left(\frac{d}{dx}\cot\left(\frac{\cdot}{2k}+\pi\frac{m}{k}\right)\right)\\
&= \frac{1}{(2k)^2}\cdot\frac{1}{\sin^2\left(\frac{x}{2k}+\pi\frac{m}{k}\right)} \qquad (1.11.12)
\end{aligned}
$$

gilt. Jetzt ist man in der Lage, die Reihen (1) und (2) für jedes N explizit zu berechnen (siehe eingerahmte Formeln). Wir zeigen dies exemplarisch für den *Fall 1.1* und Reihe (2). Wir haben

$$
\begin{aligned}
\sum_{\ell\in\mathbb{Z}}\frac{b_{\ell N}}{(x+2\pi\ell)^2} &= \sum_{\ell\in\mathbb{Z}}\frac{1}{(x+2\pi(4\ell+1))^2}-\sum_{\ell\in\mathbb{Z}}\frac{1}{(x+2\pi(4\ell+3))^2}\\
\overset{(1.11.12)}&{=} \frac{1}{64}\left(\frac{1}{\sin^2\left(\frac{x}{8}+\frac{1}{4}\pi\right)}-\frac{1}{\sin^2\left(\frac{x}{8}+\frac{3}{4}\pi\right)}\right).
\end{aligned}
$$

Wegen $\sin(x/8+3/4\pi)=\cos(x/8+\pi/4)$, gilt:

$$
\begin{aligned}
\sum_{\ell\in\mathbb{Z}}\frac{b_{\ell N}}{(x+2\pi\ell)^2} &= \frac{1}{64}\left(\frac{1}{\sin^2\left(\frac{x}{8}+\frac{1}{4}\pi\right)}-\frac{1}{\cos^2\left(\frac{x}{8}+\frac{1}{4}\pi\right)}\right)\\
&= -\frac{1}{64}\frac{2\sin^2\left(\frac{x}{8}+\frac{1}{4}\pi\right)-1}{\frac{1}{4}\sin^2\left(\frac{x}{4}+\frac{\pi}{2}\right)}.
\end{aligned}
$$

Wegen $\sin^2(x/8+\pi/4)=(\sin(x/8)\cos(\pi/4)+\cos(x/8)\sin(\pi/4))^2=1/2(\sin(x/8)+\cos(x/8))^2=1/2(1+2\sin(x/8)\cos(x/8))=1/2+\sin(x/8)\cos(x/8)$ erhält man:

$$
\begin{aligned}
\sum_{\ell\in\mathbb{Z}}\frac{b_{\ell N}}{(x+2\pi\ell)^2} &= -\frac{1}{16}\frac{2\sin\left(\frac{x}{8}\right)\cos\left(\frac{x}{8}\right)}{\cos^2\left(\frac{x}{4}\right)}\\
&= -\frac{1}{16}\frac{\sin\left(\frac{x}{4}\right)}{\cos^2\left(\frac{x}{4}\right)}
\end{aligned}
$$

Analog findet man die Darstellungen:

$$
\begin{aligned}
N \equiv 0(4) \quad &: \quad \sum_{\ell\in\mathbb{Z}} \frac{a_{\ell N}}{(x+2\pi\ell)^2} = \frac{1}{4}\frac{1}{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)} \quad , \quad \sum_{\ell\in\mathbb{Z}} \frac{b_{\ell N}}{(x+2\pi\ell)^2} = 0, \\
N \equiv 1(4) \quad &: \quad \sum_{\ell\in\mathbb{Z}} \frac{a_{\ell N}}{(x+2\pi\ell)^2} = \frac{1}{16}\frac{\cos\left(\frac{x}{4}\right)}{\sin^2\left(\frac{x}{4}\right)} \quad , \quad \sum_{\ell\in\mathbb{Z}} \frac{b_{\ell N}}{(x+2\pi\ell)^2} = -\frac{1}{16}\frac{\sin\left(\frac{x}{4}\right)}{\cos^2\left(\frac{x}{4}\right)}, \\
N \equiv 2(4) \quad &: \quad \sum_{\ell\in\mathbb{Z}} \frac{a_{\ell N}}{(x+2\pi\ell)^2} = \frac{1}{4}\frac{\cos\left(\frac{x}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)} \quad , \quad \sum_{\ell\in\mathbb{Z}} \frac{b_{\ell N}}{(x+2\pi\ell)^2} = 0, \\
N \equiv 3(4) \quad &: \quad \sum_{\ell\in\mathbb{Z}} \frac{a_{\ell N}}{(x+2\pi\ell)^2} = \frac{1}{16}\frac{\cos\left(\frac{x}{4}\right)}{\sin^2\left(\frac{x}{4}\right)} \quad , \quad \sum_{\ell\in\mathbb{Z}} \frac{b_{\ell N}}{(x+2\pi\ell)^2} = \frac{1}{16}\frac{\sin\left(\frac{x}{4}\right)}{\cos^2\left(\frac{x}{4}\right)}.
\end{aligned}
$$

Setzt man diese Terme in (1.11.9) ein, dann bekommt $\Lambda_N^\pi(x)$ folgende Gestalt:

(i) Für $N \equiv 0(4)$ gilt

$$\Lambda_N^\pi(x) = \frac{1}{N^2} 2\sin\left(\frac{Nx}{2}\right)\sin\left(\frac{Nx}{4}\right)\frac{1}{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)},$$

(ii) für $N \equiv 1(4)$

$$\Lambda_N^\pi(x) = \frac{1}{N^2}\frac{1}{2}\sin\left(\frac{Nx}{2}\right)\left(\sin\left(\frac{Nx}{4}\right)\frac{\cos\left(\frac{x}{4}\right)}{\sin^2\left(\frac{x}{4}\right)} + \cos\left(\frac{Nx}{4}\right)\frac{\sin\left(\frac{x}{4}\right)}{\cos^2\left(\frac{x}{4}\right)}\right),$$

(iii) für $N \equiv 2(4)$

$$\Lambda_N^\pi(x) = \frac{1}{N^2} 2\sin\left(\frac{Nx}{2}\right)\sin\left(\frac{Nx}{4}\right)\frac{\cos\left(\frac{x}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}$$

und schliesslich

(iv) für $N \equiv 3(4)$

$$\Lambda_N^\pi(x) = \frac{1}{N^2}\frac{1}{2}\sin\left(\frac{Nx}{2}\right)\left(\sin\left(\frac{Nx}{4}\right)\frac{\cos\left(\frac{x}{4}\right)}{\sin^2\left(\frac{x}{4}\right)} - \cos\left(\frac{Nx}{4}\right)\frac{\sin\left(\frac{x}{4}\right)}{\cos^2\left(\frac{x}{4}\right)}\right).$$

Kapitel 2

Periodische Interpolation auf $\mathbb{T}^2$

2.1 Vorbemerkungen

Definition 2.1 Sei $n \in \mathbb{N}$.

(i) Sei $1 \leq p \leq \infty$. Wir setzen:

$$L_p(\mathbb{T}^n) := \left\{ f : \mathbb{T}^n \to \mathbb{C} \text{ Lebesgue-messbar} : \|f|L_p(\mathbb{T}^n)\| = \left(\int\limits_{\mathbb{T}^n} |f(x)|^p \right)^{1/p} < \infty \right\}.$$

Im Falle $p = \infty$ ersetzt man das Integral durch das wesentliche Supremum:

$$\|f|L_\infty(\mathbb{T}^n)\| := \inf\{r \in \mathbb{R} : \{x \in \mathbb{T}^n : |f(x)| > r\} \text{ ist Lebesgue-Nullmenge}\}.$$

(ii) Sei $\Lambda \in \mathbb{Z}^n$ eine endliche Menge. Dann definieren wir mit

$$T^\Lambda := \left\{ t = \sum_{k \in \Lambda} c_k e^{ik \cdot x} : c_k \in \mathbb{C} \right\}$$

die zu Λ gehörende Menge trigonometrischer Polynome. Dabei ist für $k = (k_1, ..., k_n)$ und $x = (x_1, ..., x_n)$

$$k \cdot x = k_1 x_1 + ... + k_n x_n.$$

Die Gesamtheit aller trigonometrischen Polynome auf $\mathbb{T}^n$ bezeichnen wir mit $T(\mathbb{T}^n)$.

(iii) Sei $f \in L_1(\mathbb{T}^n)$. Dann erklärt man für $k = (k_1, ..., k_n) \in \mathbb{Z}^n$ den Fourierkoeffizienten $c_k(f)$ durch

$$c_k(f) = c_{(k_1, \ldots, k_n)}(f) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int\limits_{\mathbb{T}^n} f(x) e^{-ik \cdot x} dx.$$

(iv) $C(\mathbb{T}^n)$ bezeichnet den Raum der stetigen Funktionen $f : \mathbb{T}^n \to \mathbb{C}$ ausgestattet mit der Norm

$$\|f|C(\mathbb{T}^n)\| = \sup_{x \in \mathbb{T}^n} |f(x)|.$$

Bemerkung 2.1 Ist $f \in L_1(\mathbb{T}^n)$ von der Struktur $f(x_1, x_2, ..., x_n) = f_1(x_1) \cdot ... \cdot f_n(x_n)$ (fast überall), so gilt für $k = (k_1, ..., k_n) \in \mathbb{Z}^n$ die Gleichung

$$c_k(f) = c_{(k_1, \ldots, k_n)}(f) = c_{k_1}(f_1) \cdot ... \cdot c_{k_n}(f_n). \tag{2.1.1}$$

Diese Tatsache ist eine simple Konsequenz aus dem Satz von Fubini.

2.2 Tensorprodukte von Interpolationsoperatoren auf $\mathbb{T}$

Definition 2.2 Sei $\{\Lambda_N^\pi\}_{N\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Fundamentalinterpolanten gemäss Definition 1.11 und $\{I_N\}_{N\in\mathbb{N}}$ die zugehörige Folge von Interpolationsoperatoren gemäss Definition 1.12. Sei weiter $f : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion.

(i) Für $N, M \in \mathbb{N}$ erklären wir das Tensorprodukt $I_N \otimes I_M$ durch:

$$(I_N \otimes I_M)f(x_1, x_2) := \sum_{\ell\in J_N} \sum_{m\in J_M} f(x_\ell^N, x_m^M)\Lambda_N^\pi(x_1 - x_\ell^N)\Lambda_M^\pi(x_2 - x_m^M). \tag{2.2.1}$$

(ii) Für $N \in \mathbb{N}$ erklären wir

$$\begin{aligned}(I \otimes I_N)f(x_1, x_2) &:= \sum_{\ell\in J_N} f(x_1, x_\ell^N))\Lambda_N^\pi(x_2 - x_\ell^N) \quad , \\ (I_N \otimes I)f(x_1, x_2) &:= \sum_{\ell\in J_N} f(x_\ell^N, x_2)\Lambda_N^\pi(x_1 - x_\ell^N) \quad \text{und} \\ (I \otimes I)f &:= f.\end{aligned} \tag{2.2.2}$$

$I \otimes I$ ist damit die Identität auf $C(\mathbb{T}^2)$.

Lemma 2.1 Sei Λ_N^π und I_N wie in der Definition. Seien $M, N \in \mathbb{N}$, $k = (k_1, k_2) \in \mathbb{Z}^2$ und $f : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion. Dann gilt:

$$c_k(I_N \otimes I_M)f) = c_{k_1}(\Lambda_N^\pi)c_{k_2}(\Lambda_M^\pi) \sum_{l\in J_N} \sum_{m\in J_M} f(x_l^N, x_m^M)e^{-i(k_1x_l^N + k_2x_m^M)}. \tag{2.2.3}$$

Ist f von der Struktur $f(x_1, x_2) = g \otimes h(x_1, x_2) := g(x_1)h(x_2)$, dann gilt für $N, M \in \mathbb{N}_0$

$$(I_N \otimes I_M)f = I_N g \otimes I_M h,$$

wobei wir der Einfachheit halber $I_0 := I$ setzen. Das hat dann

$$c_k((I_N \otimes I_M)f) = c_{k_1}(I_N g)c_{k_2}(I_M h).$$

zur Folge.

Beweis

Schritt 1:

Es gilt:

$$c_k((I_N \otimes I_M)f) \overset{\text{(Linearität)}}{=} \sum_{l\in J_N} \sum_{m\in J_M} f(x_l^N, x_m^M)\frac{1}{(2\pi)^2}\int_{\mathbb{T}} \Lambda_N^\pi(x_1 - x_l^N)\Lambda_M^\pi(x_2 - x_m^M)d(x_1, x_2)$$

Mit dem Satz von Fubini lässt sich letztes Integral als iteriertes Integral über $\mathbb{T}$ schreiben. Das heisst:

$$\begin{aligned}c_k((I_N \otimes I_M)f) &= \sum_{l\in J_N} \sum_{m\in J_M} f(x_l^N, x_m^M)e^{-ik_1x_l^N}e^{-ik_2x_m^M}\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} \Lambda_N^\pi(x_1)e^{-ik_1x_1}\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} \Lambda(x_2)e^{-ik_2x_2}dx_2\,dx_1 \\ &= c_{k_1}(\Lambda_N^\pi)c_{k_2}(\Lambda_M^\pi) \sum_{l\in J_N} \sum_{m\in J_M} f(x_l^N, x_m^M)e^{-ik_1x_l^N}e^{-ik_2x_m^M} \\ &= c_{k_1}(\Lambda_N^\pi)c_{k_2}(\Lambda_M^\pi) \sum_{l\in J_N} \sum_{m\in J_M} f(x_l^N, x_m^M)e^{-i(k_1x_l^N + k_2x_m^M)}.\end{aligned}$$

Schritt 2:

Mit der Voraussetzung $f = g \otimes h$ ergibt sich in der Definition (siehe (2.2.1)) des Tensorproduktes folgende Vereinfachung:

$$\begin{aligned}(I_N \otimes I_M)f(x_1, x_2) &= \sum_{l \in J_N} g(x_l^N)\Lambda(x_1 - x_l^N) \sum_{m \in J_M} h(x_m^M)\Lambda(x_2 - x_m^M) \\ &= I_N g(x_1) I_M h(x_2).\end{aligned}$$

Die Aussage über die Fourierkoeffizienten des Tensorproduktes ist eine Konsequenz aus der Bemerkung 2.1.

□

Beispiel 2.1 Sei $l = (l_1, l_2)$, $k = (k_1, k_2) \in \mathbb{Z}^2$. Seien $N, M \in \mathbb{N}$ und $f(x) = e^{ikx}$. Wegen $f(x) = e^{ikx} = e^{ik_1x_1}e^{ik_2x_2}$ folgt aus dem Lemma:

$$c_l((I_N \otimes I_M)f) = c_{l_1}(I_N e^{ik_1x_1})c_{l_2}(I_M e^{ik_2x_2}).$$

Da $e^{ik_1x_1}$, $e^{ik_2x_2} \in \mathcal{A}(\mathbb{T})$, folgt mit (1.8.4):

$$c_{l_1}(I_N e^{ik_1\cdot}) = N c_{l_1}(\Lambda_N^\pi) d_N(l_1, k_1) \quad \text{und} \quad c_{l_2}(I_M e^{ik_2\cdot}) = M c_{l_2}(\Lambda_M^\pi) d_M(l_2, k_2),$$

wobei

$$d_L(m, n) = \begin{cases} 1 & : \quad L|m - n \\ 0 & : \quad \text{sonst} \end{cases} .$$

und $L|m-n$ die Abkürzung für „L teilt $m - n$" ist. Also ist

$$c_l((I_N \otimes I_M)f) = NM c_{l_1}(\Lambda_N^\pi) c_{l_2}(\Lambda_M^\pi) d_N(l_1, k_1) d_M(l_2, k_2).$$

2.3 Die Smolyak-Konstruktion

Definition 2.3 (SMOLYAK)
Sei $\{I_N\}_{N\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Interpolationsoperatoren. Dann ist durch

$$B_m = \sum_{j=0}^{m} L_{j,m-j} - \sum_{j=0}^{m-1} L_{j,m-j-1}\,, \quad m \in \mathbb{N} \tag{2.3.1}$$

mit $L_{j,k} = I_{2^j} \otimes I_{2^k}$ eine Folge von Operatoren auf $C(\mathbb{T}^2)$ erklärt.

Bemerkung 2.2 Ein solcher Operator B_m erhält als Argument eine stetige Funktion $f : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{C}$ und benutzt nur eine Anzahl diskreter Werte der Funktion f, die offensichtlich die Grössenordnung $m2^m$ hat.

Wir untersuchen im Folgenden die SMOLYAK-Konstruktion, die sich ergibt, wenn man als Interpolationsoperatoren die I_N^λ aus 1.11 zugrunde legt. Sei also für $0 < \lambda < \frac{1}{2}$

$$B_m^\lambda = \sum_{j=0}^{m} L_{j,m-j}^\lambda - \sum_{j=0}^{m-1} L_{j,m-j-1}^\lambda$$

mit $L_{j,k}^\lambda = I_{2^j}^\lambda \otimes I_{2^k}^\lambda$. Um gewisse Eigenschaften der Fourierkoeffizienten der Funktionen $B_m f$ nachzuweisen, ist die folgende Definition nötig.

Definition 2.4 Sei $m \in \mathbb{N}$. Wir setzen

(i)

$$H_m := \{(l_1, l_2) \in \mathbb{Z}^2 : \exists\, u \in \{0, ..., m\}, \text{ so dass } |l_1| < 2^u(1/2+\lambda) \text{ und } |l_2| < 2^{m-u}(1/2+\lambda)\}$$

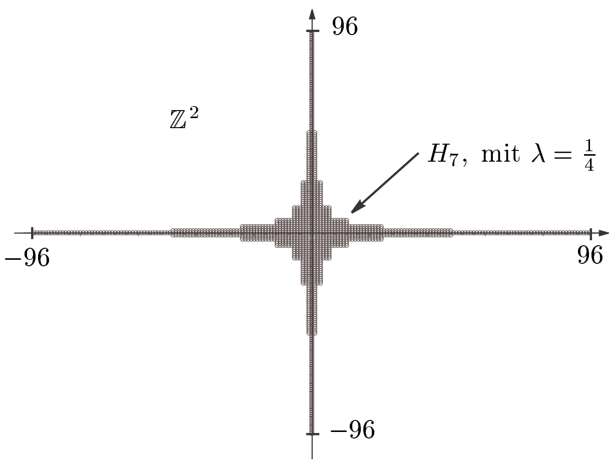
und

(ii)

$$K_m := \{(l_1, l_2) \in \mathbb{Z}^2 : \exists\, \ell \in \{0, ..., m\}, \text{ so dass } |l_1| \le 2^\ell(1/2-\lambda) \text{ und } |l_2| \le 2^{m-\ell}(1/2-\lambda)\}.$$

Die Menge H_m bzw. K_m bezeichnet man auch aufgrund ihrer Struktur als hyperbolisches Kreuz in $\mathbb{Z}^2$.

Die folgende Abbildung zeigt ein solches Hyperbolisches Kreuz.



Lemma 2.2 Sei $0 < \lambda < \frac{1}{2}$, $m \in \mathbb{N}$ und B_m^λ die spezielle SMOLYAK-Konstruktion. Es bezeichne H_m das hyperbolische Kreuz aus Definition 2.4. Sei weiter $f : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion. Dann gilt für $k \in \mathbb{Z}^2 \setminus H_m$

$$c_k(B_m^\lambda f) = 0.$$

Man hat also

$$B_m^\lambda : C(\mathbb{T}^2) \to T^{H_m}.$$

Beweis Wir bezeichnen mit Λ_N^λ die Fundamentalinterpolanten der Interpolationsoperatoren I_N^λ. Für $\ell = (l_1, l_2)$ und $M, N \in \mathbb{N}$ gilt dann mit Lemma 2.1

$$c_\ell((I_M^\lambda \otimes I_N^\lambda)f) = c_{l_1}(\Lambda_M^\lambda) c_{l_2}(\Lambda_N^\lambda) \sigma(f, M, N),$$

wobei $\sigma(f, M, N)$ den Wert der Doppelsumme in (2.2.3) bezeichnet. Mit (1.9.4) in Satz 1.9 ergibt sich

$$c_\ell((I_M^\lambda \otimes I_N^\lambda)f) = \frac{1}{NM2\pi} \mathcal{F}\Lambda_\lambda\left(\frac{l_1}{M}\right) \mathcal{F}\Lambda_\lambda\left(\frac{l_2}{N}\right) \sigma(f, M, N). \tag{2.3.2}$$

Sei $k \in \mathbb{Z}^2 \diagdown H_m$. Dann gilt für alle $u \in \{0, ..., m\}$

$$|k_1| \ge (1/2+\lambda)2^u \quad \text{oder} \quad |k_2| \ge (1/2+\lambda)2^{m-u}.$$

Setzt man in der Formel (2.3.2) $(l_1, l_2) = (k_1, k_2)$, $M = 2^j$ und $N = 2^{m-j}$ für beliebiges $j \in \{0, ..., m\}$, so folgt aufgrund von supp $\mathcal{F}\Lambda_\lambda = [-\lambda - 1/2, \lambda + 1/2]$ und $\mathcal{F}\Lambda_\lambda(-\lambda - 1/2) = \mathcal{F}\Lambda_\lambda(\lambda + 1/2) = 0$

$$\mathcal{F}\Lambda_\lambda\left(\frac{k_1}{2^j}\right) = 0 \quad \text{oder} \quad \mathcal{F}\Lambda_\lambda\left(\frac{k_2}{2^{m-j}}\right) = 0 \quad \text{und damit}$$

$$c_{(k_1,k_2)}(L^\lambda_{j,m-j}f) = 0.$$

Wegen $2^{m-j} > 2^{m-j-1}$ gilt Analoges auch für $M = 2^j$ und $N = 2^{m-j-1}$. Also ist

$$c_k(B^\lambda_m f) = \sum_{j=0}^{m} c_k(L^\lambda_{j,m-j}f) - \sum_{j=0}^{m-1} c_k(L^\lambda_{j,m-j-1}f) = 0.$$

□

Lemma 2.3 Sei $0 < \lambda < \frac{1}{2}$, $m \in \mathbb{N}$ und B^λ_m die spezielle SMOLYAK - Konstruktion. K_m bezeichne das hyperbolische Kreuz aus Definition 2.4. Sei weiter

$$t(x) = \sum_{k \in K_m} c_k e^{ikx}$$

ein trigonometrisches Polynom mit Frequenzen aus K_m. Dann ist

$$B^\lambda_m t = t.$$

B^λ_m ist also die Identität auf T^{K_m}.

Beweis Es genügt aus Linearitätsgründen zu zeigen: Sei $k = (k_1, k_2) \in K_m$ beliebig und $t(x) = e^{ikx} = e^{i(k_1x_1+k_2x_2)}$, dann gilt

$$B^\lambda_m t = t.$$

Wir zeigen dazu für $\ell \in H_m$:

$$c_\ell(B^\lambda_m t) = \begin{cases} 1 & : \quad k = l \\ 0 & : \quad k \neq l \end{cases}.$$

Sei also $k = (k_1, k_2) \in K_m$ beliebig. Sei weiter $\ell = (l_1, l_2) \in H_m$. Dann gilt wegen der Produktstruktur von $t(x_1, x_2) = e^{i(k_1x_1+k_2x_2)} = e^{ik_1x_1}e^{ik_2x_2}$ mit Lemma 2.1

$$c_{(l_1,l_2)}((I^\lambda_M \otimes I^\lambda_N)t) = c_{l_1}(I^\lambda_M e^{ik_1\cdot})c_{l_2}(I^\lambda_N e^{ik_2\cdot}). \tag{2.3.3}$$

Das führt dann zu

$$\begin{aligned} c_\ell(B^\lambda_m t) &= \sum_{j=0}^{m} c_\ell(L^\lambda_{j,m-j}t) - \sum_{j=0}^{m-1} c_\ell(L^\lambda_{j,m-j-1}t) \\ &= \sum_{j=0}^{m} c_{l_1}(I^\lambda_{2^j} e^{ik_1\cdot})c_{l_2}(I^\lambda_{2^{m-j}} e^{ik_2\cdot}) - \sum_{j=0}^{m-1} c_{l_1}(I^\lambda_{2^j} e^{ik_1\cdot})c_{l_2}(I^\lambda_{2^{m-j-1}} e^{ik_2\cdot}). \end{aligned} \tag{2.3.4}$$

Wie schon in Beispiel 2.1 gesehen, gilt für $N \in \mathbb{N}$ und $u, n \in \mathbb{Z}$ allgemein unter Benutzung von (1.9.4)

$$c_u(I^\lambda_N e^{in\cdot}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathcal{F}\Lambda_\lambda\left(\frac{u}{N}\right) \cdot \begin{cases} 1 & : \quad N|n-u \\ 0 & : \quad \text{sonst} \end{cases}. \tag{2.3.5}$$

Wegen $\mathcal{F}\Lambda_\lambda(\xi) = 0$ für $|\xi| \geq 1/2 + \lambda$ folgt sofort, dass

$$|u| \geq (1/2 + \lambda)N \quad \Longrightarrow \quad c_u(I^\lambda_N e^{in\cdot}) = 0 \tag{2.3.6}$$

gilt. Diese Tatsache werden wir im Folgenden häufig verwenden. Weiterhin entnimmt man der Darstellung, dass für $N|n-u$ und $|u| \leq N(1/2 - \lambda)$

$$c_u(I^\lambda_N e^{in\cdot}) = 1$$

gilt. Setzt man abkürzend $\varphi_\lambda(\xi) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathcal{F}\Lambda_\lambda(\xi)$, so erhält man für $u = n$

$$c_n(I^\lambda_N e^{in\cdot}) = \varphi_\lambda\left(\frac{n}{N}\right). \tag{2.3.7}$$

<u>1. Fall:</u> $(l_1, l_2) = (k_1, k_2)$

(2.3.4) wird mit (2.3.7) zu:

$$c_k(B_m^\lambda t) = \sum_{j=0}^{m} \varphi_\lambda\left(\frac{k_1}{2^j}\right)\varphi_\lambda\left(\frac{k_2}{2^{m-j}}\right) - \sum_{j=0}^{m-1} \varphi_\lambda\left(\frac{k_1}{2^j}\right)\varphi_\lambda\left(\frac{k_2}{2^{m-j-1}}\right). \tag{2.3.8}$$

Jetzt bezeichne $j_1 \in \{0, ..., m\}$ die kleinste Zahl und $j_1 \leq j_2 \in \{0, ..., m\}$ die grösste Zahl mit

$$|k_1| \leq 2^{j_i}(1/2 - \lambda) \quad \text{und} \quad |k_2| \leq 2^{m-j_i}(1/2 - \lambda), \quad i = 1, 2. \tag{2.3.9}$$

Solche Zahlen muss es geben, da $k = (k_1, k_2) \in K_m$. Damit kann man (2.3.8) auf folgende Weise zerlegen:

$$c_k(B_m^\lambda t) = S_1 + S_2 + S_3 - (S_4 + S_5 + S_6)$$

mit

$$S_1 := \sum_{j=0}^{j_1-1} \varphi_\lambda\left(\frac{k_1}{2^j}\right)\varphi_\lambda\left(\frac{k_2}{2^{m-j}}\right), \quad S_4 := \sum_{j=0}^{j_1-1} \varphi_\lambda\left(\frac{k_1}{2^j}\right)\varphi_\lambda\left(\frac{k_2}{2^{m-j-1}}\right),$$

$$S_2 := \sum_{j=j_1}^{j_2} \varphi_\lambda\left(\frac{k_1}{2^j}\right)\varphi_\lambda\left(\frac{k_2}{2^{m-j}}\right), \quad S_5 := \sum_{j=j_1}^{j_2-1} \varphi_\lambda\left(\frac{k_1}{2^j}\right)\varphi_\lambda\left(\frac{k_2}{2^{m-j-1}}\right),$$

und

$$S_3 := \sum_{j=j_2+1}^{m} \varphi_\lambda\left(\frac{k_1}{2^j}\right)\varphi_\lambda\left(\frac{k_2}{2^{m-j}}\right), \quad S_6 := \sum_{j=j_2}^{m-1} \varphi_\lambda\left(\frac{k_1}{2^j}\right)\varphi_\lambda\left(\frac{k_2}{2^{m-j-1}}\right).$$

Ist in einer Summe obere Schranke < unterer Schranke, so wird sie einfach 0 gesetzt. Aus der Definition von j_1 und j_2 folgen für $j_1 \leq j \leq j_2$ die Ungleichungen

$$\frac{|k_1|}{2^j} \leq \frac{1}{2} - \lambda \quad \text{und} \quad \frac{|k_2|}{2^{m-j}} \leq \frac{1}{2} - \lambda \tag{2.3.10}$$

Damit und wegen $\mathcal{F}\Lambda_\lambda(\xi) = \sqrt{2\pi}$ für $|\xi| \leq 1/2 - \lambda$ ist $S_2 - S_5 = 1$. Wir behandeln als nächstes die Differenz $S_1 - S_4$ und zeigen $S_1 - S_4 = 0$. Ist $j_1 = 0$, ist nichts zu zeigen. Ist $j_1 > 0$, dann gilt:

$$S_1 - S_4 = \sum_{j=0}^{j_1-1} \varphi_\lambda\left(\frac{k_1}{2^j}\right)\left(\varphi_\lambda\left(\frac{k_2}{2^{m-j}}\right) - \varphi_\lambda\left(\frac{k_2}{2^{m-j-1}}\right)\right).$$

Für $j < j_1$ erhält man wegen

$$2\frac{|k_2|}{2^{m-j}} = \frac{|k_2|}{2^{m-j-1}} \underset{(2.3.9)}{\leq} 2^{j-j_1+1}(1/2 - \lambda) \underset{j<j_1}{\leq} (1/2 - \lambda)$$

die Gleichung

$$\varphi_\lambda\left(\frac{k_2}{2^{m-j}}\right) = \varphi_\lambda\left(\frac{k_2}{2^{m-j-1}}\right) = 1$$

und damit $S_1 - S_4 = 0$.
Bleibt noch $S_3 - S_6$ zu betrachten. Auch hier wird $S_3 - S_6 = 0$ gezeigt. Für $j_2 = m$ ist wieder nichts zu zeigen. Ansonsten erhält man für $S_3 - S_6$ mittels Indexverschiebung ($j := j - 1$ in S_3) die Darstellung

$$S_3 - S_6 = \sum_{j=j_2}^{m-1} \varphi_\lambda\left(\frac{k_2}{2^{m-j-1}}\right)\left(\varphi_\lambda\left(\frac{k_1}{2^{j+1}}\right) - \varphi_\lambda\left(\frac{k_1}{2^j}\right)\right).$$

Mit

$$2\frac{|k_1|}{2^{j+1}} = \frac{|k_1|}{2^j} \underset{(2.3.9)}{\leq} 2^{j_2-j}(1/2-\lambda) \underset{j\geq j_2}{\leq} (1/2-\lambda)$$

folgt dann

$$\varphi_\lambda\left(\frac{k_1}{2^{j+1}}\right) = \varphi_\lambda\left(\frac{k_1}{2^j}\right) = 1.$$

Also ist $S_3 - S_6 = 0$. Insgesamt vereinfacht sich also $c_k(B_m^\lambda e^{ik\cdot})$ zu

$$\begin{aligned} c_k(B_m^\lambda t) &= (S_2 - S_5) + (S_1 - S_4) + (S_3 - S_6) \\ &= 1. \end{aligned}$$

<u>2. Fall:</u> $(l_1, l_2) \neq (k_1, k_2)$

<u>F. 2.1.:</u> $l_1 \neq k_1$ und $l_2 = k_2$

Für diesen Fall ist die folgende Darstellung von $B_m^\lambda t$ günstig:

$$B_m^\lambda = \sum_{j=0}^{m-1} (L_{j,m-j}^\lambda - L_{j,m-j-1}^\lambda) + L_{m,0}^\lambda$$

Mit (2.3.3) gilt hier:

$$c_{(l_1,l_2)}(B_m^\lambda t) = \sum_{j=0}^{m-1} c_{l_1}(I_{2^j}^\lambda e^{ik_1\cdot})[c_{l_2}(I_{2^{m-j}}^\lambda e^{ik_2\cdot}) - c_{l_2}(I_{2^{m-j-1}}^\lambda e^{ik_2\cdot})] + c_{l_1}(I_{2^m}^\lambda e^{ik_1\cdot})c_{l_2}(I_1^\lambda e^{ik_2\cdot})$$

Es soll $c_{l_1,l_2}(B_m^\lambda t) = 0$ gezeigt werden. Wir zeigen dazu zunächst, dass

$$c_{l_1}(I_{2^m}^\lambda e^{ik_1\cdot}) = 0 \tag{2.3.11}$$

gilt. Wegen (2.3.6) ist für $|l_1| \geq 2^m(1/2+\lambda)$ nichts zu zeigen. Bleibt noch $|l_1| < 2^m(1/2+\lambda)$ zu betrachten. Wegen $(k_1,k_2) \in K_m$ ist $|k_1| \leq 2^m(1/2-\lambda)$. Damit ist

$$|k_1 - l_1| \leq |k_1| + |l_1| < 2^m\left(\frac{1}{2} - \lambda + \frac{1}{2} + \lambda\right) = 2^m.$$

Wegen $0 < |k_1 - l_1| < 2^m$ kann 2^m nicht $k_1 - l_1$ teilen. Somit folgt (2.3.11) aus (2.3.5).
Jetzt zeigen wir, dass für jedes $j \in \{0, ..., m-1\}$

$$c_{l_1}(I_{2^j}^\lambda e^{ik_1\cdot})[c_{l_2}(I_{2^{m-j}}^\lambda e^{ik_2\cdot}) - c_{l_2}(I_{2^{m-j-1}}^\lambda e^{ik_2\cdot})] = 0 \tag{2.3.12}$$

gilt.
Sei $j \in \{0, ..., m-1\}$.
Da wir immernoch im *F. 2.1.* sind, gilt $|k_2| = |l_2|$. Es ist jetzt eine Unterscheidung nötig, in welchem Bereich (in Abhängigkeit von j) sich $|k_2|$ bzw. $|l_2|$ befindet.

<u>F. 2.1.1.:</u> $|k_2| = |l_2| \leq 2^{m-j-1}(1/2-\lambda)$

Wegen $l_2 = k_2$ und (2.3.5) sind beide Summanden in der eckigen Klammer 1 und damit ist die Klammer 0. Damit folgt (2.3.12).

<u>F. 2.1.2.:</u> $2^{m-j-1}(1/2-\lambda) < |l_2| = |k_2| \leq 2^{m-j}(1/2-\lambda)$

Wegen $(k_1,k_2) \in K_m$, existiert $u \in \{0, ..., m\}$ mit

$$|k_1| \leq 2^u(1/2-\lambda) \quad \text{und} \quad |k_2| \leq 2^{m-u}(1/2-\lambda). \tag{2.3.13}$$

Wegen $|k_2| > 2^{m-j-1}(1/2 - \lambda)$ ist klar, dass $u \le j$ gelten muss. Also muss (2.3.13) mit $u = j$ erfüllt sein und damit gilt

$$|k_1| \le 2^j(1/2 - \lambda).$$

Wegen des Vorfaktors vor der eckigen Klammer und (2.3.6), bleibt nur noch $|l_1| < 2^j(1/2 + \lambda)$ zu betrachten. Das zieht aber

$$0 < |k_1 - l_1| \le |k_1| + |l_1| < 2^j \left(\frac{1}{2} - \lambda + \frac{1}{2} + \lambda\right) = 2^j$$

nach sich. 2^j kann also nicht $k_1 - l_1$ teilen. Mit (2.3.5) folgt

$$c_{l_1}(I^\lambda_{2^j} e^{ik_1 \cdot}) = 0.$$

Und damit ergibt sich (2.3.12).

F. 2.1.3.: $2^{m-j}(1/2 - \lambda) < |l_2| = |k_2| \le 2^{m-j}(1/2 + \lambda)$

Wegen $(k_1, k_2) \in K_m$ gilt $|k_1||k_2| \le 2^m(1/2 - \lambda)^2$. Da $|k_2| > 2^{m-j}(1/2 - \lambda)$, muss

$$|k_1| < 2^j(1/2 - \lambda)$$

sein. Analog zu *F. 2.1.2.* gilt hier $c_{l_1}(I^\lambda_{2^j} e^{ik_1 \cdot}) = 0$ und es folgt (2.3.12).

F. 2.1.4.: $|l_2| = |k_2| > 2^{m-j}(1/2 + \lambda)$

In dieser Konstellation verschwinden wegen (2.3.5) die Summanden in der eckigen Klammer. Also folgt auch hier (2.3.12).
Insgesamt folgt also in *F. 2.1.*

$$c_{(l_1,l_2)}(B^\lambda_m t) = 0.$$

Abschliessend ist für diesen Fall noch zu bemerken, dass man den Fall

$$l_1 = k_1 \quad \text{und} \quad l_2 \ne k_2$$

ganz analog abhandelt. Man nutzt hier die Gleichung

$$B^\lambda_m = \sum_{j=0}^{m} L_{m-j,j} - \sum_{j=0}^{m-1} L_{m-j-1,j} = \sum_{j=0}^{m-1} (L_{m-j,j} - L_{m-j-1,j}) + L_{0,m}.$$

F. 2.2.: $l_1 \ne k_1$ und $l_2 \ne k_2$

Wir nutzen Gleichung (2.3.4) für $c_{(l_1,l_2)}(B^\lambda_m t)$. Es wird gezeigt, dass jeder Summand der beiden Summen verschwindet.
Sei $j \in \{0, ..., m\}$. Wir betrachten zunächst

$$c_{l_1}(I^\lambda_{2^j} e^{ik_1 \cdot}) c_{l_2}(I^\lambda_{2^{m-j}} e^{ik_2 \cdot}). \tag{2.3.14}$$

Wir beschränken uns auf

$$|l_1| < 2^j(1/2 + \lambda) < 2^j \quad \text{mit} \quad |l_1 - k_1| = v2^j\,,\ v \in \mathbb{N}. \tag{2.3.15}$$

Andernfalls verschwindet der erste Faktor von (2.3.14) aufgrund von (2.3.5) und (2.3.6), und es ist nichts zu zeigen. Es gibt nun 2 Möglichkeiten.

(i) l_1 und k_1 haben beide das gleiche Vorzeichen (wobei negativ und 0 bzw positiv und 0 auch als gleich angesehen werden). In diesem Fall muss aufgrund von (2.3.15) $|k_1| \ge 2^j$ gelten.

(ii) l_1 und k_1 haben verschiedene Vorzeichen (eines echt positiv, anderes echt negativ). In diesem Fall ist

$$v2^j - |k_1| = |l_1| < 2^j(1/2 + \lambda).$$

Das ergibt

$$|k_1| > 2^j(v - 1/2 - \lambda) \underset{(v \geq 1)}{\geq} 2^j(1/2 - \lambda).$$

Wegen $(k_1, k_2) \in K_m$, existiert ein $u \in \{0, ..., m\}$ mit

$$|k_1| \leq 2^u(1/2 - \lambda) \quad \text{und} \quad |k_2| \leq 2^{m-u}(1/2 - \lambda) \tag{2.3.16}$$

In Fall (i) ist $2^j \leq |k_1| \leq 2^u(1/2 - \lambda) < 2^u$. Das zieht natürlich $j < u$ nach sich. In Fall (ii) ist $2^j(1/2 - \lambda) < |k_1| \leq 2^u(1/2 - \lambda)$. Hier folgt auch $j < u$. Mit (2.3.16) folgt

$$|k_2| \leq 2^{m-u}(1/2 - \lambda) \underset{(j<u)}{\leq} 2^{m-j}(1/2 - \lambda). \tag{2.3.17}$$

Wir betrachten wieder nur $|l_2| < 2^{m-j}(1/2 + \lambda)$, da sonst der zweite Faktor von (2.3.14) wegen (2.3.6) sofort verschwindet. Dann ergibt sich

$$0 < |l_2 - k_2| \leq |l_2| + |k_2| < 2^{m-j}(1/2 - \lambda + 1/2 + \lambda) = 2^{m-j}.$$

Jetzt hat man wieder die gleiche Situation wie in *F. 2.1.*. Es kann nämlich 2^{m-j} nicht $k_2 - l_2$ teilen. Wegen (2.3.5) ist damit $c_{l_2}(I^{\lambda}_{2^{m-j}} e^{ik_2 \cdot}) = 0$. Es verschwindet also in jedem Fall die erste Summe in 2.3.4.

Im Folgenden wenden wir uns den Summanden der zweiten Summe in (2.3.4) zu. Wir betrachten also für ein $j \in \{0, ..., m-1\}$ das Produkt

$$c_{l_1}(I^{\lambda}_{2^j} e^{ik_1 \cdot}) c_{l_2}(I^{\lambda}_{2^{m-j-1}} e^{ik_2 \cdot}). \tag{2.3.18}$$

Wir argumentieren vollkommen analog zur letzten Betrachtung bis zur Nummer (2.3.17). An dieser Stelle nutzen wir aus, dass j echt kleiner als u ist und erhalten

$$|k_2| \leq 2^{m-u}(1/2 - \lambda) \underset{(j+1 \leq u)}{\leq} 2^{m-j-1}(1/2 - \lambda).$$

Es wird nur $|l_2| < 2^{m-j-1}(1/2 + \lambda)$ betrachtet, da sonst wegen (2.3.6) der zweite Faktor von (2.3.18) sofort verschwndet. Das führt dann zu

$$0 < |k_2 - l_2| \leq |k_2| + |l_2| < 2^{m-j-1}(1/2 - \lambda + 1/2 + \lambda) = 2^{m-j-1}.$$

2^{m-j-1} kann also unmöglich $l_2 - k_2$ teilen. Wegen (2.3.5) ist damit $c_{l_2}(I^{\lambda}_{2^{m-j-1}} e^{ik_2 \cdot}) = 0$. Somit verschwindet auch die zweite Summe in (2.3.4).

Der *2. Fall* ergibt also insgesamt

$$c_{(l_1, l_2)}(B^{\lambda}_m t) = 0.$$

Damit ist das Lemma gezeigt. □

2.4 Nikolskij-Besov-Räume mit dominierender gemischter Glattheit auf $\mathbb{T}^2$

2.4.1 Definition und Eigenschaften der Räume $S^r_{p,q}B(\mathbb{T}^2)$

Dieser Abschnitt dient der Einführung der Räume $S^r_{p,q}B(\mathbb{T}^2)$. Es wird sich zeigen, dass diese Räume gut zu den Operatoren B_m passen. Für Funktionen $f \in S^r_{p,q}B(\mathbb{T}^2)$ beweisen wir als Hauptresultat dieses Kapitels eine Fehlerschranke für

$$\|f - B_m f | L_p(\mathbb{T}^2)\|.$$

Es sei

$$v(x) := \begin{cases} 1 & : \ 0 \le |x| \le 1 \\ 2-t & : \ 1 < |x| \le 2 \\ 0 & : \ |x| > 2 \end{cases} .$$

die Funktion, die schon in Abschnitt 1.5 als Gewichtsfunktion für die DE LA VALLÉE POUSSIN-Mittel diente. Dieses Konzept lässt sich ganz analog ins Zweidimensionale übertragen.

Definition 2.5 Seien $M, N \in \mathbb{N}$. Der Operator $V_{M,N}$ ist erklärt durch:

$$V_{M,N}h(x_1,x_2) := \sum_{k_1,k_2\in\mathbb{Z}} c_{k_1,k_2}(h) v\left(\frac{k_1}{M}\right) v\left(\frac{k_2}{M}\right) e^{ik_1x_1+ik_2x_2}$$

für $h \in L_1(\mathbb{T}^2)$. Wir nennen $V_{M,N}h$ das zweidimensionale DE LA VALLÉE POUSSIN-Mittel von $h \in L_1(\mathbb{T}^2)$. □

Die Bezeichnung $V_{M,N}$ wurde hier aus Gründen der Übersichtlichkeit gewählt. Das trigonometrische Polynom $V_{M,N}h$ hat die Gestalt:

$$\sum_{|k_1|\le 2M-1,\, |k_2|\le 2N-1} c_{k_1,k_2} e^{ik_1x_1+ik_2x_2}.$$

Es geht dabei die Eigenschaft verloren, dass, wie im eindimensionalen Fall, der Index bei V_M den maximalen Polynomgrad von $V_M f$ angibt.

Lemma 2.4 Sei $1 \le p \le \infty$. Dann gilt für alle $M, N \in \mathbb{N}$

$$1 \le \|V_{M,N} : X_p(\mathbb{T}^2) \to X_p(\mathbb{T}^2)\| \le 9, \tag{2.4.1}$$

wobei

$$X_p(\mathbb{T}^2) := \begin{cases} L_p(\mathbb{T}^2) & : \ 1 \le p < \infty \\ C(\mathbb{T}^2) & : \ p = \infty \end{cases} .$$

Beweis Wir nutzen hier im wesentlichen das Resultat, das wir mit Satz 1.3 zur Verfügung haben (Beschränktheit im eindimensionalen Fall). Die Schranke nach unten ist sofort klar. Konstante Funktionen werden reproduziert. Bleibt noch die Schranke nach oben zu zeigen. Sei zunächst $h = \sum\limits_{k_1}\sum\limits_{k_2} c_{k_1,k_2} e^{ik_1x_1+ik_2x_2}$ ein trigonometrisches Polynom. Wir betrachten für $1 \le p < \infty$:

$$\|V_{M,N}h|L_p(\mathbb{T})\|^p = \left\| \sum_{k_1}\sum_{k_2} c_{k_1,k_2} v\left(\frac{k_1}{M}\right) v\left(\frac{k_2}{N}\right) e^{ik_1x_1+ik_2x_2} \right| L_p(\mathbb{T}^2) \Bigg\|^p .$$

Das ergibt:

$$\begin{aligned} \|V_{M,N}h|L_p(\mathbb{T})\|^p &= \int_{\mathbb{T}}\int_{\mathbb{T}} \left| \sum_{k_1}\sum_{k_2} c_{k_1,k_2} v\left(\frac{k_1}{M}\right) v\left(\frac{k_2}{N}\right) e^{ik_1x_1+ik_2x_2} \right|^p dx_1\, dx_2 \\ &= \int_{\mathbb{T}}\int_{\mathbb{T}} \left| \sum_{k_1} v\left(\frac{k_1}{M}\right) \left(\sum_{k_2} c_{k_1,k_2} v\left(\frac{k_2}{N}\right) e^{ik_2x_2} \right) e^{ik_1x_1} \right|^p dx_1\, dx_2 \\ &= \int_{\mathbb{T}} \left\| \sum_{k_1} v\left(\frac{k_1}{M}\right) \left(\sum_{k_2} e^{ik_2x_2} c_{k_1,k_2} v\left(\frac{k_2}{N}\right) \right) e^{ik_1\cdot} \right| L_p(\mathbb{T}) \Bigg\|^p dx_2. \end{aligned}$$

An dieser Stelle wenden wir Satz 1.3 auf die innere $L_p(\mathbb{T})$-Norm an und erhalten:

$$\begin{aligned}
\|V_{M,N}h|L_p(\mathbb{T})\|^p &\leq 3^p \int_{\mathbb{T}} \left\| \sum_{k_1} \left(\sum_{k_2} e^{ik_2x_2} c_{k_1,k_2} v\left(\frac{k_2}{N}\right)\right) e^{ik_1\cdot} \Big| L_p(\mathbb{T}) \right\|^p dx_2 \\
&\underset{\text{(Fubini)}}{=} 3^p \int_{\mathbb{T}} \int_{\mathbb{T}} \left| \sum_{k_2} \left(\frac{k_2}{N}\right) \left(\sum_{k_1} c_{k_1,k_2} e^{ik_1x_1}\right) e^{ik_2x_2} \right|^p dx_2\, dx_1 \\
&\underset{\text{(Satz 1.3)}}{\leq} 9^p \int_{\mathbb{T}} \int_{\mathbb{T}} \left| \sum_{k_1} \sum_{k_2} c_{k_1,k_2} e^{ik_1x_1+ik_2x_2} \right|^p dx_2\, dx_1 \\
&= 9^p \|h|L_p(\mathbb{T}^2)\|^p.
\end{aligned}$$

Mit den üblichen Modifikationen für $p=\infty$ folgt analog

$$\|V_{M,N}h|C(\mathbb{T}^2)\| \leq 9\|h|C(\mathbb{T}^2)\|.$$

Sei $\bar{V}_{M,N}$ die Einschränkung von $V_{M,N}$ auf den Raum der trigonometrischen Polynome. Eben wurde gezeigt, dass $\bar{V}_{M,N}$ beschränkt mit Norm ≤ 9 ist. Die trigonometrischen Polynome liegen dicht in $X_p(\mathbb{T}^2)$ (analog zur Situation auf $\mathbb{T}$). Damit ist $\bar{V}_{M,N}$ zu einem stetigen Operator unter Erhaltung der Norm auf $X_p(\mathbb{T}^2)$ fortsetzbar. Wir bezeichnen diesen fortgesetzten Operator auf $X_p(\mathbb{T}^2)$ auch mit $\bar{V}_{M,N}$. Wegen $X_p(\mathbb{T}^2) \hookrightarrow L_1(\mathbb{T}^2)$ gilt die Implikation:

$$g_n \xrightarrow[n\to\infty]{X_p} g \quad \Longrightarrow \quad c_{k_1,k_2}(g_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} c_{k_1,k_2}(g). \tag{2.4.2}$$

Sei also $g \in X_p(\mathbb{T}^2)$ und $(g_n)_n \subset X_p(\mathbb{T}^2)$ eine Folge trigonometrischer Polynome mit $g_n \xrightarrow[n\to\infty]{X_p} g$, dann ist $\bar{V}_{M,N}g := \lim_{n\to\infty} \bar{V}_{M,N}g_n$ (in $X_p(\mathbb{T}^2)$). Somit gilt wegen (2.4.2)

$$\begin{aligned}
c_{k_1,k_2}(\bar{V}_{M,N}g) &= \lim_{n\to\infty} c_{k_1,k_2}(\bar{V}_{M,N}g_n) \\
&= \lim_{n\to\infty} c_{k_1,k_2}(g_n) v\left(\frac{k_1}{M}\right) v\left(\frac{k_2}{N}\right) \\
&\underset{(2.4.2)}{=} c_{k_1,k_2}(g) v\left(\frac{k_1}{M}\right) v\left(\frac{k_2}{N}\right) \\
&= c_{k_1,k_2}(V_{M,N}g)
\end{aligned} \tag{2.4.3}$$

Die Fourierkoeffizienten der Funktionen $\bar{V}_{M,N}g$ und $V_{M,N}g$ stimmen überein. Damit sind diese Funktionen gleich in $X_p(\mathbb{T})$. Also folgt (2.4.1).

Lemma 2.5 Sei $1 \leq p \leq \infty$ und $X_p(\mathbb{T}^2)$ wie oben. Sei weiter $h \in X_p(\mathbb{T}^2)$. Dann gilt:

$$V_{M,N}g \xrightarrow[M,N\to\infty]{} g.$$

Beweis Aufgrund der gleichmässigen Beschränktheit von $\|V_{M,N} : X_p(\mathbb{T}^2) \to X_p(\mathbb{T}^2)\|$, der Dichtheit der trigonometrischen Polynome in $X_p(\mathbb{T}^2)$ und der Tatsache, dass für jedes trigonometrische Polynom

$$V_{M,N}t \xrightarrow[M,N\to\infty]{X_p} t$$

gilt, folgt mit dem Satz von BANACH/STEINHAUS die Aussage des Lemmas. □

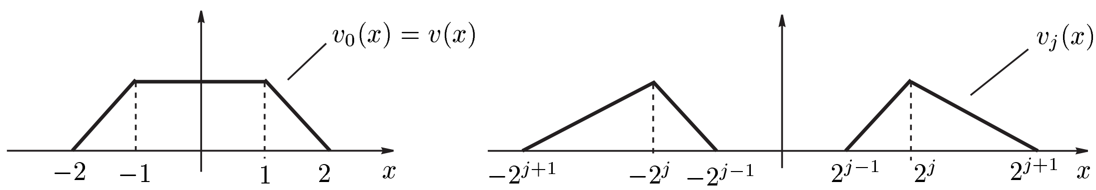
Mit Hilfe der Funktion v definieren wir nun folgendes Funktionensystem $(v_j(x))_{j\in\mathbb{N}_0}$:

$$v_0(x) = v(x) \quad \text{und} \quad v_j(x) = v(2^{-j}x) - v(2^{-j+1}x) \quad , \quad j = 1,2,... \tag{2.4.4}$$

Dieses Funktionensystem besteht offensichtlich aus stückweise linearen Funktionen mit kompaktem Träger. Dabei gilt:

$$\text{supp } v_0 = [-2, 2] \quad \text{und} \quad \text{supp } v_j = \{x \in \mathbb{R} : 2^{j-1} \leq |x| \leq 2^{j+1}\} \tag{2.4.5}$$

Die nächste Abbildung zeigt die Graphen der Funktionen v_j:



Eine wichtige Eigenschaft dieses Funktionensystems ist die Tatsache, dass für jedes $x \in \mathbb{R}$

$$\sum_{j=0}^{\infty} v_j(x) = \lim_{M\to\infty} \sum_{j=0}^{M} v_j(x) = \lim_{M\to\infty} v(2^{-M}x) = 1 \tag{2.4.6}$$

gilt. Sei ab jetzt $1 \leq p \leq \infty$ und $h \in L_p(\mathbb{T}^2)$. Wir ordnen der Funktion h für jedes Paar $(j_1, j_2) \in \mathbb{N}_0^2$ ein trigonometrisches Polynom $h_{j_1,j_2}(x_1, x_2)$ wie folgt zu:

$$h_{j_1,j_2}(x_1, x_2) = \sum_{k_1,k_2 \in \mathbb{Z}} c_{k_1,k_2}(h) v_{j_1}(k_1) v_{j_2}(k_2) e^{ik_1x_1 + ik_2x_2}.$$

Lemma 2.6 Sei $1 \leq p \leq \infty$ und $h \in X_p(\mathbb{T}^2)$. Dann gilt:

$$h \underset{X_p(\mathbb{T}^2)}{=} \sum_{j_1=0}^{\infty} \sum_{j_2=0}^{\infty} h_{j_1,j_2}.$$

Beweis Wir betrachten die endliche Summe

$$\begin{aligned}
\sum_{j_1=0}^{M} \sum_{j_2=0}^{N} h_{j_1,j_2}(x_1, x_2) &= \sum_{k_1,k_2} c_{k_1,k_2}(h) \left(\sum_{j_1=0}^{M} \sum_{j_2=0}^{N} v_{j_1}(k_1) v_{j_2}(k_2) \right) e^{ik_1x_1 + ik_2x_2} \\
&= \sum_{k_1,k_2} c_{k_1,k_2}(h) \left(\sum_{j_1=0}^{M} v_{j_1}(k_1) \right) \left(\sum_{j_2=0}^{N} v_{j_2}(k_2) \right) e^{ik_1x_1 + ik_2x_2} \\
&\underset{(2.4.6)}{=} \sum_{k_1,k_2} c_{k_1,k_2}(h) v(2^{-M}k_1) v(2^{-N}k_2) \\
&= V_{2^M,2^N} h.
\end{aligned}$$

Somit gilt

$$\sum_{j_1=0}^{\infty} \sum_{j_2=0}^{\infty} h_{j_1,j_2} = \lim_{M,N\to\infty} \sum_{j_1=0}^{M} \sum_{j_2=0}^{N} h_{j_1,j_2} = \lim_{M,N\to\infty} V_{2^M,2^N} h \underset{(\text{Lemma } 2.5)}{=} h.$$

$\square$

Es ist also möglich, eine Funktion $h \in X_p(\mathbb{T}^2)$ in trigonometrische Polynome mit „Frequenzen" in dyadischen Rechtecken des Gitters $\mathbb{Z}^2$ zu zerlegen. Diese Zerlegung in trigonometrische Polynome nutzt man jetzt, um die Räume $S^r_{p,q}B(\mathbb{T}^2)$ zu definieren.

Definition 2.6 Es sei $1 \leq p \leq \infty$, $r > 0$ und $X_p(\mathbb{T}^2)$ wie oben. Wir setzen für

(i) $1 \leq q < \infty$

$$S^r_{p,q}B(\mathbb{T}^2) := \left\{ h \in X_p(\mathbb{T}^2) : \|h|S^r_{p,q}B(\mathbb{T}^2)\| = \left(\sum_{j_1=0}^{\infty} \sum_{j_2=0}^{\infty} \left[2^{r(j_1+j_2)} \|h_{j_1,j_2}|X_p(\mathbb{T}^2)\| \right]^q \right)^{1/q} < \infty \right\}$$

und für

(ii) $q = \infty$

$$S^r_{p,\infty}B(\mathbb{T}^2) := \left\{ h \in X_p(\mathbb{T}^2) : \|h|S^r_{p,\infty}B(\mathbb{T}^2)\| = \sup_{j_1,j_2 \in \mathbb{N}_0} 2^{r(j_1+j_2)} \|h_{j_1,j_2}|X_p(\mathbb{T}^2)\| < \infty \right\}.$$

□

Satz 2.1 Sei $1 \leq p \leq \infty$, $1 \leq q \leq \infty$ und $r > 0$. Dann ist $S^r_{p,q}B(\mathbb{T}^2)$ ein Banachraum.

Beweis Der Beweis läuft analog zum Beweis der Vollständigkeit der $B^s_{p,q}(\mathbb{T})$. Sei $(h_n)_n \subset S^r_{p,q}B(\mathbb{T}^2)$ eine Cauchyfolge. Wegen Lemma 2.6 gilt

$$\begin{aligned} \|h|X_p(\mathbb{T}^2)\| &\leq \sum_{j_1,j_2} \|h_{j_1,j_2}|X_p(\mathbb{T}^2)\| \\ &= \sum_{j_1,j_2} \|h_{j_1,j_2}|X_p(\mathbb{T}^2)\| 2^{r(j_1+j_2)} 2^{-r(j_1+j_2)} \\ &\leq \sup_{j_1,j_2} 2^{r(j_1+j_2)} \|h_{j_1,j_2}|X_p(\mathbb{T}^2)\| \underbrace{\sum_{j_1,j_2} 2^{-r(j_1+j_2)}}_{=:C} \\ &\leq C\|h|S^r_{p,\infty}B(\mathbb{T}^2)\|, \\ &\underset{(\ell_q \hookrightarrow \ell_\infty)}{\leq} C_2\|h|S^r_{p,q}B(\mathbb{T}^2)\| \end{aligned}$$

für eine Funktion $h \in S^r_{p,q}B(\mathbb{T}^2)$. Damit gilt also

$$S^r_{p,q}B(\mathbb{T}^2) \hookrightarrow X_p(\mathbb{T}^2).$$

Die Folge $(h_n)_n \subset S^r_{p,q}B(\mathbb{T}^2)$ ist damit auch eine Cauchyfolge in $X_p(\mathbb{T}^2)$ und es existiert in diesem Raum eine Grenzfunktion h. Jetzt zeigt man mittels analoger Techniken wie im Satz 1.6, dass diese Grenzfunktion zu $S^r_{p,q}B(\mathbb{T}^2)$ gehört und dass

$$\|h - h_n|S^r_{p,q}B(\mathbb{T}^2)\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

gilt. □

Bemerkung 2.3 In der Definition 2.6 muss man im Falle $p = \infty$ nicht auf den Raum $C(\mathbb{T}^2)$ ausweichen. Ersetzt man in der Definition $X_\infty(\mathbb{T}^2) = C(\mathbb{T}^2)$ durch $L_\infty(\mathbb{T}^2)$, so würde aus $h \in S^r_{\infty,q}B(\mathbb{T}^2)$

$$\sum_{j_1,j_2} \|h_{j_1,j_2}|L_\infty(\mathbb{T}^2)\| < \infty$$

folgen. Siehe Beweis von Satz 2.1. Damit existiert

$$\bar{h} = \lim_{M,N\to\infty} \sum_{j_1=0}^{M} \sum_{j_2=0}^{N} h_{j_1,j_2} = \lim_{M,N\to\infty} \underbrace{V_{2^M,2^N} h}_{\in C(\mathbb{T}^2)}$$

in $L_\infty(\mathbb{T}^2)$. Die Grenzfunktion $\bar{h}$ ist damit auch eine $C(\mathbb{T}^2)$ - Funktion (mit Interpretation). Das bedeutet auch, dass für $(k_1,k_2) \in \mathbb{Z}^2$

$$c_{k_1,k_2}(\bar{h}) = \lim_{M,N\to\infty} c_{k_1,k_2}(V_{2^M,2^N} h) = \lim_{M,N\to\infty} c_{k_1,k_2}(h) v\left(\frac{k_1}{M}\right) v\left(\frac{k_2}{N}\right) = c_{k_1,k_2}(h)$$

gilt. Damit muss $h = \bar{h}$ in $L_1(\mathbb{T}^2)$ gelten. In der Äquivalenzklasse von h gibt es also einen stetigen Vertreter. Man kann also die Stetigkeit im Falle $p = \infty$ a priori fordern. Es gilt aber in jedem Fall

$$S^r_{\infty,q}B(\mathbb{T}^2) \hookrightarrow C(\mathbb{T}^2). \tag{2.4.7}$$

□

Es gilt sogar allgemein das

Lemma 2.7 Sei $1 \le p \le \infty$, $1 \le q \le \infty$ und $\underline{r > 1/p}$. Dann ist

$$S^r_{p,q}B(\mathbb{T}^2) \hookrightarrow C(\mathbb{T}^2). \tag{2.4.8}$$

Beweis Wir brauchen die Aussage nur noch für $1 \le p < \infty$ nachzuweisen. Der Beweis funktioniert vollkommen analog zum Beweis der Einbettung $B^s_{p,q} \hookrightarrow C(\mathbb{T})$ für $s > 1/p$. Die wesentliche Essenz ist hier wieder die NIKOLSKIJ-Ungleichung, die man auch ganz analog auf $\mathbb{T}^n$ formuliert. Wir schätzen damit für $h \in S^r_{p,q}B(\mathbb{T}^2)$ die Norm $\|h_{j_1,j_2}|C(\mathbb{T}^2)\|$ ab. Die Grösse $C_{p_0,h_{j_1,j_2}}$ lässt sich hier durch $c(p)2^{(j_1+j_2)}$ abschätzen. Mit genau denselben Argumenten wie in Satz 1.7 erhält man

$$\sum_{j_1,j_2} \|h_{j_1,j_2}|C(\mathbb{T}^2)\| \le C\|h|S^r_{p,q}B(\mathbb{T}^2)\|$$

Daraus schliesst man aufgrund von $C(\mathbb{T}^2) \hookrightarrow L_p(\mathbb{T}^2)$ und Lemma 2.6 ($p < \infty$)

$$h = \sum_{j_1,j_2} h_{j_1,j_2} \quad \text{in} \quad C(\mathbb{T}^2).$$

Das bedeutet dann schliesslich $\|h|C(\mathbb{T}^2)\| \le C\|h|S^r_{p,q}B(\mathbb{T}^2)\|$. □

2.4.2 $S^r_{p,q}B(\mathbb{T}^2)$ und $B^r_{p,q}(\mathbb{T})$

In diesem Abschnitt wird sich herausstellen, dass Tensorprodukte von Funktionen bzw. Operatoren die Brücke zwischen den beiden Funktionenraumskalen bilden.

Lemma 2.8 Sei $1 \le p \le \infty$, $1 \le q \le \infty$ und $r > 0$. Dann gilt für alle $f, g \in L_p(\mathbb{T})$

$$\|f \cdot g|S^r_{p,q}B(\mathbb{T}^2)\| = \|f|B^r_{p,q}(\mathbb{T})\|^* \cdot \|g|B^r_{p,q}(\mathbb{T})\|^*.$$

In diesem Fall bezeichnet man $\|\cdot|S^r_{p,q}B(\mathbb{T}^2)\|$ als eine Kreuznorm. Die Norm $\|\cdot|B^r_{p,q}(\mathbb{T})\|^*$ wurde in Satz 1.5/(1.6.5) definiert.

Beweis Sei $h = f \cdot g$. Dann ist $c_{k_1,k_2}(h) = c_{k_1}(f)c_{k_2}(g)$. Damit ist

$$\begin{aligned} h_{j_1,j_2}(x_1,x_2) &= \sum_{k_1,k_2} c_{k_1}(f)c_{k_2}(g)v_{j_1}(k_1)v_{j_2}(k_2)e^{ik_1x_1+ik_2x_2} \\ &= \left(\sum_{k_1} c_{k_1}(f)v_{j_1}(k_1)e^{ik_1x_1}\right)\left(\sum_{k_2} c_{k_2}(g)v_{j_2}(k_2)e^{ik_2x_2}\right) \end{aligned}$$

Das hat

$$\|h_{j_1,j_2}|L_p(\mathbb{T}^2)\| = \left\|\sum_{k_1} c_{k_1}(f)v_{j_1}(k_1)e^{ik_1x_1}\right| L_p(\mathbb{T})\left\|\,\right\|\sum_{k_2} c_{k_2}(g)v_{j_2}(k_2)e^{ik_2x_2}\left| L_p(\mathbb{T})\right\|$$

zur Folge. Also gilt:

$$\begin{aligned}
\|h|S^r_{p,q}B(\mathbb{T}^2)\| &= \left(\sum_{j_1,j_2} 2^{r(j_1+j_2)q}\|h_{j_1,j_2}|L_p(\mathbb{T}^2)\|^q\right)^{1/q} \\
&= \left(\sum_{j_1} 2^{rj_1q}\left\|\sum_{k_1} c_{k_1}(f)v_{j_1}(k_1)e^{ik_1x_1}\right|L_p(\mathbb{T})\right\|^q\right)^{1/q} \\
&\quad \times \left(\sum_{j_2} 2^{rj_2q}\left\|\sum_{k_2} c_{k_2}(g)v_{j_2}(k_2)e^{ik_2x_2}\right|L_p(\mathbb{T})\right\|^q\right)^{1/q}.
\end{aligned}$$

Schliesslich sieht man

$$\begin{aligned}
\|h|S^r_{p,q}B(\mathbb{T}^2)\| &= \left(\|V_1f|L_p(\mathbb{T})\|^q + \sum_{j_1} 2^{rj_1q}\|V_{2^{j_1+1}-1}f - V_{2^{j_1}-1}f|L_p(\mathbb{T})\|^q\right)^{1/q} \\
&\quad \times \left(\|V_1g|L_p(\mathbb{T})\|^q + \sum_{j_2} 2^{rj_2q}\|V_{2^{j_2+1}-1}g - V_{2^{j_2}-1}g|L_p(\mathbb{T})\|^q\right)^{1/q} \\
&= \|f|B^r_{p,q}(\mathbb{T})\|^* \cdot \|g|B^r_{p,q}(\mathbb{T})\|^*.
\end{aligned}$$

Mit den üblichen Modifikationen folgt dies auch für $q = \infty$. □

Im Folgenden stellen wir einen Zusammenhang zwischen den Räumen $S^r_{p,p}B(\mathbb{T}^2)$ und den Räumen $B^r_{p,p}(\mathbb{T})$ über Tensorprodukte von Operatoren her. Tensorprodukte von Interpolationsoperatoren sind uns schon begegnet. Es hat sich dabei herausgestellt, dass für $f(x_1,x_2) = g(x_1)h(x_2)$

$$(I_N \otimes I_M)f(x_1,x_2) = (I_Ng)(x_1)(I_Mh)(x_2)$$

gilt. Genau diese Eigenschaft benutzen wir, um Tensorprodukte von Operatoren auf $L_1(\mathbb{T})$ zu bilden. Diese Tensorproduktoperatoren sind dann auf der Menge der trigonometrischen Polynome $T(\mathbb{T}^2)$ erklärt.

Definition 2.7 Seien P, Q auf $L_1(\mathbb{T})$ erklärte Operatoren. Wir erklären den Operator $P \otimes_T Q$ auf $T(\mathbb{T}^2)$ durch

$$P \otimes_T Q\left(\sum_{k_1,k_2} c_{k_1,k_2}e^{ik_1\cdot+ik_2\cdot}\right)(x_1,x_2) := \sum_{k_1,k_2} c_{k_1,k_2}P(e^{ik_1\cdot})(x_1)Q(e^{ik_2\cdot})(x_2).$$

□

Bemerkung 2.4 Die Bezeichnung $\otimes_T$ soll andeuten, dass dieses Tensorprodukt im Gegensatz zu dem in Definition 2.2 erklärten Tensorprodukt nur auf den trigonometrischen Polynomen (auf $\mathbb{T}^2$) erklärt ist. Wegen Lemma 2.1 gilt aber für Interpolationsoperatoren

$$(I_N \otimes I_M)(t) = (I_N \otimes_T I_M)(t). \tag{2.4.9}$$

für jedes trigonometrische Polynom $t \in T(\mathbb{T}^2)$. Hier wird $N, M \in \mathbb{N}_0$ zugelassen. Wir setzen wieder $I_0 := I$, wobei I die identische Abbildung bezeichnet. □

Mehr Wissen über die Operatoren P, Q führt zu dem folgenden Satz

Satz 2.2 Sei $1 \le p \le \infty$, $r > 0$ und $P, Q : B^r_{p,p}(\mathbb{T}) \to L_p(\mathbb{T})$ beschränkte lineare Operatoren. Dann gilt mit $h \in T(\mathbb{T}^2)$

$$\|(P \otimes_T Q)h|L_p(\mathbb{T}^2)\| \le \|P : B^r_{p,p}(\mathbb{T}) \to L_p(\mathbb{T})\| \cdot \|Q : B^r_{p,p}(\mathbb{T}) \to L_p(\mathbb{T})\| \cdot \|h|S^r_{p,p}B(\mathbb{T}^2)\| \quad (2.4.10)$$

Beweis Das trigonometrische Polynom h besitze die Darstellung:

$$h = \sum_{k_1} \sum_{k_2} c_{k_1,k_2} e^{ik_1x_1 + ik_2x_2}.$$

Wir betrachten zuerst die Situation $1 \le p < \infty$. Damit gilt:

$$\|(P \otimes_T Q)h|L_p(\mathbb{T}^2)\| = \left(\int_T \int_T \left| \sum_{k_1} \sum_{k_2} c_{k_1,k_2} Q(e^{ik_2\cdot})(x_2) P(e^{ik_1\cdot})(x_1) \right|^p dx_1 dx_2 \right)^{1/p}$$

Aufgrund der Linearität von P erhält man

$$\|(P \otimes_T Q)h|L_p(\mathbb{T}^2)\| = \left(\int_{\mathbb{T}} \left\| P \left[\sum_{k_1} \left(\sum_{k_2} c_{k_1,k_2} Q(e^{ik_2\cdot})(x_2) \right) e^{ik_1\cdot} \right] (x_1) \middle| L_p(\mathbb{T}, x_1) \right\|^p dx_2 \right)^{1/p}.$$

Dabei ist die Funktion in den eckigen Klammern (Argument von P) für jedes x_2 ein trigonometrisches Polynom mit den Fourierkoeffizienten

$$c_{k_1} = \left(\sum_{k_2} c_{k_1,k_2} Q(e^{ik_2\cdot})(x_2) \right)$$

und gehört somit zu $B^r_{p,p}(\mathbb{T})$. An dieser Stelle nutzen wir die Beschränktheit des Operators $P : B^r_{p,p}(\mathbb{T}) \to L_p(\mathbb{T})$ aus und erhalten

$$\begin{aligned}
\|(P \otimes_T Q)h|L_p(\mathbb{T}^2)\| &\le \|P\| \left(\int_{\mathbb{T}} \left\| \sum_{k_1} \left(\sum_{k_2} c_{k_1,k_2} Q(e^{ik_2\cdot})(x_2) \right) e^{ik_1x_1} \middle| B^r_{p,p}(\mathbb{T}, x_1) \right\|^p dx_2 \right)^{1/p} \\
&= \|P\| \left(\int_{\mathbb{T}} \sum_{j_1=0}^{\infty} 2^{j_1rp} \|g^{j_1}_{x_2}(x_1)|L_p(\mathbb{T}, x_1)\|^p dx_2 \right)^{1/p}, \qquad (2.4.11)
\end{aligned}$$

wobei wir

$$g^{j_1}_{x_2}(x_1) := \sum_{k_1} v_{j_1}(k_1) \left(\sum_{k_2} c_{k_1,k_2}(k_1) Q(e^{ik_2\cdot})(x_2) \right) e^{ik_1x_1} \qquad (2.4.12)$$

gesetzt haben. Der Index x_2 macht deutlich, dass für jedes x_2 die Funktion $g^{j_1}_{x_1}(\cdot)$ ein trigonometrisches Polynom auf $\mathbb{T}$ ist (wie oben). An dieser Stelle geht u.a. die Wahl des Definitionsgebietes der Operatoren P und Q ein. Es ist jetzt dadurch möglich $\|\cdot|L_p(\mathbb{T}, x_1)\|^p$ wieder als Integral zu schreiben. Vertauscht man dann noch Reihe und Integral, ergibt sich:

$$\begin{aligned}
(2.4.11) \quad &= \|P\| \left(\sum_{j_1=0}^{\infty} 2^{j_1rp} \int_{\mathbb{T}} \int_{\mathbb{T}} |g^{j_1}_{x_2}(x_1)|^p dx_1 dx_2 \right)^{1/p} \\
&\underset{\text{(Fubini)}}{=} \|P\| \left(\sum_{j_1=0}^{\infty} 2^{j_1rp} \int_{\mathbb{T}} \int_{\mathbb{T}} |g^{j_1}_{x_2}(x_1)|^p dx_2 dx_1 \right)^{1/p} \\
&= \|P\| \left(\sum_{j_1=0}^{\infty} 2^{j_1rp} \int_{\mathbb{T}} \|g^{j_1}_{x_2}(x_1)|L_p(\mathbb{T}, x_2)\|^p dx_1 \right)^{1/p} \qquad (2.4.13)
\end{aligned}$$

Bevor wir (2.4.12) wieder in (2.4.13) einsetzen, passen wir (2.4.12) an die $L_p(\mathbb{T}, x_2)$-Norm an. Wir erhalten:

$$g_{x_2}^{j_1}(x_1) := Q\left[\sum_{k_2}\left(\sum_{k_1} v_{j_1}(k_1)c_{k_1,k_2}e^{ik_1x_1}\right)e^{ik_2\cdot}\right](x_2). \tag{2.4.14}$$

Die L_p-Norm in (2.4.13) lässt sich dann aufgrund der Beschränktheit von $Q : B^r_{p,p}(\mathbb{T}) \to L_p(\mathbb{T})$ wie folgt nach oben abschätzen:

$$\begin{aligned}\|g_{x_2}^{j_1}(x_1)|L_p(\mathbb{T}, x_2)\|^p &\leq \|Q\|^p\left\|\sum_{k_2}\left(\sum_{k_1} v_{j_1}(k_1)c_{k_1,k_2}e^{ik_1x_1}\right)e^{ik_2x_2}\right|B^r_{p,p}(\mathbb{T})\Bigg\|^p \\ &= \|Q\|^p\sum_{j_2=0}^{\infty}2^{j_2rp}\left\|\sum_{k_2} v_{j_2}(k_2)\left(\sum_{k_1} v_{j_1}(k_1)c_{k_1,k_2}e^{ik_1x_1}\right)e^{ik_2x_2}\right|L_p(\mathbb{T}, x_2)\Bigg\|^p.\end{aligned}$$

Setzen wir diesen Ausdruck in (2.4.13) ein, so vergrössert man nach der Vertauschung von Reihe und Integral zu

$$\begin{aligned}(2.4.13) \quad &\leq \|P\|\cdot\|Q\|\Bigg(\sum_{j_1=0}^{\infty}\sum_{j_2=0}^{\infty}2^{pr(j_1+j_2)}\times \\ &\quad\int_{\mathbb{T}}\int_{\mathbb{T}}\left|\sum_{k_2} v_{j_2}(k_2)\left(\sum_{k_1} v_{j_1}(k_1)c_{k_1,k_2}e^{ik_1x_1}\right)e^{ik_2x_2}\right|^p dx_2dx_1\Bigg)^{1/p} \\ &= \|P\|\cdot\|Q\|\left(\sum_{j_1=0}^{\infty}\sum_{j_2=0}^{\infty}2^{pr(j_1+j_2)}\|h_{j_1,j_2}|L_p(\mathbb{T}^2)\|^p\right)^{1/p} \\ &= \|P\|\cdot\|Q\|\cdot\|h|S^r_{p,p}B(\mathbb{T}^2)\|.\end{aligned}$$

Dieser Beweis funktioniert mit den üblichen Modifikationen natürlich auch für $p = \infty$. Damit ist der Satz gezeigt. □

2.5 Das Hauptresultat

Dieser Abschnitt dient der Herleitung unseres Hauptresultates, einer Fehlerschranke von $\|f - B_m^{1/4}f|L_p(\mathbb{T}^2\|$, wobei der Operator $B_m^{1/4}$ aus den speziellen Interpolationsoperatoren I_N^λ mit $\lambda = 1/4$ (siehe Abschnitt 1.11) gewonnen wird.
Wir arbeiten vorerst noch mit allgemeinen Interpolationsoperatoren I_N. Zuerst sind wir an einer für unsere Zwecke günstigen Darstellung von

$$f - B_mf = (I \otimes I - B_m)f$$

interessiert. Es gilt:

$$I \otimes I - B_m = I \otimes I - \left[\sum_{j=0}^{m-1}(L_j \otimes L_{m-j} - L_j \otimes L_{m-j-1}) + L_m \otimes L_0\right],$$

mit $L_j = I_{2^j}$, für $j = 0, ..., m$. Weiter gilt:

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{m-1}(I \otimes L_{m-j} - I \otimes L_{m-j-1}) &= I \otimes L_m - I \otimes L_{m-1} + I \otimes L_{m-1} - \cdots - I \otimes L_0 \\ &= I \otimes L_m - I \otimes L_0.\end{aligned}$$

Damit ist

$$\begin{aligned} I \otimes I - B_m &= (I \otimes I - I \otimes L_m) + (I \otimes L_0 - L_m \otimes L_0) \\ &+ \sum_{j=0}^{m-1} \left[(I \otimes L_{m-j} - I \otimes L_{m-j-1}) - (L_j \otimes L_{m-j} - L_j \otimes L_{m-j-1}) \right]. \end{aligned} \tag{2.5.1}$$

Betrachtet man den Operator $I \otimes I - B_m$ auf $T(\mathbb{T}^2)$, kann man mit (2.4.9) $\otimes$ durch $\otimes_T$ ersetzen. Das hat den Vorteil, dass man jetzt Distributivität zur Verfügung hat. Es gilt nämlich:

$$T_1 \otimes_T T_2 + T_1 \otimes_T T_3 = T_1 \otimes_T (T_2 + T_3) \quad \text{bzw} \quad T_2 \otimes_T T_1 + T_3 \otimes_T T_1 = (T_2 + T_3) \otimes_T T_1.$$

Diese Tatsache rechnet man leicht nach, indem man aufgrund der Linearität die Aussagen mit $t(x) = e^{ik_1x_1 + ik_2x_2}$ verifiziert. Der Übergang zu $\otimes_T$ ist nötig, da wir $\otimes$ nur für ganz bestimmte Operatoren erklärt haben. Es ist z.B. nicht klar, was $I \otimes (I - L_m)$ bedeutet. Damit vereinfacht sich (2.5.1) auf $T(\mathbb{T}^2)$ zu

$$I \otimes I - B_m = I \otimes_T (I - L_m) + (I - L_m) \otimes_T L_0 + \sum_{j=0}^{m-1} (I - L_j) \otimes_T (L_{m-j} - L_{m-j-1}).$$

Anders ausgedrückt gilt für ein trigonometrisches Polynom $h \in T(\mathbb{T}^2)$ die Gleichheit

$$\begin{aligned} h - B_m h &= [I \otimes_T (I - L_m)]h + [(I - L_m) \otimes_T L_0]h \\ &+ \sum_{j=0}^{m-1} [(I - L_j) \otimes_T (L_{m-j} - L_{m-j-1})]h \end{aligned} \tag{2.5.2}$$

An dieser Stelle wird klar, dass man die Abschätzung des Fehlers $\|h - B_m h | L_p(\mathbb{T}^2)\|$ zumindest für trigonometrische Polynome mit dem Satz 2.2 und den Ergebnissen des ersten Kapitels bewerkstelligen könnte. Wir kommen jetzt zur Formulierung des Hauptergebnisses.

Satz 2.3 Sei $1 \le p \le \infty$, $1 \le q \le \infty$ und $r > 1/p$. Weiter sei $B_m^{1/4}$ die Folge von Operatoren, die aus den speziellen Interpolationsoperatoren I_N^λ mit $\lambda = 1/4$ (Abschnitt 1.11) gebildet wird. Dann existiert eine Konstante $C(p, q, r)$, so dass für alle $h \in S^r_{p,q}B(\mathbb{T}^2)$

$$\|h - B_m^{1/4} h | L_p(\mathbb{T}^2)\| \le C m^{1-1/q} 2^{-mr} \|h | S^r_{p,q}B(\mathbb{T}^2)\| \tag{2.5.3}$$

gilt.

Beweis Sei $h \in S^r_{p,q}B(\mathbb{T}^2)$. Als erstes ist zu bemerken, dass $B_m^{1/4}h$ sinnvoll erklärt ist. Wegen $r > 1/p$ ist h eine stetige Funktion. Für $r > 1/p$ weiss man sogar noch mehr. Mit Lemma 2.7 gilt nämlich

$$\sum_{u=0}^{\infty} \sum_{v=0}^{\infty} \|h_{u,v} | C(\mathbb{T}^2)\| < \infty \quad \text{und} \quad h = \sum_{u=0}^{\infty} \sum_{v=0}^{\infty} h_{u,v}.$$

Aufgrund der absoluten Konvergenz der Reihe in $C(\mathbb{T}^2)$, konvergiert diese auch unbedingt. Wir können also die Summationsreihenfolge nach Belieben ändern bzw. die Reihe beliebig zerlegen. Die Idee dieses Beweise besteht nun darin,

$$h = \sum_{u=0}^{\infty} \sum_{v=0}^{\infty} h_{u,v}$$

so in Teilstücke zu zerlegen, dass man die Eigenschaften von $B_m^{1/4}$ optimal nutzen kann. In Lemma 2.3 wurde bewiesen, dass auf einer Menge von trigonometrischen Polynomen mit Frequenzen in einem hyperbolischen Kreuz $B_m^\lambda t = t$ gilt. Für $\lambda = 1/4$ ist dieses hyperbolische Kreuz gegeben durch

$$K_m := \{(l_1, l_2) \in \mathbb{Z}^2 : \exists\, \ell \in \{0, ..., m\},\ \text{so dass}\ |l_1| \le 2^{\ell-2}\ \text{und}\ |l_2| \le 2^{m-\ell-2}\}.$$

Wir schränken diese Menge der Einfachheit halber weiter ein. Es sei

$$K'_m := \{(l_1, l_2) \in \mathbb{Z}^2 : \exists\, \ell, n \in \mathbb{N}_0,\ \text{mit}\ \ell + n = m - 4\ \text{und}\ |l_1| \le 2^\ell,\ |l_2| \le 2^n\}.$$

Damit ist klar, dass $K'_m \subset K_m$ gilt. $B_m^{1/4}$ lässt also trigonometrische Polynome mit Frequenzen aus K'_m invariant. Wir überlegen als nächstes, für welche $u, v \in \mathbb{N}_0$

$$h_{u,v} \in T^{K'_m}$$

gilt. Aus der Definition der $h_{u,v}$ weiss man, dass

$$c_{k_1,k_2}(h_{u,v}) \neq 0 \quad \Longrightarrow \quad |k_1| \le 2^{u+1}\ \text{und}\ |k_2| \le 2^{v+1} \tag{2.5.4}$$

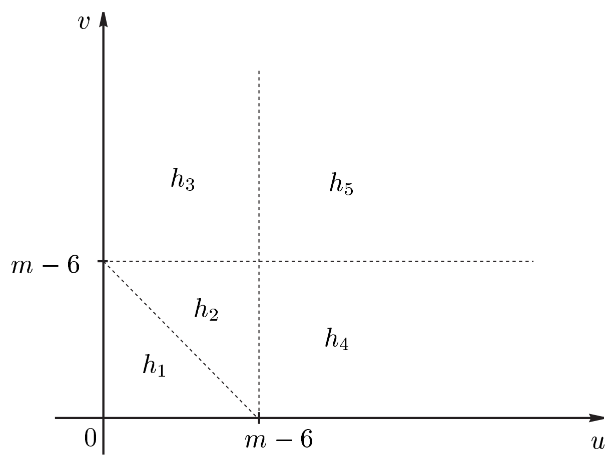
gilt. Damit hat man

$$u + 1 + v + 1 \le m - 4 \quad \Longrightarrow \quad h_{u,v} \in T^{K'_m} \quad \Longrightarrow \quad B_m^{1/4} h_{u,v} = h_{u,v}.$$

Sei ab jetzt $m > 6$. Dann definieren wir

$$\boxed{h_1 := \sum_{u+v \le m-6} h_{u,v}}$$

und sichern damit $B_m^{1/4} h_1 = h_1$. In der folgenden Abbildung ist die komplette Zerlegung von h angedeutet. Es sind die Bereiche $\{(u, v)\}$ graphisch dargestellt, aus denen man die Funktionen h_2, h_3, h_4 und h_5 mittels der trigonometrischen Polynome $h_{u,v}$ gewinnt.



Wir definieren also weiter

$$\boxed{h_2 := \sum_{\substack{u+v>6 \\ u,v \le m-6}} h_{u,v} = \sum_{u=1}^{m-6} \sum_{v=m-5-u}^{m-6} h_{u,v}} \quad \text{und}$$

$$\boxed{h_3 := \sum_{u=0}^{m-6} \sum_{v=m-5}^{\infty} h_{u,v} \quad , \quad h_4 := \sum_{u=m-5}^{\infty} \sum_{v=0}^{m-5} h_{u,v} \quad , \quad h_5 := \sum_{u=m-5}^{\infty} \sum_{v=m-5}^{\infty}} \quad .$$

Offensichtlich ist $h = h_1 + ... + h_5$. Wir weisen nochmal daraufhin, dass die Funktionen h_i, $i = 1..5$ aufgrund der absoluten Konvergenz der Reihe stetig sind. Wir können also $B_m^{1/4} h_i$, $i = 1..5$ bilden. Angesichts dieser Zerlegung können wir folgendermassen abschätzen:

$$\begin{aligned} \|h - B_m^{1/4} h | L_p(\mathbb{T}^2)\| &\leq \sum_{i=1}^{5} \|h_i - B_m^{1/4} h_i | L_p(\mathbb{T}^2)\| \\ &\underset{(B_m^{1/4} h_1 = h_1)}{=} \sum_{i=2}^{5} \|h_i - B_m^{1/4} h_i | L_p(\mathbb{T}^2)\|. \end{aligned} \tag{2.5.5}$$

Um $\|h_i - B_m^{1/4} h_i | L_p(\mathbb{T}^2)\|$ abzuschätzen, vereinfachen wir zuerst

$$\|h_{u,v} - B_m^{1/4} h_{u,v} | L_p(\mathbb{T}^2)\|.$$

Sei also $u, v \in \mathbb{N}_0$. Wir lassen im folgenden das $L_p(\mathbb{T}^2)$ in der Norm aus Platzgründen weg. Es geht aus dem Kontext hervor, welche Normen Operatornormen und welche $L_p(\mathbb{T}^2)$-Normen sind. Wir erhalten mit (2.5.2)

$$\begin{aligned} \|h_{u,v} - B_m^{1/4} h_{u,v} | L_p(\mathbb{T}^2)\| &\leq \|[I \otimes_T (I - L_m)] h_{u,v}\| + \|[(I - L_m) \otimes_T L_0] h_{u,v}\| \\ &\quad + \left\| \sum_{j=0}^{m-1} [(I - L_j) \otimes_T (L_{m-j} - L_{m-j-1})] h_{u,v} \right\|. \end{aligned} \tag{2.5.6}$$

Jetzt greifen wir auf Lemma 1.23 aus Kapitel 1 zurück. Aufgrund der Definition des $\otimes_T$- Tensorproduktes verschwindet $(I - L_j) \otimes_T (L_{m-j} - L_{m-j-1})] h_{u,v}$, wenn $2^{u+1} \leq 2^j \cdot 1/4 = 2^{j-2}$, oder wenn $2^{v+1} \leq 2^{m-j-1} \cdot 1/4 = 2^{m-j-3}$ (siehe (2.5.4)) gilt. Ist also

$$j \geq u + 3 \quad \text{oder} \quad j \leq m - v - 4,$$

dann haben wir

$$(I - L_j) \otimes_T (L_{m-j} - L_{m-j-1}) h_{u,v} = 0.$$

Also ist

$$\sum_{j=0}^{m-1} [(I - L_j) \otimes_T (L_{m-j} - L_{m-j-1})] h_{u,v} = \sum_{\max(0, m-v-3)}^{\min(u+2, m-1)} [(I - L_j) \otimes_T (L_{m-j} - L_{m-j-1})] h_{u,v}.$$

An dieser Stelle wenden wir Satz 2.2 an. Wir betrachten alle vorkommenden Operatoren als Operatoren von $B^{r_0}_{p,p}(\mathbb{T}) \to L_p(\mathbb{T})$ für ein $1/p < r_0 < r$. Wegen $B^{r_0}_{p,p}(\mathbb{T}) \hookrightarrow B^{r_0}_{p,\infty}(\mathbb{T})$, wissen wir mit den Ergebnissen aus Kapitel 1 für alle $u \in \mathbb{N}$

$$\|I - L_u : B^{r_0}_{p,p}(\mathbb{T}) \to L_p(\mathbb{T})\| \leq C 2^{-u r_0}.$$

Das ergibt dann folgendes:

$$\begin{aligned} \|[I \otimes_T (I - L_m)] h_{u,v}\| &\leq \|I\| \cdot \|I - L_m\| \cdot \|h_{u,v} | S^{r_0}_{p,p} B(\mathbb{T}^2)\| \\ &\leq C_2 2^{-m r_0} \|h_{u,v} | S^{r_0}_{p,p} B(\mathbb{T}^2)\|. \end{aligned} \tag{2.5.7}$$

In die letzte Ungleichung geht noch die Tatsache ein, dass aufgrund von $B^{r_0}_{p,p}(\mathbb{T}) \hookrightarrow L_p(\mathbb{T})$ der Operator $I : B^{r_0}_{p,p}(\mathbb{T}) \to L_p(\mathbb{T})$ beschränkt ist. Analog ist

$$\|[(I - L_m) \otimes_T L_0] h_{u,v}\| \leq C_3 2^{-m r_0} \|h_{u,v} | S^{r_0}_{p,p} B(\mathbb{T}^2)\| \tag{2.5.8}$$

Hier geht die Beschränktheit von $L_0 : B^{r_0}_{p,p}(\mathbb{T}) \to L_p(\mathbb{T})$ ein. Es gilt nämlich:

$$\|L_0\| \leq \|L_0 - I\| + \|I\|.$$

Schliesslich ist

$$\begin{aligned} \|[(I-L_j)\otimes_T(L_{m-j}-L_{m-j-1})]h_{u,v}\| &\le \|(I-L_j)\otimes_T(L_{m-j}-I)h_{u,v}\| \\ &\quad +\|(I-L_j)\otimes_T(I-L_{m-j-1})h_{u,v}\| \\ &\le C^2 2^{-mr_0}\|h_{u,v}|S^{r_0}_{p,p}B(\mathbb{T}^2)\| + C^2 2^{-(m-1)r_0}\|h_{u,v}|S^{r_0}_{p,p}B(\mathbb{T}^2)\| \\ &= C_4 2^{-mr_0}\|h_{u,v}|S^{r_0}_{p,p}B(\mathbb{T}^2)\|. \end{aligned} \tag{2.5.9}$$

Setzt man alles in (2.5.6) ein, so gilt:

$$\begin{aligned} \|h_{u,v}-B^{1/4}_m h_{u,v}|L_p(\mathbb{T}^2)\| &\le 2^{-mr_0}\|h_{u,v}|S^{r_0}_{p,p}B(\mathbb{T}^2)\|\left(C_2+C_3+C_4\sum_{\max(0,m-v-3)}^{\min(u+2,m-1)}1\right) \\ &\le C_5 2^{-mr_0}\|h_{u,v}|S^{r_0}_{p,p}B(\mathbb{T}^2)\|\cdot M(u,v,m), \end{aligned} \tag{2.5.10}$$

wobei

$$M(u,v,m) := (2+(\min(u+2,m-1)-\max(0,m-v-3))_+)$$

und $a_+ := \max(a,0)$ für $a\in\mathbb{R}$ ist. In dieser Darstellung stört jetzt noch $\|h_{u,v}|S^{r_0}_{p,p}B(\mathbb{T}^2)\|$. Da sich die Frequenzen von $h_{u,v}$ um $(2^u,2^v)$ befinden (siehe Definition), stellt man folgendes fest:

$$\|h_{u,v}|S^{r_0}_{p,p}B(\mathbb{T}^2)\|^p = \sum_{\substack{|j_1-u|\le 1\\ |j_2-v|\le 1}} 2^{pr_0(j_1+j_2)}\underbrace{\|(h_{u,v})_{j_1,j_2}|L_p(\mathbb{T}^2)\|^p}_{\le c\|h_{u,v}|L_p(\mathbb{T}^2)\|^p}.$$

mit der üblichen Modifikation für $p=\infty$. Dabei ist die Anzahl der Summanden immer ≤ 9 und (j_1,j_2) liegt „in der Nähe" von (u,v). Man erhält also

$$\|h_{u,v}|S^{r_0}_{p,p}B(\mathbb{T}^2)\| \le c2^{r_0(u+v)}\|h_{u,v}|L_p(\mathbb{T}^2)\|. \tag{2.5.11}$$

Damit schätzt man (2.5.10) weiter ab und erhält:

$$\|h_{u,v}-B^{1/4}_m h_{u,v}|L_p(\mathbb{T}^2)\| \le C_6 2^{r_0(u+v-m)}\|h_{u,v}|L_p(\mathbb{T}^2)\|\cdot M(u,v,m). \tag{2.5.12}$$

Jetzt sind alle Hilfsmittel bereitgestellt, um $\|h_i - B^{1/4}_m h_i|L_p(\mathbb{T}^2)\|$, $i=2,...,5$ abzuschätzen. Es gilt:

$$\begin{aligned} \|h_2-B^{1/4}_m h_2|L_p(\mathbb{T}^2)\| &\le \sum_{u=1}^{m-6}\sum_{v=m-5-u}^{m-6}\|h_{u,v}-B^{1/4}_m h_{u,v}|L_p(\mathbb{T}^2)\| \\ &\underset{(2.5.12)}{\le} C_6\sum_{u=1}^{m-6}\sum_{v=m-5-u}^{m-6}2^{r_0(u+v-m)}(u+v+7-m)\|h_{u,v}|L_p(\mathbb{T}^2)\|. \end{aligned}$$

Die letzte Ungleichung gilt, weil $\min(u+2,m-1)=u+2$ wegen $u+2\le m-6$ und $\max(0,m-v-3)=m-v-3$ wegen $v\le m-6$. Damit ist $M(u,v,m)=(2+(u+v+5-m)_+)$. Weiter ist klar, dass $u+v\ge m-5$ gilt. Und das zieht $M(u,v,m)=u+v+7-m$ nach sich. Wir ergänzen in der Doppelsumme den Faktor

$$2^{-r(u+v)}2^{r(u+v)}$$

und man erhält damit:

$$\begin{aligned} \|h_2-B^{1/4}_m h_2|L_p(\mathbb{T}^2)\| &\le C_6 2^{-mr_0}\sum_{u=1}^{m-6}\sum_{v=m-5-u}^{m-6}(2^{(u+v)(r_0-r)}(u+v+7-m)\times \\ &\quad 2^{(u+v)r}\|h_{u,v}|L_p(\mathbb{T}^2)\|) \end{aligned} \tag{2.5.13}$$

Jetzt sind wir an der Stelle angelangt, an der der Term $m^{1-1/q}$ in der Fehlerordnung zustandekommt. Nimmt man also die Funktion h aus einem „kleineren" Raum $S^r_{p,q}B(\mathbb{T}^2)$, so verbessert sich die Fehlerordnung. Es wächst ja bekanntlich $S^r_{p,q}B(\mathbb{T})$ mit dem Index q bei festgehaltenen $r, p > 0$. Sei vorerst $1 \leq q < \infty$. Wir nutzen jetzt die Höldersche Ungleichung für Reihen, um (2.5.13) weiter zu vergrössern. Es gelte $1/q + 1/q' = 1$. Dann folgt:

$$\begin{aligned}\|h_2 - B_m^{1/4}h_2|L_p(\mathbb{T}^2)\| &\leq C_6 2^{-mr_0}\left(\sum_{u=1}^{m-6}\sum_{v=m-5-u}^{m-6} 2^{(u+v)(r_0-r)q'}(u+v+7-m)^{q'}\right)^{1/q'} \times \\ &\qquad \left(\sum_{u=1}^{m-6}\sum_{v=m-5-u}^{m-6} 2^{(u+v)rq}\|h_{u,v|L_p(\mathbb{T}^2)}\|^q\right)^{1/q}\end{aligned}$$

Wir betrachten zunächst die erste Doppelsumme: Mit der Indextransformation $\ell = u + v + 7 - m$ kann man folgendermassen vereinfachen:

$$\begin{aligned}2^{-mr_0}(\cdots)^{1/q'} &= 2^{-mr_0}\left(\sum_{u=1}^{m-6}\sum_{\ell=2}^{u+1} 2^{(m+\ell-7)(r_0-r)q'}\ell^{q'}\right)^{1/q'} \\ &= 2^{-mr}\left(\sum_{u=1}^{m-6}\sum_{\ell=2}^{u+1} 2^{(\ell-7)(r_0-r)q'}\ell^{q'}\right)^{1/q'} \\ &\leq 2^{-mr}\left(\sum_{u=1}^{m-6}\underbrace{\sum_{\ell=2}^{\infty} 2^{(\ell-7)(r_0-r)q'}\ell^{q'}}_{\leq c(r,q)}\right)^{1/q'} \\ &\leq c2^{-mr}(m-6)^{1/q'} = c2^{-mr}(m-6)^{1-1/q}.\end{aligned}$$

Die innere Reihe konvergiert aufgrund von $r_0 < r$. Damit gilt:

$$\begin{aligned}\|h_2 - B_m^{1/4}h_2|L_p(\mathbb{T}^2)\| &\leq C_7 2^{-mr}m^{1-1/q}\underbrace{\left(\sum_{u=1}^{m-6}\sum_{v=m-5-u}^{m-6} 2^{(u+v)rq}\|h_{u,v}|L_p(\mathbb{T}^2)\|^q\right)^{1/q}}_{=:N_{2,q}(h)} \\ &= C_7 2^{-mr}m^{1-1/q}N_{2,q}(h). \qquad (2.5.14)\end{aligned}$$

Die Bezeichnung $N_{2,q}(h)$ steht für die $\ell_q(L_p)$-Norm der Funktionenfolge $(h_{u,v})_{u,v}$, die h_2 erzeugt. Analog verwenden wir später $N_{3,q}(h), .., N_{5,q}(h)$. Im Falle $q = \infty$ benutzt man nicht die Höldersche Ungleichung, sondern zieht das Supremum aus der Summe (2.5.13) raus (siehe nachfolgende Betrachtung). in (2.5.14) wird dann $m^{1-1/q}$ zu m und $N_{2,q}(h)$ zu $N_{2,\infty}(h)$. Man sieht also, dass man den Fall $q = \infty$ schreibweisentechnisch in (2.5.14) eingemeinden kann. Als nächstes behandeln wir $\|h_3 - B_m^{1/4}h_3|L_p(\mathbb{T}^2)\|$. Diese Beweistechnik funktioniert auch ganz analog bei h_4 und h_5. Es gilt also:

$$\|h_3 - B_m^{1/4}h_3|L_p(\mathbb{T}^2)\| \leq C_6\sum_{u=0}^{m-6}\sum_{v=m-5}^{\infty} 2^{r_0(u+v-m)}M(u,v,m)\|h_{u,v}|L_p(\mathbb{T}^2)\|.$$

Hier sieht man sehr schnell, dass $M(u,v,m) \leq u + 4$ gilt. Ergänzt man wieder den Faktor $2^{r(u+v)}2^{-r(u+v)}$, so ergibt sich:

$$\begin{aligned}
\|h_3 - B_m^{1/4} h_3 | L_p(\mathbb{T}^2)\| &\leq C_6 \left(\sup_{\substack{u=0\ldots m-6 \\ v=m-5\ldots\infty}} 2^{r(u+v)} \|h_{u,v}|L_p(\mathbb{T}^2)\| \right) \times \\
&\quad 2^{-mr_0} \sum_{u=0}^{m-6} \sum_{v=m-5}^{\infty} 2^{(u+v)(r_0-r)}(u+4) \\
&= \underbrace{C_6 \left(\sup_{\substack{u=0\ldots m-6 \\ v=m-5\ldots\infty}} 2^{r(u+v)} \|h_{u,v}|L_p(\mathbb{T}^2)\| \right)}_{=:N_{3,\infty}(h)} \times \\
&\quad 2^{-mr_0} \underbrace{\sum_{u=0}^{m-6} 2^{u(r_0-r)}(u+4)}_{\leq c_1(r)} \underbrace{\sum_{v=m-5}^{\infty} 2^{v(r_0-r)}}_{\leq c_2(r) 2^{m(r_0-r)}} \\
&\leq C_8 2^{-mr} N_{3,\infty}(h) \\
&\underset{(\ell_q \hookrightarrow l_\infty)}{\leq} C_9 2^{-mr} N_{3,q}(h) \qquad (2.5.15)
\end{aligned}$$

Wie schon gesagt, folgt analoges auch für h_4 und h_5. Fügt man jetzt (2.5.14) und (2.5.15) zusammen, so erhält man insgesamt mit (2.5.5):

$$\begin{aligned}
\|h - B_m^{1/4} h | L_p(\mathbb{T}^2)\| &\leq C_{10} m^{1-1/q} 2^{-mr} (N_{2,q}(h) + N_{3,q}(h) + N_{4,q}(h) + N_{5,q}(h)) \\
&\leq C_{10} m^{1-1/q} 2^{-mr} (N_{1,q}(h) + N_{2,q}(h) + N_{3,q}(h) + N_{4,q}(h) + N_{5,q}(h)).
\end{aligned}$$

Im Falle $q = \infty$ ist

$$N_{1,\infty}(h) + N_{2,\infty}(h) + N_{3,\infty}(h) + N_{4,\infty}(h) + N_{5,\infty}(h) \leq c \|h|S^r_{p,\infty}B(\mathbb{T}^2)\|$$

sofort klar. Im Falle $1 \leq q < \infty$ folgt:

$$\begin{aligned}
\|h - B_m^{1/4} h | L_p(\mathbb{T}^2)\|^q &\leq [C_{10} m^{1-1/q} 2^{-mr} (N_{1,q}(h) + N_{2,q}(h) + N_{3,q}(h) + N_{4,q}(h) + N_{5,q}(h))]^q \\
&\leq [C_{10} m^{1-1/q} 2^{-mr}]^q \\
&\quad 5^q \underbrace{(N_{1,q}(h)^q + N_{2,q}(h)^q + N_{3,q}(h)^q + N_{4,q}(h)^q + N_{5,q}(h)^q)}_{=\|h|S^r_{p,q}B(\mathbb{T}^2)\|^q}.
\end{aligned}$$

Das hat letztendlich

$$\|h - B_m^{1/4} h | L_p(\mathbb{T}^2)\| \leq C_{11} m^{1-1/q} 2^{-mr} \|h|S^r_{p,q}B(\mathbb{T}^2)\| \qquad (2.5.16)$$

zur Folge. Diesen Betrachtungen liegt die Voraussetzung $m > 6$ zugrunde. Im Falle $m \leq 6$ geht man folgendermassen vor:

$$\begin{aligned}
\|h - B_m^{1/4} h | L_p(\mathbb{T}^2)\| &\leq \sum_{u=0}^{\infty} \sum_{v=0}^{\infty} \|h_{u,v} - B_m^{1/4} h_{u,v} | L_p(\mathbb{T}^2)\| \\
\text{(2.5.7) - (2.5.9), (2.5.11)} \quad &\leq \tilde{C} m 2^{-mr_0} \sum_{u=0}^{\infty} \sum_{v=0}^{\infty} 2^{(u+v)r_0} \|h_{u,v}|L_p(\mathbb{T}^2)\| \\
&\leq \tilde{C} m 2^{-mr_0} \sup_{u,v} 2^{r(u+v)} \|h_{u,v}|L_p(\mathbb{T}^2)\| \underbrace{\sum_{u=0}^{\infty} \sum_{v=0}^{\infty} 2^{(u+v)(r_0-r)}}_{\leq c} \\
&\leq \tilde{C}_2 m 2^{-mr_0} \|h|S^r_{p,\infty}B(\mathbb{T}^2)\| < \infty \\
&\underset{(m\leq 6)}{\leq} \tilde{C}_3 \|h|S^r_{p,q}B(\mathbb{T}^2)\|
\end{aligned}$$

Mit einer geeigneten Konstanten gilt (2.5.16) also auch für $m \leq 6$ und damit für alle m. □

2.6 Abschliessende Bemerkung

Im letzten Abschnitt wurde für $h \in S^r_{p,q}B(\mathbb{T}^2)$ mit $r > 1/p$

$$\|h - B_m^{1/4}h|L_p(\mathbb{T}^2)\| \leq C2^{-mr}m^{1-1/q}\|h|S^r_{p,q}B(\mathbb{T}^2)\| \tag{2.6.1}$$

gezeigt. Betrachtet man den Operator $B_m^{1/4}$ unter einem anderen Gesichtspunkt, so stellt man fest, dass durch $B_m^{1/4}$ ein Approximationsprozess der folgenden Art erklärt ist:
Sei $\{\xi_1, ..., \xi_{M(m)}\} \subset \mathbb{T}^2$ die Menge der Punkte, an denen $B_m^{1/4}$ Funktionswerte seines Argumentes benötigt. Man nennt diese Punkte auch "sampling points". Dann lässt sich $B_m^{1/4}h$ auch schreiben als:

$$B_m^{1/4}h(x_1, x_2) = \sum_{j=1}^{M(m)} h(\xi_j)\Psi_{\xi_j}(x_1, x_2),$$

wobei die Funktionen $\Psi_{\xi_j}(x_1, x_2)$ trigonometrische Polynome unabhängig von h sind. Durch den Index ξ_j wird ihre Abhängigkeit von $\{\xi_1, ..., \xi_{M(m)}\}$ deutlich gemacht. Wir wollen nun (2.6.1) in Abhängigkeit von $M(m)$ ausdrücken. In Bemerkung 2.2 wurde festgestellt, dass $M(m)$ die Grössenordnung $m2^m$ besitzt. Damit hat man $\log M(m) \sim m$. Somit gilt:

$$\begin{aligned} 2^{-mr}m^{1-1/q} &= 2^{-mr}m^{-r}m^r m^{1-1/q} \\ &= (m2^m)^{-r}m^{r+1-1/q} \\ &\sim M(m)^{-r}\log(M(m))^{r+1-1/q}. \end{aligned} \tag{2.6.2}$$

Sei F die Einheitskugel in $S^r_{p,q}B(\mathbb{T}^2)$. Dann hat man mit (2.6.2)

$$\sup_{h\in F}\|h - B_m^{1/4}h|L_p(\mathbb{T}^2)\| \leq CM(m)^{-r}(\log M(m))^{r+1-1/q}. \tag{2.6.3}$$

Die Fragestellung, die dabei aufkommt, ist folgende: Wie gut kann man bei festgehaltener Anzahl von sampling points die Menge F auf diese Weise approximieren? Wir nehmen dabei den allgemeineren Fall, dass die Funktionen Ψ_{ξ_j} beliebige $L_p(\mathbb{T}^2)$-Funktionen sein können. Der Freiheitsgrad besteht darin, die Anordnung der sampling points und der dazugehörigen Funktionen Ψ_{ξ_j} zu wählen. Als Mass der Güte der Approximation betrachten wir die Grösse

$$\sigma_M := \inf_{\{\xi_1,\dots,\xi_M\}} \inf_{\Psi_{\xi_1},\dots,\Psi_{\xi_M}} \sup_{h\in F} \left\| h - \sum_{j=1}^{M} h(\xi_j)\Psi_{\xi_j} \middle| L_p(\mathbb{T}^2) \right\|.$$

Mit (2.6.3) können wir diese Frage schon teilweise beantworten. Es gilt nämlich

$$\sigma_M \leq C_2 M^{-r}(\log M)^{r+1-1/q}. \tag{2.6.4}$$

Es bleibt die Frage, ob es eine Anordnung von sampling points mit zugehörigen Funktionen Ψ_{ξ_j} gibt, so dass man in (2.6.4) eine bessere Fehlerordnung erzielen kann.

Literaturverzeichnis

[Ku1] Kufner, Fucik, *Function Spaces*, ACADEMIA, Publishing House of the Czechoslovak Academy of Sciences, 1977

[STr] H.-J. Schmeisser, H. Triebel, *Topics in Fourier Analysis and Function Spaces*, Wiley, Chichester, 1987

[Si1] W. Sickel, *Vorlesung über „Approximationstheorie"*, FSU Jena, WS 02/03

[Si2] W. Sickel, *Approximate Recovery of Functions and Besov Spaces of Dominating Mixed Smoothness*, Constructive Theory Of Functions, Varna 2002, (B. Bojanov, Ed.), DARBA, Sofia, pp. 404-411.

[SS1] W. Sickel, F. Sprengel, *Interpolation on Sparse Grids and Tensor Products of Nikolskij-Besov Spaces*, Journal of Computational Analysis and Applications, Vol. 1, No. 3, 1999

[Tr1] H. Triebel, *Higher Analysis*, Johann Ambrosius Barth Verlag, 1992

[Tr2] H. Triebel, *Interpolation Theory, Function Spaces, Differential Operators*, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1978

Selbständigkeitserklärung

Ich erkläre, dass ich die vorliegende Arbeit selbständig und nur unter Verwendung der angegebenen Hilfsmittel und Literatur angefertigt habe.

Jena, den 19.03.2004