Vorlesung "Hilbertraumtheorie"

Technische Universität Chemnitz
Wintersemester 2005/2006
Prof. Dr. Peter Stollmann

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Skalarprodukträume

Wir betrachten immer Vektorräume V über $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Definition 1.1 (Sesquilinearform)
Eine Abbildung $s : V \times V \to \mathbb{K}$ heißt Sesquilinearform, falls $\forall x, y, z \in V, \mu, \lambda \in \mathbb{K}$:

$$s(\lambda x + \mu y, z) = \lambda s(x, y) + \mu s(y, z)$$
$$s(x, \lambda y + \mu z) = \bar{\lambda} s(x, y) + \bar{\mu} s(y, z)$$

Eine Sesquilinearform heißt symmetrisch bzw. hermitesch falls:

$$s(x, y) = \overline{s(y, x)}$$

Gilt weiterhin

$$s(x, x) > 0 \qquad \forall x \in V \backslash \{0\}$$

so heißt s positiv definit. Eine positiv definite Sesquilinearform auf V heißt Skalarprodukt (inneres Produkt, Schreibweise $\langle \cdot | \cdot \rangle$), V heißt dann Skalarproduktraum bzw. Prähilbertraum. Wie wir sehen werden, definiert

$$||x|| := \sqrt{\langle x | x \rangle}$$

eine Norm auf dem Skalarproduktraum V.

Satz 1.2 (Cauchy - Schwarz Ungleichung)
Sei V ein Skalarproduktraum, dann gilt:

$$|\langle x | y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\| \qquad \forall x, y \in V$$

Korollar 1.3
Ist $(V, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ ein Skalarproduktraum, dann definiert $||x|| := \sqrt{\langle x | x \rangle}$ eine Norm.

In diesem Sinne ist jeder Skalarproduktraum ein metrischer bzw. ein normierter Raum. Somit kann man von Konvergenz, Cauchy Folgen, Stetigkeit und Vollständigkeit sprechen.

$$x_n \to x \text{ in } (V, \langle \cdot | \cdot \rangle) :\Leftrightarrow ||x_n - x|| \to 0$$

V ist vollständig, falls jede Cauchyfolge konvergiert. In diesem Fall nennt man V Hilbertraum.

Beispiel 1.4
$\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{C}^n$ sind Hilberträume bzgl. des euklidischen Skalarproduktes.

Beispiel 1.5
Sei $l^2 = l^2_{\mathbb{K}} = l^2_{\mathbb{K}}(\mathbb{N})$ *wobei*

$$l^2_{\mathbb{K}} = \{x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} : x_n \in \mathbb{K}\ \forall n \in \mathbb{N} : \sum_n |x_n|^2 < \infty\}$$

$l^2_{\mathbb{K}}$ *ist ein Vektorraum bzgl. koordinatenweiser Addition und skalarer Multiplikation:*

$$x, y \in l^2 \Rightarrow x + y \in l^2 : \sum_n |x_n + y_n|^2 \le \sum_n 2(|x_n|^2 + |y_n|^2) < \infty$$

$$\langle x|y\rangle = \sum_n x_n \overline{y_n} < \infty : |x_n y_n| \le \frac{1}{2}(|x_n|^2 + |y_n|^2)$$

$\langle\cdot|\cdot\rangle$ *ist ein Skalarprodukt auf dem* l^2
Vollständigkeit ist der wichtigste Teil. Wir müssen zeigen: ist $(x^{(n)}(k))_{k\in\mathbb{N}}$ *eine Cauchyfolge, dann konvergiert* $(x^{(n)})$ *gegen ein* $x \in l^2$*.*
Sei $(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ *Cauchyfolge. Dann gilt* $\forall\epsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}:$

$$(\sum_{k=1}^{\infty} |x^{(n)}(k) - x^{(m)}(k)|^2)^{\frac{1}{2}} = \left\| x^{(n)} - x^{(m)} \right\| \le \epsilon$$

Für festes k: $|x^{(n)}(k) - x^{(m)}(k)|^2 \le \epsilon^2$
Da $(x^{(n)}(k))_{n\in\mathbb{N}}$ *eine Cauchyfolge ist, folgt aus der Vollständigkeit von* $\mathbb{K}$ *:*

$$x(k) := \lim_{n\to\infty} x^{(n)}(k)$$

Müssen zeigen: $x \in l^2$, $||x - x^{(n)}|| \to 0$. *Sei* $M \in \mathbb{N}$ *fest:*

$$\begin{array}{rccc} & \sum_{k=1}^{M} |x^{(n)}(k) - x^{(m)}(k)|^2 & \le \epsilon^2 \\ \overset{m\to\infty}{\Longrightarrow} & \sum_{k=1}^{M} |x^{(n)}(k) - x(k)|^2 & \le \epsilon^2 \\ \textit{Da M beliebig folgt:} & \sum_{k=1}^{\infty} |x^{(n)}(k) - x(k)|^2 & \le \epsilon^2 \\ \Rightarrow & x^{(n)} - x \in l^2 & \\ x \in l^2 \textit{ und } \forall n \ge N : & ||x^{(n)} - x|| & < \epsilon \end{array}$$

q.e.d.

Beispiel 1.6
Auf $C[-1,1]$ *betrachten wir das Skalarprodukt*

$$\langle f|g\rangle := \int_{-1}^{1} f(x)\overline{g(x)}dx$$

Ist $\langle f|f\rangle = 0$ *so folgt* $\int\limits_{-1}^{1} |f(x)|^2 dx = 0 \Rightarrow f \equiv 0$
Aber $(C[-1,1], \langle\cdot|\cdot\rangle)$ *ist nicht vollständig:*

$$f_n(x) := \left\{ \begin{array}{ccc} 0 & : & x \in [-1, 0] \\ \frac{1}{n} & : & x \in (0, \frac{1}{n}] \\ 1 & : & x \in (\frac{1}{n}, 1] \end{array} \right\}$$

(f_n) ist eine Cauchyfolge bzgl. $\langle\cdot|\cdot\rangle$:
Für $m \geq n \geq N$:

$$||f_n - f_m|| = \int\limits_{-1}^{1} |f_n - f_m|^2 dx = \int\limits_{0}^{\frac{1}{N}} |f_n - f_m|^2 dx \leq \int\limits_{0}^{\frac{1}{N}} 1 dx = \frac{1}{N}$$

$\Rightarrow$ *(f_n) ist eine Cauchyfolge, hat aber keinen Grenzwert in $C[-1,1]$, da*

$$f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \left\{ \begin{array}{ccc} 0 & : & x \in [-1,0] \\ 1 & : & x \in (0,1] \end{array} \right\}$$

Bemerkung 1
Wir werden später sehen, daß jeder separable Hilbertraum isomorph zu $l^2_{\mathbb{K}}$ ist. Zwei Skalarprodukträume $(V_1, \langle\cdot|\cdot\rangle_1)$ und $(V_2, \langle\cdot|\cdot\rangle_2)$ über dem selben Körper $\mathbb{K}$ heißen isometrisch isomorph, wenn es einen Isomorphismus $u : V_1 \to V_2$ gibt, so daß

$$\langle u_x|u_y\rangle_2 = \langle x|y\rangle_1 \;\; \forall x, y \in V_1$$

Lemma 1.7
Sei $(V, \langle\cdot|\cdot\rangle)$ ein Skalarproduktraum. Dann gilt:

1. *Polarisationsidentität: $\forall x, y \in V$*

$$\langle x|y\rangle = \left\{ \begin{array}{lcl} \frac{1}{4}(||x+y||^2 - ||x-y||^2) & : & K = \mathbb{R} \\ \frac{1}{4}(||x+y||^2 - ||x-y||^2 + i||x+iy||^2 - i||x-iy||^2) & : & K = \mathbb{C} \end{array} \right\}$$

2. *Parallelogrammidentität: $\forall x, y \in V$*

$$||x+y||^2 + ||x-y||^2 = 2(||x||^2 + ||y||^2)$$

Beweis *nachrechnen*

Bemerkung 2
In einem Skalarproduktraum $(V, \langle\cdot|\cdot\rangle)$ ist das Skalarprodukt $\langle\cdot|\cdot\rangle : V \times V \to \mathbb{K}$ stetig:

$$x_n \to x \wedge y_n \to y \Rightarrow \langle x_n|y_n\rangle \to \langle x|y\rangle$$

Beweis

$$|\langle x_n|y_n\rangle - \langle x|y\rangle| \leq |\langle x_n|y_n - y\rangle| + |\langle x_n - x|y\rangle| \leq ||x_n|| \cdot ||y_n - y|| + ||x_n - x|| \cdot ||y|| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

q.e.d.

Kapitel 2

Orthogonalität und Approximation

Sei $(V, \langle\cdot|\cdot\rangle)$ ein Skalarproduktraum mit der induzierten Norm $||x|| := \sqrt{\langle x|x\rangle}$. Dann sind

$$B_r(x) = \{y : ||x-y|| \leq r\}$$
$$U_r(x) = \{y : ||x-y|| < r\}$$

die abgeschlossene und die offene Kugel des Radius r um den Punkt x.
Erinnerung: Eine Teilmenge U eines normierten Raumes heißt offen, wenn für alle $x \in U$ ein $r > 0$ existiert, so daß $B_r(x) \subseteq U$. A heißt abgeschlossen, falls das Komplement A^c offen ist, bzw. für $(x_n) \subseteq A$, $x_n \to x$ folgt $x \in A$.

Satz 2.1 (Approximationssatz)
Sei $(H, \langle\cdot|\cdot\rangle)$ ein Hilbertraum, $C \neq \emptyset$ eine konvexe, abgeschlossene Teilmenge und $x \in H$. Dann existiert ein eindeutiges $y \in C$ mit:

$$||x-y|| = inf\{||x-c|| : c \in C\} =: d(x,C)$$

Bemerkung 3
Dieser Satz hat viele wichtige Anwendungen, zum Beispiel das Dirichlet'sche Prinzip.

Beweis
Sei $(y_n) \subset C$ eine Folge mit $||x-y_n|| \to d(x,C) =: d$. Dann ist (y_n) eine Cauchyfolge. Wir benutzen die Parallelogrammidentität für $x-y_n$ und $x-y_m$:

$$||(x-y_m)+(x-y_n)||^2 + ||(x-y_n)-(x-y_m)||^2 = 2(||x-y_n||^2 + ||x-y_m||^2)$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow ||y_n-y_m||^2 &= 2(||x-y_n||^2 + ||x-y_m||^2) - ||2x-(y_n+y_m)||^2 \\ &= 2(||x-y_n||^2 + ||x-y_m||^2) - 4||x-\tfrac{1}{2}(y_n+y_m)||^2 \\ \overset{\frac{1}{2}(y_n+y_m)\in C}{\Longrightarrow} &\leq 2(||x-y_n||^2 + ||x-y_m||^2) - 4d^2\end{aligned}$$

Da $||x-y_n|| \to d$ finden wir für $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ mit $||x-y_n||^2 \leq d^2 + \frac{1}{4}\epsilon^2$ für $n \geq N$. Für $n, m \geq N$ folgt:

$$||y_n-y_m||^2 \leq \epsilon^2 \Rightarrow ||y_n-y_m|| \leq \epsilon$$

Damit ist (y_n) eine Cauchyfolge und es existiert $y \in C$ mit $y = \lim\limits_{n\to\infty} y_n$ und $||x-y|| = d$.
Eindeutigkeit: Angenommen es existieren $y_1, y_2 \in C$ mit

$$||x-y_1|| = d = ||x-y_2||$$

$$y_n := \left\{ \begin{array}{lll} y_1 & : & n\, ungerade \\ y_2 & : & n\, gerade \end{array} \right\}$$

und $||x - y_n|| \to d$. *Von oben wissen wir, daß* (y_n) *eine Cauchyfolge ist, und damit folgt* $y_1 = y_2$.

q.e.d.

Definition 2.2
Sei $(V, \langle\cdot|\cdot\rangle)$ *ein Skalarproduktraum, zwei Elemente* $x, y \in V$ *heißen orthogonal,* $x \perp y$*, falls* $\langle x|y\rangle = 0$*. In diesem Falle gilt :* $||x + y||^2 = ||x||^2 + ||y||^2$ *(Satz von Pythagoras). Wir schreiben* $x \perp A \subset V$ *falls* $x \perp y$ *für alle* $y \in A$*. Weitere Schreibweise:*

$$A^\perp = \{x \in V \;:\; x \perp A\}$$

und $A \perp B$ *falls* $B \subseteq A^\perp$

Proposition 2.3

1. $\{0\}^\perp = V$
2. $V^\perp = \{0\}$
3. *Für beliebiges* $A \subseteq V \;:\; A^\perp$ *ist ein abgeschlossener Unterraum.*
4. $A \subset B \Rightarrow B^\perp \subset A^\perp$
5. $A^\perp = (lin\ A)^\perp = (\overline{lin\ A})^\perp$

Beweis entfällt

Satz 2.4
Sei $(H, \langle\cdot|\cdot\rangle)$ *ein Hilbertraum,* $L \subset H$ *ein abgeschlossener Unterraum. Dann gilt:*

$$H = L \oplus L^\perp$$

d.h. jedes $x \in H$ *lässt sich eindeutig schreiben als*

$$x = x_L + x_\perp$$

wobei $x_L \in L$ *und* $x_\perp \in L^\perp$*. Dies definiert eine lineare Abbildung*

$$P_L : H \to H : x \mapsto x_L$$

Die Projektion P_L^2 *ist kontraktiv, d.h.* $P_L^2 = P_L$ *und* $||P_L x|| \leq ||x||\ \forall x \in H$.

Beweis
Sei $x \in H$*, aus Satz 2.1 folgt die Existenz von* $x_L \in L$ *mit*

$$||x - x_L|| = min\{||x - y|| \;:\; y \in L\}$$

Wir setzen $x_\perp := x - x_L$ *und müssen zeigen, daß* $x_\perp \in L^\perp$.
Sei $v \in L\backslash\{0\}$*, da* $||x - x_L||^2 = (min\{||x-y|| \;:\; y \in L\})^2 = d^2$*, erhalten wir* $\forall t \in \mathbb{K}$*:*

$$\begin{array}{lll} d^2 & \leq & ||x - (x_L + tv)||^2 \\ & = & ||x - x_L||^2 - 2Re\,\langle x - x_L|tv\rangle + ||tv||^2 \\ 0 & \leq & -2\bar{t}Re\,\langle x - x_L|v\rangle + |t|^2||v||^2 \end{array}$$

Setzen $t = \frac{\langle x - x_L|v\rangle}{||v||^2}$

$$\Rightarrow 0 \leq -2\frac{|\,\langle x - x_L|v\rangle\,|^2}{||v||^2} + \frac{|\,\langle x - x_L|v\rangle\,|^2}{||v||^2} = -\frac{|\,\langle x - x_L|v\rangle\,|^2}{||v||^2}$$

$$\Rightarrow \langle x - x_L|v\rangle = 0$$

Eindeutigkeit und Eigenschaften von P_L *: Übung.*

q.e.d.

Korollar 2.5
Sei $(H, \langle\cdot|\cdot\rangle)$ ein Hilbertraum, $A \subset H$, $A \neq \emptyset$. Dann gilt

$$(A^{\perp})^{\perp} = \overline{lin\ A}$$

Beweis
Wir wissen bereits $A^{\perp} = (\overline{lin\ A})^{\perp}$.
Sei $L := \overline{lin\ A}$, es bleibt zu zeigen, daß $(L^{\perp})^{\perp} = L$ für einen beliebigen Unterraum L.
Klar : $L \subset (L^{\perp})^{\perp}$.
Andererseits läßt sich jedes $x \in (L^{\perp})^{\perp}$ schreiben als: $x = x_L + x_{\perp}$ für $x_L \in L$ und $x_{\perp} \in L^{\perp}$.
Klar: $x_{\perp} = 0$ da $x \perp L^{\perp}$
$\Rightarrow x = x_L \in L$

q.e.d.

Kapitel 3

Orthonormalsysteme

Definition 3.1
Sei $(x_\iota)_{\iota\in I}$ *eine Familie mit der zugehörigen Abbildung* $x : I \to X : x(\iota) \mapsto x_\iota$.
Eine Familie $(e_\iota)_{\iota\in I}$ *heißt Orthonormalsystem (ONS), falls*

$$||e_\iota|| = 1\,, \qquad e_{\iota_1} \perp e_{\iota_2} \qquad \forall \iota_1 \neq \iota_2$$

Eine Unterraum $E \subset V$ *heißt total, falls* $\overline{lin\, E} = V$. *Ein ONS* $(e_\iota)_{\iota\in I}$ *heißt Orthonormalbasis (ONB), falls* $\{e_\iota \ : \ \iota \in I\}$ *total ist. Ein ONS heiß maximal, wenn es keine weiteren Elemente gibt die das ONS erweitern, d.h.*

$$\forall e \in V \ : ||e|| = 1,\ e \perp e_\iota\ \forall \iota \in I \Rightarrow\ e \equiv 0$$

.

Ziele

- *Jeder Hilbertraum besitzt eine ONB*
- *Ist* (e_ι) *ein ONB in V, dann existieren für alle v Koeffizienten* $c_\iota \in \mathbb{K}$ *so das gilt:*
$$v = \sum_{\iota\in I} c_\iota e_\iota$$
$c_\iota = \langle v|e_\iota\rangle$, $c_\iota \neq 0$ *für abzählbare viele* ι, $||v||^2 = \sum |c_\iota|^2$.

Proposition 3.2
Sei $(H, \langle\cdot|\cdot\rangle)$ *ein Hilbertraum,* $E \subset H$. *Dann ist E genau dann total, wenn*

$$E^\perp = \{0\}$$

Beweis
Ist E total, dann gilt $\overline{lin\, E} = H$ *und* $E^\perp = (\overline{lin\, E})^\perp = H^\perp = \{0\}$.
Andererseits folgt aus $E^\perp = \{0\}$, *daß* $H = \{0\}^\perp = (E^\perp)^\perp = \overline{lin\, E}$ *und damit ist E total.*

q.e.d.

Beispiel 3.3
In $l^2_{\mathbb{K}}$ *bilden die Elemente* $e_n := (\delta_{nk})_{k\in\mathbb{N}}$ *eine ONB. Wie man leicht sieht, bilden* $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *ein ONS. Für jedes* $x \in l^2_{\mathbb{K}}$ *haben wir* $\langle x|e_n\rangle = x_n$. *Aus* $x \perp E$ *folgt schließlich* $x_n = 0\, \forall n \in \mathbb{N}$ *und damit ist* $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *total.*

Beispiel 3.4
Betrachten wir $C[0,1]$ mit

$$\langle f|g\rangle := \int_0^1 f(x)\overline{g(x)}dx \qquad f,g \in C[0,1]$$

Definiere $e_n(x) := e^{2\pi ixn}$, $n \in \mathbb{Z}$. Dann ist $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ eine ONB in $C[0,1]$. Wiederum klar ist, daß $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ ein ONS ist. Um zu zeigen, daß es total ist benötigen wir den Satz von Stone-Weierstrass: $\{e_n : n \in \mathbb{Z}\}$ ist total in $\{f \in C[0,1] : f(0) = f(1)\}$ bzgl. $||\cdot||_\infty$. Dann ist E total in $(C[0,1], ||\cdot||_2)$.

Lemma 3.5
Sei $(V, \langle\cdot|\cdot\rangle)$ ein Skalarproduktraum. Dann gilt:

1. *Jedes ONS ist linear unabhängig.*
2. *Jede ONB ist maximal.*
3. *Ist V ein Hilbertraum, dann ist jedes maximale ONS eine ONB*

Beweis

1. *Sei $(e_\iota)_{\iota\in I}$ ein ONS. Seien $\iota_1,..,\iota_k$ verschieden und $c_1,..,c_k \in \mathbb{K}$ so, daß*

$$\sum_{k=1}^n c_k e_{\iota_k} = 0$$

$$\Rightarrow\ 0 = ||\sum_{k=1}^n c_k e_{\iota_k}||^2 = \left\langle \sum_{k=1}^n c_k e_{\iota_k} \middle| \sum_{k=1}^n c_k e_{\iota_k} \right\rangle = \sum_{k=1}^n |c_k|^2 \Rightarrow\ c_k = 0\ \forall k \in \mathbb{N}$$

2. *Ist $(e_\iota)_{\iota\in I}$ eine ONB, dann ist $(e_\iota)_{\iota\in I}$ total.*
   $\{e_\iota : \iota \in I\}^\perp = \{0\}$, also $(e_\iota)_{\iota\in I}$ ist maximal.
3. *Ist $(e_\iota)_{\iota\in I}$ maximal, dann gilt $\{e_\iota : \iota \in I\}^\perp = \{0\}$. Da H ein Hilbertraum, ist $\{e_\iota : \iota \in I\}$ total.*

q.e.d.

Satz 3.6 (Schmidt'sches Orthonormalisierungsverfahren)
Sei $(V, \langle\cdot|\cdot\rangle)$ ein Skalarproduktraum, $N \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ und $F = \{x_n : n \in \mathbb{N}$ mit $n \leq N\}$. Dann existiert $N' \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ und ein ONS $(e_\iota)_{\iota\in I}$ so das gilt:

$$lin\{e_n : n \leq N'\} = lin\, F$$

Ist F linear unabhängig, dann können die (e_n) so gewählt werden, daß

$$lin\{x_1,..,x_n\} = lin\{e_1,..,e_n\} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

gilt.

Beweis
Es reicht die zweite Behauptung zu zeigen. Dies geschieht konstruktiv:

$$e_1 := \frac{x_1}{||x_1||},\ e_2 := \frac{x_2 - \langle x_2|e_1\rangle\, e_1}{||x_2 - \langle x_2|e_1\rangle\, e_1||}$$

$\Rightarrow lin\{e_1, e_2\} = lin\{x_1, x_2\}$
Sind $e_1, .., e_n$ gewählt, dann definiere induktiv:

$$e_{n+1} := \frac{x_{n+1} - \sum_{j=1}^{n} \langle x_{n+1}|e_j\rangle\, e_j}{||x_{n+1} - \sum_{j=1}^{n} \langle x_{n+1}|e_j\rangle\, e_j||}$$

q.e.d.

Definition 3.7
Ein normierter Raum heißt separabel, falls es eine abzählbare, totale Teilmenge gibt ($\Leftrightarrow$ es existiert eine abzählbare, dichte Teilmenge).

Satz 3.8

1. *Jeder separable Skalarproduktraum besitzt eine ONB.*
2. *Jeder Hilbertraum besitzt eine ONB.*

Beweis

1. *folgt direkt aus dem Schmidt'schen Orthonormalisierungsverfahren:*
   Sei $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ total in V. Dann existiert ein ONS $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ mit:

$$\begin{aligned} lin\{e_n : n \in \mathbb{N}\} &= lin\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \\ \Rightarrow \overline{lin\{e_n : n \in \mathbb{N}\}} &= V \end{aligned}$$

2. *Mit dem Zorn'schen Lemma: Betrachten $Z := \{ONS\}$*
   Ein ONS ist $e : I \to H$ mit $\langle e(i)|e(j)\rangle = \delta_{ij}$ für $i, j \in I$. Wir schreiben $e \leq f$, wenn f als Abbildung e fortsetzt. Um das Zorn'sche Lemma anwenden zu können, müssen wir zeigen, daß jede total geordnete Teilmenge $C \subseteq Z$ eine obere Schranke hat.

$$C \subseteq \{e : I \to H \quad ONS\} = \{\beta_\alpha : I_\alpha \to H \ : \ \alpha \in A\}$$

   wobei A eine geordnete Menge ist und $\beta_\alpha \leq \beta_{\alpha'}$ für $\alpha \leq \alpha'$. Definiere:

$$\beta_\infty : \bigcup_{\alpha \in A} I_\alpha \to H,\ \beta_\infty(i) = \beta_\alpha(i)\ \forall i \in I$$

   (β_∞ ist wohldefiniert, da für $i \in I_\alpha \cap I_{\alpha'}$ $\beta_\alpha(i) \equiv \beta_{\alpha'}(i)$)
   $\Rightarrow$ Z besitzt ein maximales Element
   $\Rightarrow$ Z besitzt eine ONB

q.e.d.

Satz 3.9
Sei $(V, \langle\cdot|\cdot\rangle)$ ein Skalarproduktraum und $(e_\iota)_{\iota \in I}$ ein ONS. Dann gilt:

1. $\sum_{\iota \in I} |\langle x|e_\iota\rangle|^2 \leq ||x||^2$ *(Bessel'sche Ungleichung)*
   wobei $\{\iota \in I : \langle x|e_\iota\rangle \neq 0\}$ abzählbar ist
2. *Äquivalent:*

(a) $(e_\iota)_{\iota\in I}$ *ist eine ONB*

(b) $\sum_{\iota\in I} |\langle x|e_\iota\rangle|^2 = ||x||^2 \quad \forall x \in V$ *(Parseval'sche Identität)*

In diesem Falle erhalten wir für alle $x \in V$

$$x = \sum_{\iota\in I} \langle x|e_\iota\rangle\, e_\iota$$

3. *Sei* $\{\iota_n : n \in \mathbb{N}\} \subset I$, $(c_n) \subset \mathbb{K}$. *Dann gilt:*

$$(\sum_{n=1}^{N} c_n e_{\iota_n})\; ist\, Cauchyfolge\; \Leftrightarrow (c_n) \in l^2_{\mathbb{K}}$$

4. *Ist* $x = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e_{\iota_n}$, *dann gilt* $c_n = \langle x|e_{\iota_n}\rangle$. *Und für beliebiges* $y \in V$:

$$\langle x|y\rangle = \sum_{\iota\in I} \langle x|e_\iota\rangle \langle e_\iota|y\rangle = \sum_{n} \langle x|e_{\iota_n}\rangle \langle e_{\iota_n}|y\rangle$$

Beweis

1. *Sei* $J \subset I$ *endlich, dann gilt*

$$||\sum_{\iota\in J} \langle x|e_\iota\rangle\, e_\iota||^2 = \sum_{\iota\in J} |\langle x|e_\iota\rangle|^2 \overset{!}{\leq} ||x||^2$$

denn für jedes $\alpha \in J$ *gilt*

$$\left\langle x - \sum_{\iota\in J} \langle x|e_\iota\rangle\, e_\iota \middle| e_\alpha \right\rangle = 0$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad & x - \sum_{\iota\in J} \langle x|e_\iota\rangle\, e_\iota \in lin\{e_\iota \;:\; \iota \in J\}^\perp = L^\perp \\ \Rightarrow \quad & \sum_{\iota\in J} \langle x|e_\iota\rangle\, e_\iota = P_L x \end{aligned}$$

zu zeigen: $\{\iota \in I :\ \langle x|e_\iota\rangle \neq 0\}$ *ist abzählbar.*

$$\begin{aligned} & I_n := \{\iota \in I :\ |\langle x|e_\iota\rangle| \geq \tfrac{1}{n}\} \\ \Rightarrow \quad & I_n\; ist\, endlich,\; |I_n| \leq n^2 ||x||^2 \\ \Rightarrow \quad & I_0 = \bigcup_n I_n \; ist\ abzählbar \end{aligned}$$

Das impliziert die Bessel'sche Ungleichung.

2. (a) $\Rightarrow$ (b)

Sei $(e_\iota)_{\iota\in I}$ *eine ONB und* $x \in V$, *dann existieren für beliebiges* $\epsilon > 0$ $i_1, .., i_n \in I$ $c_1, .., c_n \in \mathbb{K}$ *mit*

$$||x - \sum_{j=1}^{n} c_j e_{i_j}||^2 \leq \epsilon$$

Wir erhalten

$$
\begin{aligned}
0 &\leq ||x||^2 - \sum_{\iota \in J} |\langle x|e_\iota\rangle|^2 \leq ||x||^2 - \sum_{j=1}^{n} |\left\langle x|e_{i_j}\right\rangle|^2 \\
&= ||x||^2 - ||\sum_{j=1}^{n} \left\langle x|e_{i_j}\right\rangle e_{i_j}||^2 = ||x - \sum_{j=1}^{n} \left\langle x|e_{i_j}\right\rangle e_{i_j}||^2 \\
&\leq ||x - \sum_{j=1}^{n} c_j e_{i_j}||^2 \leq \epsilon
\end{aligned}
$$

Da $\epsilon > 0$ beliebig, gilt die Parseval'sche Identität.
Sei $\{i_n \,:\, n \in \mathbb{N}\} = \{i_n \,:\, \langle x|e_{i_n}\rangle \neq 0\}$.

$$
\begin{aligned}
&\Rightarrow \quad x \in \overline{lin\,\{e_{i_n} \,:\, n \in \mathbb{N}\}} \\
&\Rightarrow \quad \forall \epsilon > 0\, \exists c_1, .., c_n \,:\, ||x - \sum_{j=1}^{n} c_j e_{i_j}||^2 \leq \epsilon \\
&\Rightarrow \quad ||x - \sum_{n=1}^{N} \langle x|e_{i_n}\rangle e_{i_n}||^2 \leq \epsilon \\
&\Rightarrow \quad x = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} \left\langle x|e_{i_j}\right\rangle e_{i_j} = \sum_{\iota \in I} \langle x|e_\iota\rangle e_\iota
\end{aligned}
$$

$(b) \Rightarrow (a)$
Angenommen die Parseval'sche Identität gilt.
Sei $\{i_n \,:\, n \in \mathbb{N}\} = \{i \in I \,:\, \langle x|e_i\rangle \neq 0\}$.
Dann gilt:

$$
\begin{aligned}
&\Rightarrow \quad ||x - \sum_{j=1}^{n} \left\langle x|e_{i_j}\right\rangle e_{i_j}||^2 = ||x||^2 - \sum_{j=1}^{n} |\left\langle x|e_{i_j}\right\rangle|^2 \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \\
&\Rightarrow \quad x = \sum_{j=1}^{\infty} \left\langle x|e_{i_j}\right\rangle e_{i_j} \in \overline{lin\,\{e_n \,:\, n \in \mathbb{N}\}} \\
&\Rightarrow \quad \{e_\iota \,:\, \iota \in I\}\ \text{ist eine ONB}
\end{aligned}
$$

3. *Definiere $y_n := \sum_{k=1}^{n} c_k e_{i_k}$. Sei $n \geq m$.*

$$||y_n - y_m||^2 = ||\sum_{k=m+1}^{n} c_k e_{i_k}||^2 = \sum_{k=m+1}^{n} |c_k|^2$$

4. *Es gilt:*

$$\langle x|e_{i_n}\rangle = \left\langle \sum_{k=1}^{\infty} c_k e_{i_k} \middle| e_{i_n} \right\rangle = \lim_{N\to\infty} \sum_{k=1}^{N} c_k \langle e_{i_k}|e_{i_n}\rangle = c_n$$

Für beliebiges $y \in V$:

$$
\begin{aligned}
\langle x|y\rangle &= \lim_{N\to\infty} \left\langle \sum_{k=1}^{N} c_k e_{i_k} \middle| y \right\rangle = \lim_{N\to\infty} \sum_{k=1}^{N} c_k \langle e_{i_k}|y\rangle \\
&= \lim_{N\to\infty} \sum_{k=1}^{N} \langle x|e_{i_k}\rangle \langle e_{i_k}|y\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \langle x|e_{i_k}\rangle \langle e_{i_k}|y\rangle \qquad q.e.d
\end{aligned}
$$

Bemerkung 4
In vorigen Beweis haben wir benutzt, daß für $J \subset I$ endlich und $L = lin\{e_\iota : \iota \in J\}$ folgendes gilt:

$$\sum_{\iota \in J} \langle x | e_\iota \rangle \, e_\iota = P_L x$$

Das gilt in Hilberträumen auch für beliebiges J, da

$$x - \sum_{\iota \in J} \langle x | e_\iota \rangle \, e_\iota = P_L x \perp e_\alpha \qquad \forall \alpha \in J$$

Kapitel 4

Lineare Operatoren

In diesem Kapitel reicht es normierte Räume $(E, ||\cdot||_E)$ *und* $(F, ||\cdot||_F)$ *zu betrachten.*

Definition 4.1
Eine Abbildung $T : D \to F$, $D \subset E$ *Unterraum, heißt linearer Operator, falls T linear ist. In diesem Fall ist sein Graph*

$$G(T) := \{(x, Tx) \ : \ x \in D\} \subseteq E \times F$$

eine Unterraum. Wir nennen T abgeschlossen, falls G(T) abgeschlossen ist, d.h.

$$x_n \to x, \, Tx_n \to y \ \Rightarrow \ x \in D \, und \, Tx = y$$

Notationen für einen linearen Operator:

$D :=$	$D(T)$	*Definitionsbereich*
$N :=$	$N(T) = \{x \in D \ : \ Tx = 0\}$	*Kern*
$R :=$	$R(T) = \{Tx \ : \ x \in D\}$	*Bild*

(N(T) ist abgeschlossen, wenn T abgeschlossen ist)

Als erstes werden wir beschränkte, bzw. stetige Operatoren betrachten:

Definition 4.2
Ein linearer Operator $T : E \to F$ *heißt beschränkt, falls*

$$||T|| := sup\{||Tx||_F \ : \ ||x||_E \leq 1\} < \infty$$

Dies definiert eine Norm auf

$$\mathcal{L}(E, F) := \{T : E \to F \ : \ ||T|| < \infty\}$$

Ein wichtiger Spezialfall ist $F = \mathbb{K}$ *(wobei E ein* $\mathbb{K}$*-Vektorraum ist). In diesem Falle nennt man*

$$E' := \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$$

den Dualraum von E, wobei $\varphi \in E'$ *beschränkte, lineare Funktionale sind.*

Proposition 4.3
Sei $T : E \to F$ *linear. Äquivalent:*

1. *T ist gleichmäßig stetig*
2. *T ist stetig*
3. *T ist stetig in 0*

4. $||T|| < \infty$

Beweis *entfällt*

Satz 4.4
Ist $(F, ||\cdot||_F)$ *ein Banachraum, dann ist* $(\mathcal{L}(E,F), ||\cdot||)$ *ein Banachraum, also insbesondere ist* E' *ein Banachraum.*

Beweis *entfällt*

Kapitel 5

Darstellungsatz von Riesz

Sei $(V, \langle\cdot|\cdot\rangle)$ *ein Skalarproduktraum. Betrachten*

$$\varphi_x : V \to \mathbb{K},\ \varphi_x(y) = \langle y|x\rangle$$

Dann ist φ_x *ein beschränktes, lineares Funktional:*

$$\begin{aligned} & |\varphi_x(y)| && \leq ||y|| \cdot ||x|| \\ \Rightarrow\quad & ||\varphi_x|| && \leq ||x|| \end{aligned}$$

Die Abbildung $I : V \to V'$, $x \mapsto \varphi_x$ *ist antilinear (* $I(\lambda x + \mu y) = \overline{\lambda} I(x) + \overline{\mu} I(y)$*)*

Satz 5.1 (Darstellungssatz von Riesz)
Sei $(H, \langle\cdot|\cdot\rangle)$ *ein Hilbertraum. Dann ist die Abbildung* $I : H \to H'$, $x \mapsto \varphi_x$ *ein isometrischer Isomorphismus.*

Beweis
I ist isometrisch: $||Ix|| = ||\varphi_x|| \leq ||x||$ *und*

$$|\varphi_x\left(\frac{x}{||x||}\right)| = |\left\langle \frac{x}{||x||}\middle| x \right\rangle| = ||x|| \ \Rightarrow ||\varphi_x|| \geq ||x||$$

I ist injektiv, da I isometrisch ist. I ist surjektiv:
Sei $\varphi \in H'$, *mit* $\varphi \neq 0$. *Wir müssen zeigen, daß ein* $x \in H$ *existiert, mit* $\varphi = \varphi_x$.
Idee: ist $x_0 \in N(\varphi)^\perp \backslash \{0\}$ *dann ist* $\varphi = \lambda \cdot \varphi_{x_0}$.
Sei $x_0 \in N(\varphi)^\perp \backslash \{0\}$ $(N(\varphi) \neq H$, *da* $\varphi \neq 0)$,*oBdA sei* $||x_0|| = 1$. *Setzen* $\lambda = \overline{\varphi(x_0)}$.
Sei $x \in H$ *beliebig:*

$$\begin{aligned} \Rightarrow &\quad && \varphi(x) \cdot x_0 - \varphi(x_0) \cdot x \in N(\varphi) \\ \Rightarrow &\quad 0 && = \langle \varphi(x) \cdot x_0 - \varphi(x_0) \cdot x | x_0 \rangle \\ & && = \varphi(x) \cdot ||x_0||^2 - \varphi(x_0) \cdot \langle x|x_0\rangle \\ \Rightarrow &\quad \varphi(x) && = \varphi(x_0) \cdot \langle x|x_0\rangle = \langle x|\lambda x_0\rangle \\ \Rightarrow &\quad \varphi && = \varphi_{\lambda x_0} \end{aligned}$$

q.e.d.

Ein wichtiges Konzept: schwache Konvergenz

Definition 5.2
Eine Folge heißt schwach konvergent gegen x , falls

$$\forall y \in H\ :\ \langle x_n|y\rangle \to \langle x|y\rangle$$

$(\Leftrightarrow \forall \varphi \in H'\ :\ \varphi(x_n) \to \varphi(x))$. *Schreiben* $x_n \xrightarrow{w} x$.

Klar: $x_n \to x \;\Rightarrow\; x_n \xrightarrow{w} x$.

Satz 5.3 (Arzela-Ascoli)
Sei (x_n) *eine beschränkte Folge in einem Hilbertraum* $(H, \langle\cdot|\cdot\rangle)$. *Dann enthält* (x_n) *eine schwach konvergente Teilfolge.*

Beweis
Da $(\{x_n \,:\, n \in \mathbb{N}\}^{\perp})^{\perp} = \overline{lin\,\{x_n \,:\, n \in \mathbb{N}\}}$ *separabel ist, reicht es einen separablen Hilbertraum* H *zu betrachten. Sei* $\{y_j \,:\, j \in \mathbb{N}\}$ *dicht in* H.

1. *Cantor'sches Diagonalargument: es existiert eine Teilfolge* $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *mit* $\langle x_{n_k}|y_j\rangle$ *konvergiert für alle* $j \in \mathbb{N}$
2. *Aus der Beschränktheit von* $||x_n||$ *und der Dichteeigenschaft der* $\{y_i\}$ *folgt die Konvergenz von* $\langle x_{n_k}|y\rangle$ *für alle* $y \in H'$
3. $\varphi(y) = \lim\limits_{k\to\infty} \langle y|x_{n_k}\rangle \in H'$
4. $\varphi = \varphi_x$ *für ein* $x \in H \Rightarrow x_{n_k} \xrightarrow{w} x$

1. *Da* $\langle x_n|y_1\rangle$ *beschränkt ist bzgl. n, existiert eine Teilfolge* $n_k^{(1)}$ *mit konvergentem* $\langle x_{n_k^{(1)}}|y_1\rangle$ *(Satz von Bolzano-Weierstraß). Da* $\langle x_{n_k^{(1)}}|y_2\rangle$ *wiederum beschränkt ist, existiert wieder eine Teilfolge* $n_k^{(2)}$ *von* $n_k^{(1)}$ *mit konvergentem* $(\langle x_{n_k^{(2)}}|y_2\rangle)_{k\in\mathbb{N}}$. *Induktiv folgt:*

$$\exists \;\text{ Teilfolge } n_k^{(m)} \text{ von } n_k^{(m-1)} \;:\; \langle x_{n_k^{(m)}}|y_j\rangle \text{ konvergent } \forall j \in \mathbb{N}$$

   $\Rightarrow\; n_k := n_k^{(k)}$ *ist eine Teilfolge von* $(n)_{n\in\mathbb{N}}$ *und für* $k \geq m$ *gilt* $n_k \geq n_k^{(m)}$
   $\Rightarrow \langle x_{n_k}|y_j\rangle$ *konvergiert für alle* $j \in \mathbb{N}$

2. *Sei* $C := sup\,||x_n|| < \infty$. *Sei* $y \in H$ *beliebig, dann existiert* $j \in \mathbb{N}$ *mit* $||y - y_j|| \leq \frac{\epsilon}{3C}$. *Da* $\langle x_{n_k}|y_j\rangle$ *konvergent ist, existiert* $n_0 \in \mathbb{N}$ *:*

$$|\,\langle x_{n_k}|y_j\rangle - \langle x_{n_m}|y_j\rangle\,| \leq \frac{\epsilon}{3} \qquad \forall k, m \geq n_0$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \quad |\,\langle x_{n_k}|y\rangle - \langle x_{n_m}|y\rangle\,| \quad &\leq |\,\langle x_{n_k}|y\rangle - \langle x_{n_k}|y_j\rangle\,| + |\,\langle x_{n_k}|y_j\rangle - \langle x_{n_m}|y_j\rangle\,| + |\,\langle x_{n_m}|y_j\rangle - \langle x_{n_m}|y\rangle\,| \\ &\leq ||x_{n_k}|| \cdot ||y - y_j|| + \frac{\epsilon}{3} + ||x_{n_m}|| \cdot ||y - y_j|| \\ &\leq \epsilon \qquad \forall k, m \geq n_0\end{aligned}$$

   $\Rightarrow\; \langle x_{n_k}|y\rangle$ *ist eine Cauchyfolge und konvergent:*

3. $y \mapsto \lim\limits_{k\to\infty} \overline{\langle x_{n_k}|y\rangle} = \varphi(y)$ *ist linear und*

$$|\varphi(y)| = |\lim_{k\to\infty} \langle y|x_{n_k}\rangle\,| \leq ||y|| \cdot C$$

4. *Aus dem Darstellungsatz von Riesz folgt:*

$$\varphi = \varphi_x,\; \langle y|x\rangle = \varphi_x(y) = \lim_{k\to\infty} \langle y|x_{n_k}\rangle$$

q.e.d.

Korollar 5.4
In einem Hilbertraum ist jede beschränkte, abgeschlossene Teilmenge $B \subseteq H$ schwach folgenkompakt.

Korollar 5.5 *Sei $(H, \langle\cdot|\cdot\rangle)$ ein Hilbertraum, $s : H \times H \to \mathbb{K}$ eine Sesquilinearform für die ein c existiert, so daß*

$$|s(x,y)| \leq c \cdot ||x|| \cdot ||y|| \qquad \forall x, y \in H$$

gilt. Dann existiert ein beschränkter, linearer Operator $S : H \to H$ mit

$$s(x,y) = \langle Sx|y\rangle$$

Beweis
$y \mapsto \overline{s(x,y)}$ *ist linear und beschränkt. Aus dem Riesz'schen Darstellungssatz folgt:*

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \quad \exists!\, Sx \in H \ : \quad \overline{s(x,y)} = \langle y|Sx\rangle \\ &\Rightarrow \quad \forall x, y \in H \ : \quad \langle Sx|y\rangle = s(x,y) \end{aligned}$$

Wie man leicht sieht, ist S linear und $||S|| \leq c$

q.e.d.

Kapitel 6

Adjungierte Operatoren, Unitäre Operatoren und Spektrum

Erinnerung: $T : D \to H_2$ *heißt abgeschlossen* ($D \subseteq H_1$)*, wenn der Graph von* T ($\subseteq H_1 \times H_2$) *abgeschlossen ist:*

$$x_n \to x,\, Tx_n \to y \;\Rightarrow\; Tx = y,\, x \in D$$

Die Menge aller abgeschlossenen Operatoren $T : H_1 \to H_2$ *wird mit* $\mathcal{C}(H_1, H_2)$ *bezeichnet.*

Definition 6.1
Sei $T \in \mathcal{C}(H_1, H_2)$ *mit dichtem* $D(T)$*. Betrachte*

$$D(T^*) := \{y \in H_2 \;:\; x \mapsto \langle Tx|y\rangle \in H_1'\}$$

($x \mapsto \langle Tx|y\rangle \in H_1'$ *bedeutet hier, daß* $x \mapsto \langle Tx|y\rangle$ *beschränkt ist. Dann existiert eine eindeutige, beschränkte, lineare Fortsetzung in* H_1'*)*

$$T^*y \text{ ist definiert durch} \langle Tx|y\rangle = \langle x|T^*y\rangle$$

Man nennt den Operator T^* *den adjungierten Operator von* T*.*
(Man kann einen beliebigen linearen, auf einem dichten Teilraum definierten Operator $T : D(T) \to H_1$ *mit* $D(T) \subseteq H_1$ *nehmen)*
($D(T)$ *muß dicht sein, denn: Sei* x_1 *ein weiteres Element aus* H_1 *mit:*

$$\begin{array}{rcll} & & \langle x|T^*y\rangle = \langle Tx|y\rangle = \langle x|x_1\rangle & \\ & \Rightarrow & \langle x_1 - T^*y|x\rangle = 0 & \forall x \in D(T) \\ \overline{D(T)} = H_1 & \Rightarrow & x_1 = T^*y & \end{array}$$

)

Bemerkung 5
Für $T \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$ *ist* $T^* \in \mathcal{L}(H_2, H_1)$ *und* $||T|| = ||T^*||$*.*

Beweis

$$|\,\langle Tx|y\rangle\,| \leq ||T|| \cdot ||x|| \cdot ||y||$$

$\Rightarrow \quad x \mapsto \langle Tx|y\rangle \in H_1' \;\forall y$
$\Rightarrow \quad D(T^*) = H_2$
$\Rightarrow \quad \forall x \in H_1,\, \forall y \in H_2 \;:\; \langle Tx|y\rangle_{H_2} = \langle x|T^*y\rangle_{H_1}$
$\Rightarrow \quad \sup_{||y||\le 1} ||T^*y|| = \sup_{||x||,||y||\le 1} |\langle x|T^*y\rangle| = \sup_{||x||,||y||\le 1} |\langle Tx|y\rangle| \le ||T||$
$\Rightarrow \quad ||T^*|| \le ||T||$
Da $T^{**} = T$ folgt also $||T|| \le ||T^*||$ *q.e.d.*

Erinnern wir uns daran, daß $U : H_1 \to H_2$ unitär genannt wird, falls U bijektiv und linear ist, und weiterhin

$$\langle Ux|Uy\rangle_{H_2} = \langle x|y\rangle_{H_1} \qquad \forall x, y \in H_1$$

gilt. Dies ist äquivalent zu $U^* = U^{-1}$:

$$\langle x|U^*Uy\rangle = \langle Ux|Uy\rangle = \langle x|y\rangle \qquad \forall x, y \in H_1$$

$\Rightarrow U^*Uy = y \qquad \forall y \in H_1$
$\Rightarrow$ *U^* ist surjektiv und das Linksinverse von U. Andererseits:*

$$\langle x|y\rangle = \langle Ux|Uy\rangle = \langle U^*Ux|y\rangle \qquad \forall x, y \in H_1$$

$\Rightarrow$ *U ist injektiv $\Rightarrow U^* = U^{-1}$*

Definition 6.2
Sei $(H, \langle\cdot|\cdot\rangle)$ ein Hilbertraum, betrachten $T \in \mathcal{C}(H) = \mathcal{C}(H, H)$.
Die Resolventemenge von T ist

$$\rho(T) := \{\lambda \in \mathbb{K} \;:\; T - \lambda \text{ ist bijektiv und } T - \lambda \text{ ist beschränkt}\}$$

das Spektrum von T ist

$$\sigma(T) := \mathbb{K}\backslash\rho(T)$$

Die Abbildung $R(\cdot, T) : \rho(T) \to \mathcal{L}(H), z \mapsto (T - z)^{-1}$ heißt Resolvente von T.
(In endlichen Dimensionen ist $\sigma(T)$ die Menge der Eigenwerte, und $\rho(T)$ die Menge der Skalare bei denen die Determinante von $(T - z)$ nicht verschwindet)
Idee: Für $\lambda \in \rho(T)$ können wir $(T - z)x = y$ eindeutig für jedes $y \in H$ lösen, und die Lösung hängt stetig von y ab.

Bemerkung 6
Ist T nicht abgeschlossen, dann ist $\rho(T) = \emptyset$.
($(T - z)^{-1}$ ist stetig und überall definiert, dann ist $(T - z)^{-1}$ abgeschlossen und damit ist $(T - z)$ abgeschlossen und demzufolge auch T.)

Die grundlegenden Eigenschaften der Resolventenmenge und der Resolvente faßt der folgende Satz zusammen:

Satz 6.3
Sei T ein Operator auf H. Dann gilt:

1. *$\rho(T)$ ist eine offene Menge*
2. *Die Abbildung $R(\cdot, T) : \rho(T) \to \mathcal{L}(H)$ ist holomorph, d.h. sie kann um jeden Punkt $z \in \rho(T)$ in eine Potenzreihe entwickelt werden)*

Bemerkung: $\rho(T)$ offen $\Rightarrow \sigma(T)$ ist abgeschlossen.

Wir nehmen einen wichtigen Einzelschritt, der die Vollständigkeit benutzt, aus dem Beweis dieses Satzes vorweg:

Satz 6.4 (von Neumann'sche Reihe)
Sei $A \in \mathcal{L}(H)$ mit $||A|| < 1$, dann gilt

$$(1 - A)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} A^n \in \mathcal{L}(H)$$

Beweis
Die Aussagen enthalten die Konvergenz der Reihe und die Invertierbarkeit von $(1 - A)$.
Konvergenz der Reihe:
Aus $0 \leq ||A|| < 1$ und $||A^n|| \leq ||A||^n$ folgt die absolute Konvergenz der Reihe in $\mathcal{L}(H)$. Da $\mathcal{L}(H)$ vollständig ist (weil H vollständig), konvergiert die Reihe.
$(1-A)$ ist invertierbar mit Inverser $\sum_{n=0}^{\infty} A^n$. Wir betrachten dafür die Partialsummen $T_N := \sum_{n=0}^{N} A^n$. Wir erhalten:

$$(1 - A)T_N = (1 - A)\sum_{n=0}^{N} A^n = 1 - A^{N+1} = T_N(1 - A)$$

Aus $A^{N+1} \stackrel{N\to\infty}{\longrightarrow} 0$ folgt

$$(1 - A)\sum_{n=0}^{\infty} A^n = \lim_{N\to\infty}(1 - A)T_N = \lim_{N\to\infty}(1 - A)^{N+1} = 1$$

und

$$(\sum_{n=0}^{\infty} A^n)(1 - A) = I$$

q.e.d.

Bemerkung 7
Geometrische Reihe: $\frac{1}{1-q} = \sum_{n=0}^{\infty} q^n$ für $q \in \mathbb{C}$ und $|q| < 1$.

Nun zum eigentlichen Beweis des vorigen Satzes:
Sei $z_0 \in \rho(T)$. Setzen $r := ||(T - z_0)^{-1}||^{-1}$. Wir zeigen, daß $U_r(z_0) \subset \rho(T)$ und entwickeln $R(\cdot, T)$ in eine Potenzreihe in $U_r(z_0)$:

$$\begin{aligned} T - z &= T - z_0 + (z_0 - z) \\ &= (1 - (z - z_0)(T - z_0)^{-1})(T - z_0) \end{aligned}$$

Wir wissen, daß

$$||(z - z_0)(T - z_0)^{-1}|| < 1 \qquad \forall z \in U_r(z_0)$$

Ist $z \in U_r(z_0)$ dann ist $A := (z - z_0)(T - z_0)^{-1}$ mit $||A|| < 1$ invertierbar, siehe von Neumann'sche Reihe. Da $z_0 \in \rho(T)$ ist $(T - z_0)$ eine Bijektion,

$$\Rightarrow \; T - z \text{ ist eine Bijektion}$$

Betrachte $(1-A)^{-1}$*, Dann ist* $s = s(z) = (T-z_0)^{-1}(1-A)^{-1}$ *das Inverse von* $(T-z)$*:* $s : H \to D(T)$

$$\begin{aligned} s(z)\cdot(T-z) &= 1 \textit{ auf } D(T) \\ (T-z)\cdot s(z) &= 1 \textit{ auf } H \end{aligned}$$

$$\Rightarrow s(z) = (T-z)^{-1}$$

Die Potenzreihe von $s(z)$*:*

$$\begin{aligned} (1-A)^{-1} &= \sum_{n=0}^{\infty} A^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}((z-z_0)(T-z_0)^{-1})^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}(T-z_0)^{-n}(z-z_0)^n \end{aligned}$$

ist eine Potenzreihe in $\mathcal{L}(H)$ *mit Konvergenzradius von mindestens* r

$$\begin{aligned} \Rightarrow s(z) &= (T-z_0)^{-1}(1-A)^{-1} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}(T-z_0)^{-(n+1)}(z-z_0)^n \end{aligned}$$

ist eine Potenzreihe mit Konvergenzradius von mindestens r*.*

q.e.d.

Bemerkung 8
Der Beweis zeigt, daß $U_r(z_0) \subset \rho(T)$ *für* $z_0 \in \rho(T)$ *und* $r = ||(T-z_0)^{-1}||^{-1}$*. Daraus ist ersichtlich, ist* $(T-z_0)$ *fast singulär, dann ist* $||(T-z_0)^{-1}||$ *sehr groß und folglich* r *sehr klein.*

Der Beweis zeigt ebenfalls:

Korollar 6.5
Ist $z_0 \in \rho(T)$ *und* $B \in \mathcal{L}(H)$ *mit* $||B|| < ||(T-z_0)^{-1}||^{-1}$*, dann ist* $z_0 \in \rho(T+B)$*.*

Beweis

$$T + B - z_0 = T - z_0 + B = (1 + B(T-z_0)^{-1})(T-z_0)$$

q.e.d.

Jetzt wie oben (Bemerkung: wir benutzen dies für $B = (z-z_0)\cdot 1$*):*

Satz 6.6
Seien S, T *lineare Operatoren in einem Skalarproduktraum* H*.*

1. *Für* $z, z' \in \rho(T)$ *gilt: (erste Resolventenformel)*

$$\begin{aligned} R(z,T) - R(z',T) &= (z-z')R(z,T)R(z',T) \\ &= (z-z')R(z',T)R(z,T) \end{aligned}$$

2. *Ist $D(S) = D(T)$ und $z \in \rho(S) \cap \rho(T)$, dann gilt: (zweite Resolventenformel)*

$$\begin{aligned} R(z,T) - R(z,S) &= R(z,T)(S-T)R(z,S) \\ &= R(z,S)(S-T)R(z,T) \end{aligned}$$

(Bemerkung: $\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{x}(x-y)\frac{1}{y} = \frac{y-x}{xy}$)

Beweis
zu (2): Wir werden uns mit den Defintionsbereichen beschäftigen:

$$\begin{aligned} (R(z,T) - R(z,S))y &= (T-z)^{-1}y - (S-z)^{-1}y \\ &= (T-z)^{-1}(S-z)(S-z)^{-1}y - (T-z)^{-1}(T-z)(S-z)^{-1}y \end{aligned}$$

weil $(S-z)(S-z)^{-1} = 1$ auf H und $(T-z)^{-1}(T-z) = 1$ auf $D(T) = D(S)$.

$$\begin{aligned} \Rightarrow\ (R(z,T) - R(z,S))y &= (T-z)^{-1}((S-z) - (T-z))(S-z)^{-1}y \\ &= (T-z)^{-1}(S-T)(S-z)^{-1}y \qquad \forall y \in H \end{aligned}$$

zu (1): ähnlich mit $S = T + z - z'$

q.e.d.

Es ist klar, daß die obigen Resultate in allgemeinen Banachräumen gelten.
Wir kommen jetzt zu einigen Beispielen.

Beispiel 6.7
Für $H = \mathbb{K}^n$ ist jedes $T \in \mathcal{L}(H)$ mit einer quadratischen Matrix assoziiert.

$$\begin{aligned} \rho(T) &= \{z \in \mathbb{K} : (T-z) \in \mathcal{GL}(n,\mathbb{K})\} \\ &= \{z \in \mathbb{K} : det(T-z) \neq 0\} \\ &= \mathbb{K} \backslash \{Eigenwerte\ von\ T\} \\ \sigma(T) &= \{Eigenwerte\} \end{aligned}$$

Es zeigt sich, daß $\rho(T) = \mathbb{R}$ passieren kann, betrachte $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$

Quiz: Kann $\rho(T) = \mathbb{C}$ passieren für $T \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^2)$
für $T \in \mathcal{L}(H)$
für $T \in L(H)$

Beispiel 6.8 (Maximaler Operator der Multiplikation)
Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ ein Maßraum, betrachten $v : \Omega \to \mathbb{K}$ meßbar. In $L^2(\Omega)$ sei

$$\begin{aligned} D(M_v) &= \{f \in L^2(\Omega) : v \cdot f \in L^2(\Omega)\} \\ M_v f &:= v \cdot f \end{aligned}$$

Dann gilt:

1. *M_v ist abgeschlossen und auf einer dichten Teilmenge definiert*
2. *$M_v^* = M_{\bar{v}}$*
3. *$\sigma(M_v) = essrange(v) = \{z \in \mathbb{K} : \forall \epsilon > 0 : \mu(\{\omega : |v(\omega) - z| \leq \epsilon\}) > 0\}$*

Beweis

1. *Sei $f_n \in L^2(\Omega)$, $f_n \to f$ mit $M_v f_n \to g$. Wir müssen zeigen, daß $f \in D(M_v)$ und $M_v f = g$.*

$$f_n \to f \text{ in } L^2(\Omega)$$

$\Rightarrow$ *es existiert eine Teilfolge (f_{n_k}) mit $f_{n_k} \to f$ μfs*
$\Rightarrow vf_{n_k} \to vf$ μfs
Das Lemma von Fatou sagt uns nun: $\sup_k ||vf_{n_k}|| < \infty$ ($vf_{n_k} \to g$ *in* L^2) *und* $vf = \lim_{k\to\infty} vf_{n_k} \in L^2$ *und* $vf = g \Rightarrow f \in D(M_v)$, $vf = g$
$D(M_v)$ *liegt dicht in* $L^2(\Omega)$. *Sei* $\Omega_n := \{\omega \in \Omega \,:\, |v(\omega)| \le n\} \in \mathcal{F}$
$\Rightarrow \bigcup_n \Omega_n = \Omega$, $\Omega_n \nearrow \Omega$
$\Rightarrow \chi_{\Omega_n} f \to f$ *in* L^2 *für alle* $f \in L^2$
$(||\chi_{\Omega_n} f - f||^2 = \int |f|^2(1-\chi_{\Omega_n})\,d\mu \to 0$ *für* $n \to \infty$ *majoriesende Konvergenz)*

$$\chi_{\Omega_n} f \in D(M_v) \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

da $|v(\chi_{\Omega_n} f)| \le n \cdot |f| \in L^2$, *und damit liegt* $D(M_v)$ *dicht.*

2. $D(M_v^*) = \{g : \exists\, c$ *mit* $|\langle vf|g\rangle| \le c||f||, \forall f \in D(M_v)\}$

$$\begin{aligned} |\langle vf|g\rangle| &= \left|\int_\Omega vf(\omega)\bar{g}(\omega)\,d\mu(\omega)\right| \\ &= \left|\int_\Omega f(\omega)\underbrace{\bar{\bar{v}}(\omega)\bar{g}(\omega)}_{\text{meßbar}}\,d\mu(\omega)\right| \end{aligned}$$

$\overset{\text{Hölder}}{\Longrightarrow}$ $\bar{\bar{v}}\bar{g} \in L^2 \iff \bar{v}g \in L^2$ *und* $\langle vf|g\rangle = \langle f|\bar{v}g\rangle$. *Das bedeutet* $M_v^* \subset M_{\bar{v}}$, $M_{\bar{v}} \subset M_v^*$ *ist klar. Sei* $g \in D(M_{\bar{v}})$, $f \in D(M_v)$

$$\begin{aligned} |\langle vf|g\rangle| &= \left|\int_\Omega v(\omega)f(\omega)\bar{g}(\omega)\,d\mu(\omega)\right| \\ &= \left|\int_\Omega f(\omega)(\overline{\bar{v}g})(\omega)\,d\mu(\omega)\right| \\ &\le ||f|| \cdot ||\bar{v}g|| \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ $g \in D(M_v^*)$ *und* $M_v^* g = \bar{v}g$

3. *Übung*

Das Beispiel zeigt, jede abgeschlossene Menge $\Sigma \subseteq \mathbb{K}$ kann als Spektrum eines geeigneten Operators fungieren (finden eines geeigneten v).

Beispiel 6.9 (leeres Spektrum)

$$\begin{aligned} H &= L^2_{\mathbb{C}}[0,1] \\ D(T) &= \{f \in L^2 \,:\, f' \in L^2,\ f(0) = 0\} \\ Tf &= f' \end{aligned}$$

Bedingungen für $\rho(T) \in L^2$: $(T-z)$ ist bijektiv

$$\begin{aligned} f \in N(T-z) \quad & \Rightarrow \quad (T-z)f = 0 \\ & \Rightarrow \quad f' - zf = 0 \\ & {}'' \Rightarrow '' \quad f(t) = c \cdot e^{zt} \\ & \Rightarrow \quad f \equiv 0 \end{aligned}$$

Sei $g \in L^2$ gegeben, gesucht ist $f \in D(T)$ mit $f' - zf = g$ (lösbar mittels Variation der Konstanten):

$$(T-z)^{-1} g(x) = e^{xz} \int_0^x e^{-zt} g(t)\, dt$$

$\Rightarrow \; (T-z)^{-1} \in \mathcal{L}(H)$

Kapitel 7

Das Spektrum von beschränkten und selbstadjungierten Operatoren

Wir beginnen mit dem Fall eines beschränkten Operators. Als erstes ein nützliches Resultat:

Lemma 7.1
Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset [0,\infty)$ submultiplikativ, d.h. $a_{n+m} \leq a_n \cdot a_m$ mit $n,m \in \mathbb{N}$. Dann gilt:

$$\lim_{n\to\infty} a_n^{\frac{1}{n}} = \limsup_{n\to\infty} a_n^{\frac{1}{n}} = \inf_n a_n^{\frac{1}{n}}$$

Beweis
Sei $m \in \mathbb{N}$ fest und $c := max\{1, a_1, .., a_{m-1}\}$, $a_0 := 1$. Jedes $n \in \mathbb{N}$ kann eindeutig geschrieben werden als

$$n = m \cdot p_n + q_n, \qquad p_n, q_n \in \mathbb{N}_0, q_n < m$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \quad & a_n \leq a_{m\cdot p_n} \cdot a_{q_n} \leq (a_m)^{p_n} \cdot c \\
\Rightarrow \quad & a_n^{\frac{1}{n}} \leq c^{\frac{1}{n}} \cdot a_m^{\frac{p_n}{m\cdot p_n + q_n}} \\
\Rightarrow \quad & \limsup_{n\to\infty} a_n^{\frac{1}{n}} \leq a_m^{\frac{1}{m}}
\end{aligned}$$

Da m beliebig war:

$$\limsup_{n\to\infty} a_n^{\frac{1}{n}} \leq \inf_m a_m^{\frac{1}{m}}$$

q.e.d.

Definition 7.2
Für $T \in \mathcal{L}(H)$, für die der Grenzwert

$$r(T) := \lim_{n\to\infty} ||T^n||^{\frac{1}{n}} = \inf_n ||T^n||^{\frac{1}{n}}$$

existiert, heißt $r(T)$ der Spektralradius von T.

Satz 7.3
Sei $T \in \mathcal{L}(H)$. Dann gilt:

1. $r(T) \leq ||T^m||^{\frac{1}{m}} \leq ||T|| \qquad \forall m \in \mathbb{N}$
2. $\sigma(T) \subset B_{r(T)}(0)$
3. *Für* $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ *ist* $r(T) = max\{|z| \, : \, z \in \sigma(T)\}$

Beweis

1. *klar*
2. *folgt im wesentlichen aus der von Neumann'schen Reihe: Der Konvergenzradius von*
$$\sum_{n=0}^{\infty} w^{n+1} T^n \in \mathcal{L}(H), \; w \in \mathbb{C}$$
ist $(\lim\limits_{n\to\infty} ||T^n||^{\frac{1}{n}})^{-1} = \dfrac{1}{r(T)}$.
Das bedeutet, daß für $|z| > r(T)$, *die Reihen*
$$\sum_{n=0}^{\infty} z^{-n-1} T^n \in \mathcal{L}(H), \; A(z) := \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n-1}\, T^n$$
absolut konvergieren. Wir werden zeigen, daß
$$\begin{aligned} A(z)(T-z) &= (T-z)A(z) = -1 \\ A(z)(T-z) &= (\sum_{n=0}^{\infty} z^{-n-1} T^n)(T-z) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n-1}(T^{n+1} - zT^n) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n-1} T^{n+1} - \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} T^n \\ &= -1 = \cdots = (T-z)A(z) \end{aligned}$$
$\Rightarrow \; -A(z) = (T-z)^{-1} \; \Rightarrow \; z \in \rho(T)$
Nun einige Fakten zu holomorphen Funktionen:
   - *Satz von Liouville: Eine holomorphe, beschränkte Funktion f ist konstant.*
   - *Grundtatsache:*
$$\oint\limits_{|z|=r_0} z^k \, dz = 2\pi i \cdot \delta_{k,-1}$$
   - *Cauchy'scher Integralsatz: Ist U offen und konvex,* $f : U \to \mathbb{C}$ *holomorph, dann gilt*
$$\oint\limits_{\gamma} f(z)\, dz = 0$$
   - *Korollar: Sei f holomorph auf* $\mathbb{C} \backslash B_{\rho_0}(0)$, *dann gilt für* $r, r' > \rho_0$:
$$\oint\limits_{|z|=r} f(z)\, dz = \oint\limits_{|z|=r'} f(z)\, dz$$

3. *Sei* $r_0 = max\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(T)\}$. *aus (1) und (2) wissen wir, daß* $r_0 \leq r(T)$. *Es reicht also zu zeigen, daß* $r_0 \geq r(T)$. *Sei* $r > r_0$, *wir müssen zeigen, daß* $r > r(T)$.

$$T^n = -\frac{1}{2\pi i} \cdot \oint_{|z|=r} z^n (T-z)^{-1}\, dz$$

da $z \mapsto (T-z)^{-1}$ *holomorph auf* $B_{r_0}(0)^c$ *ist, folgt aus dem Cauchy'schen Integralsatz*

$$\Rightarrow \oint_{|z|=r} z^n (T-z)^{-1}\, dz = \oint_{|z|=||T||+1} z^n (T-z)^{-1}\, dz$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=r} z^n (T-z)^{-1}\, dz = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=||T||+1} z^n (z-T)^{-1}\, dz \qquad (*)$$

um $|z| = ||T||+1$ *können wir* $(z-T)^{-1}$ *in eine absolut konvergente Potenzreihe entwickeln:*

$$(z-T)^{-1} = z^{-1}(1-\frac{T}{z})^{-1} = z^{-1} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} (\frac{T}{z})^k$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow (*) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=||T||+1} z^n \cdot z^{-1} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} z^{-k} T^k\, dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{\left(\oint_{|z|=||T||+1} z^{n-1-k}\, dz \right)}_{=\delta_{n,k} \cdot 2\pi i} T^k \\ &= T^n \end{aligned}$$

Wir nutzen diesen Fakt für $r(T)$.

$$\begin{aligned} ||T^n|| &= ||\frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=r} z^n (T-z)^{-1}\, dz|| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \cdot 2\pi r \cdot \max_{|z|=r} ||z^n (T-z)^{-1}|| \\ &= r \cdot r^n \cdot \underbrace{\max_{|z|=r} ||(T-z)^{-1}||}_{=:c} \end{aligned}$$

$\Rightarrow\ ||T^n||^{\frac{1}{n}} \leq (c \cdot r)^{\frac{1}{n}} \cdot r \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} r$
$\Rightarrow\ r(T) \leq r$
Insbesondere ist $\sigma(T) \neq \emptyset$ *für* $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

q.e.d.

Das letztere Ergebnis kann man auch direkt zeigen:
Angenommen $\sigma(T) = \emptyset$, *also* $\rho(T) = \mathbb{C}$. *Dann ist* $z \mapsto (T-z)^{-1}$ *eine holomorphe Funktion auf* $\mathbb{C}$.
$\Rightarrow\ z \mapsto \langle (T-z)^{-1}x|y \rangle$ *ist holomorph* $\forall x, y \in H$

Weiterhin ist $f_{x,y} := (z \mapsto \langle (T-z)^{-1}x|y\rangle)$ *beschränkt, weil* $|f_{x,y}(z)| \overset{|z|\to\infty}{\longrightarrow} 0$.
Für $|z| \geq ||T||$ *gilt:*

$$\begin{aligned} ||(T-z)x|| &= ||zx - Tx|| \\ &\geq |z| \cdot ||x|| - ||T|| \cdot ||x|| \\ &= (|z| - ||T||)||x|| \end{aligned}$$

$\Rightarrow \ ||(T-z)^{-1}|| \leq (|z| - ||T||)^{-1} \overset{|z|\to\infty}{\longrightarrow} 0$
Aus dem Satz von Liouville folgt $f_{x,y} \equiv c \equiv 0$
$\Rightarrow \ (T-z)^{-1} = 0$ *im Widerspruch dazu, daß es injektiv sein muß.*

Definition 7.4
Ein linearer Operator in H *heißt symmetrisch, falls* T *auf einer dichten Teilmenge definiert ist und* $T \subset T^*$, *wobei*

$$A \subset B \Leftrightarrow G(A) \subset G(B) \Leftrightarrow D(A) \subset D(B) \text{ und } B|_{D(A)} = A$$

T *heißt selbstadjungiert, falls* $T = T^*$.

$$\langle Tx|y\rangle = \langle x|T^*y\rangle \,,\ x \in D(T),\ y \in D(T^*)$$

Wir nennen $\lambda \in \mathbb{K}$ *einen Eigenwert von* T, *falls ein* $x \in D(T)\backslash\{0\}$ *existiert, mit* $Tx = \lambda x$. *Das zugehörige* x *heißt Eigenvektor von* T *zum Eigenwert* λ.

Proposition 7.5
Jeder Eigenwert eines symmetrischen Operators T *ist reell. Sind* x *und* y *Eigenvektoren von* T, *mit verschieden Eigenwerten* λ *und* μ, *dann gilt* $x \perp y$.

Beweis
Sei λ *ein Eigenwert zum Eigenvektor* x, *mit* $||x|| = 1$.

$$\lambda = \lambda ||x||^2 = \langle Tx|x\rangle = \langle x|Tx\rangle = \overline{\langle Tx|x\rangle} = \bar{\lambda}$$

$$\begin{aligned} (\lambda - \mu)\langle x|y\rangle &= \langle \lambda x|y\rangle - \langle x|\mu y\rangle \\ &= \langle Tx|y\rangle - \langle x|Ty\rangle \\ &\overset{T\subseteq T^*}{=} \langle x|Ty\rangle - \langle x|Ty\rangle = 0 \end{aligned}$$

q.e.d.

Proposition 7.6
Ist T *auf einer dichten Teilmenge definiert, dann ist* T^* *abgeschlossen.*

Beweis
Sei $T : D(T) \to H_2$ *linear,* $D(T) \subset H_1$, $T^* : D(T^*) \to H_1$

$$\begin{aligned} D(T^*) &= \{y \in H_2 \,:\, \exists z \ \langle Tx|y\rangle = \langle x|z\rangle \,,\ x \in D(T)\} \\ T^*y &= z \end{aligned}$$

Sei $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset D(T^*)$, $y_n \to y$ *und* $T^*y_n \to z$. *Müssen zeigen, daß* $y \in D(T^*)$ *und* $T^*y = z$:

$$\langle Tx|y\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle Tx|y_n\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle x|T^*y_n\rangle = \langle x|z\rangle \,,\ \forall x \in D(T^*)$$

q.e.d.

(Ist T selbstadjungiert, dann ist T insbesondere abgeschlossen)

Proposition 7.7
Für jeden auf einer dichten Teilmenge definierten Operator T in H, $z \in \mathbb{K}$ gilt:

$$R(T-z)^{\perp} = N(T^* - \bar{z})$$

Beweis
$(T-z)^* = T^* - \bar{z}$
"$\subseteq$": Sei $y \perp R(T-z)$

$$\begin{aligned} \Rightarrow &\quad \forall x \in D(T) \,:\, 0 = \langle (T-z)x | y\rangle = \langle x|0\rangle \\ \Rightarrow &\quad y \in D((T-z)^*),\ (T-z)^* y = 0 \\ \Rightarrow &\quad y \in N((T-z)^*) = N(T^* - \bar{z}) \end{aligned}$$

"$\supseteq$": Sei $y \in N(T^* - \bar{z})$

$$\begin{aligned} \Rightarrow &\quad \forall x \in D(T):\ \langle (T-z)x|y\rangle = 0 \\ \Rightarrow &\quad y \in R(T-z)^{\perp} \end{aligned}$$

q.e.d.

Satz 7.8
Sei $(H, \langle\cdot|\cdot\rangle)$ ein komplexer Hilbertraum, T ein symmetrischer Operator in H. Dann ist folgendes äquivalent:

1. *T ist selbstadjungiert*
2. *$R(T-z) = H$, $\forall z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$*
3. *$\exists z_{\pm}$ mit $Im(z_{\pm}) \gtrless 0$ mit $R(T - z_+) = H = R(T - z_-)$*
4. *$\sigma(T) \subset \mathbb{R}$*

Beweis
Sei $z = \lambda + i\mu$, $x \in D(T)$, $||x|| = 1$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} ||(T-z)x|| &\geq |\langle (T-z)x|x\rangle| \\ &= |\underbrace{\langle (T-\lambda)x|x\rangle}_{\in\mathbb{R}} - i\mu \langle x|x\rangle| \\ &\geq |\mu| \end{aligned}$$

$\Rightarrow \forall x \in D(T):\ ||(T-z)x|| \geq |\mu| \cdot ||x|| \qquad (*)$
$(1) \Rightarrow (2)$: *Als erstes zeigen wir, daß $R(T-z)$ abgeschlossen ist.*
Sei $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset R(T-z)$, $y_n \to y$. Wir müssen ein $x \in D(T)$ finden, welches $(T-z)x = y$ erfüllt. Nehmen $x_n \in D(T)$ mit $y_n = (T-z)x_n$

$$||y_n - y_m|| = ||(T-z)(x_n - x_m)|| \geq |Im(z)| \cdot ||x_n - x_m||$$

$\Rightarrow$ *(x_n) konvergiert und $x := \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ erfüllt obiges:*

$$x_n \to x,\ (T-z)x_n \to y$$

Da T selbstadjungiert, ist $T = T^*$ abgeschlossen und $T - z$ ist abgeschlossen.
$\Rightarrow$ *$x \in D(T)$, $(T-z)x = y$, $R(T-z)$ ist abgeschlossen*
$\overset{(*)}{\Rightarrow} R(T-z)^{\perp} = N(T^* - \bar{z}) = N(T - \bar{z}) = \{0\}$
$\Rightarrow$ *$R(T-z)$ ist dicht*

$(2) \Rightarrow (1)$: *T ist symmetrisch, denn wegen* $(*)$ *ist* $(T-z)$ *injektiv. Müssen zeigen, daß* $D(T^*) \subset D(T)$ *ist. Wählen* $z \in \mathbb{C} \backslash \mathbb{R}$, $T-z$ *und* $T-\bar{z}$ *bijektiv. Sei* $x \in D(T^*)$

$$x_0 := (T-z)^{-1}(T^*-z)x \in D(T)$$

$\Rightarrow$ $(T-z)x_0 = (T^*-z)x$
Da T *symmetrisch und* $T \subset T^*$ *ist, gilt* $T^*x_0 = Tx_0$

$$\begin{array}{rc} \Rightarrow & (T^*-z)x_0 = (T-z)x_0 = (T^*-z)x \\ \Rightarrow & x - x_0 \in N(T^*-z) = (R(T-\bar{z}))^\perp = \{0\} \\ \Rightarrow & x = x_0 \in D(T) \text{ und } T^*x = T^*x_0 = Tx_0 = Tx \\ \Rightarrow & T^* \subset T \end{array}$$

$(2) \Rightarrow (3)$: *ist klar*
$(3) \Rightarrow (4)$: *Aus* $(*)$ *folgt:* $(T-z_\pm)$ *ist injektiv.*
$\Rightarrow$ $(T-z_\pm)$ *ist invertierbar,* $||(T-z_\pm)^{-1}|| \leq \frac{1}{|(Im(z_\pm))|}$
$\Rightarrow$ $||(T-z_\pm)^{-1}||^{-1} \geq |(Im(z_\pm))|$
Wir starten mit z_+, *die von Neumann'sche Reihe:*

$$\begin{array}{rc} \Rightarrow & \rho(T) \supset U_{|Im(z_+)|}(z_+) \\ \Rightarrow & U_{|Im(z_1)|}(z_1) \subset \rho(T),\ \forall z_1 \in U_{|Im(z_+)|}(z_+) \\ \Rightarrow & z \in \rho(T)\ \forall z \text{ mit } Im(z) > 0 \end{array}$$

Das gleiche gilt für die untere Halbebene.
$(4) \Rightarrow (2)$: *ist klar*

q.e.d.

Proposition 7.9

1. $T \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$: $||T|| = ||T^*||$
2. $T \in \mathcal{L}(H)$: $||T||^2 = ||T^*T||$

Beweis

1.

$$\begin{aligned} ||T|| &= \sup_{||x|| \leq 1} ||Tx|| \\ &= \sup_{||x||,||y|| \leq 1} |\langle Tx|y\rangle| \\ &= \sup_{||x||,||y|| \leq 1} |\langle x|T^*y\rangle| \\ &= \sup_{||y|| \leq 1} ||T^*y|| = ||T^*|| \end{aligned}$$

2. $||T^*T|| \leq ||T^*|| \cdot ||T|| = ||T||^2$

$$\begin{aligned} \sup_{||x|| \leq 1} ||Tx||^2 &= \sup_{||x|| \leq 1} \langle Tx|Tx\rangle \\ &= \sup_{||x|| \leq 1} \langle T^*Tx|x\rangle \\ &\leq ||T^*T|| \end{aligned}$$

q.e.d.

Proposition 7.10
Sei $T \in \mathcal{L}(H)$ *selbstadjungiert. Dann gilt*

$$||T|| = r(T) = \sup_{\lambda \in \sigma(T)} |\lambda|$$

Beweis
Wir wissen: $||T|| \geq r(T) = \sup_{\lambda \in \sigma(T)} |\lambda|$ *und* $r(T) = \lim_{n \to \infty} ||T^n||^{\frac{1}{n}}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad & ||T^2||^{\frac{1}{2}} = ||T^*T||^{\frac{1}{2}} = ||T|| \\ \Rightarrow \quad & ||T^4||^{\frac{1}{4}} = ||(T^2)^*T^2||^{\frac{1}{4}} = ||T^2||^{\frac{1}{2}} = ||T|| \end{aligned}$$

Induktiv folgt $\lim_{n \to \infty} ||T^{2^k}||^{2^{-k}} = ||T||$

q.e.d.

Kapitel 8

Der Spektralsatz I

Der Spektralsatz ist ein unendlichdimensionales Analogon zur Tatsache, daß jede symmetrische, bzw. hermitesche Matrix diagonalisierbar ist.
Motivation: Ist A *eine Matrix, dann kann man* $\dot{x} = Ax$ *lösen mit* $x(t) = x_0 \cdot e^{tA}$*.*
Ist $A = \begin{pmatrix} a_{11} & & \\ & \ddots & \\ & & a_{nn} \end{pmatrix}$*, dann ist* $e^{tA} = \begin{pmatrix} e^{ta_{11}} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{ta_{nn}} \end{pmatrix}$*.*
Ist φ *analytisch auf* $B_{||A||+\epsilon}(0)$*, dann ist* $\varphi(A) = \begin{pmatrix} \varphi(a_{11}) & & \\ & \ddots & \\ & & \varphi(a_{nn}) \end{pmatrix}$*.*
In diesem Abschnitt betrachten wir selbstadjungierte $T \in \mathcal{L}(H)$ *auf einen Hilbertraum* $(H, \langle\cdot|\cdot\rangle)$*.*
*Wir zeigen, daß ein isometrischer *-Algebra Homomorphismus*

$$F : C(\underbrace{\sigma(T)}_{kompakt}) \to \mathcal{L}(H),\ F(x) = T$$

$(\sigma(F(\varphi)) = \varphi(\sigma(T)))$ *Spektralabbildung*
Algebrahomomorphismus : F ist linear und multiplikativ

$$F(x^2) = F(x \cdot x) = F(x) \cdot F(x) = T^2$$

Auf $C(\sigma(T))$ *(komplex) haben wir* $\varphi \mapsto \bar{\varphi}$*.*
*Ein *-Algebrahomomorphismus bedeutet* $F(\bar{\varphi}) = F(\varphi)^*$*. Wir werden* $F(\varphi) =: \varphi(T)$ *schreiben.*
Ist P ein Polynom, dann wissen wir wie man

$$P(T) = F(P)\ :\ P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

definiert.
$\Rightarrow\ P(T) = \sum_{k=0}^{n} a_k T^k$

Lemma 8.1
Sei $P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ *und* $P(T) = \sum_{k=0}^{n} a_k T^k$*. Dann gilt*

$$\sigma(P(T)) = P(\sigma(T)) = \{P(\lambda) :\ \lambda \in \sigma(T)\}$$

Beweis
"$\supseteq$": Sei $\lambda \in \sigma(T)$. Es ist λ eine Nullstelle von $P(x) - P(\lambda)$, deshalb können wir schreiben:

$$P(x) - P(\lambda) = (x - \lambda)Q(x)$$

wobei Q ein Polynom in x ist.

$$\Rightarrow \; P(T) - P(\lambda) = (T - \lambda) \cdot Q(T) = Q(T) \cdot (T - \lambda)$$

Jetzt: $T - \lambda$ hat kein beschränktes Inverses (da ja $\lambda \in \sigma(T)$), dann kann auch $P(T) - P(\lambda)$ keins haben.

$$\Rightarrow \; P(\lambda) \in \sigma(P(T))$$

"$\subseteq$": Sei $\mu \in \sigma(P(T))$ und seien $\lambda_1, .., \lambda_n$ die Wurzeln von $P(x) - \mu$, d.h.

$$\begin{aligned} \Rightarrow P(x) - \mu &= a_n(x - \lambda_1) \cdots (x - \lambda_n) \\ \Rightarrow P(T) - \mu &= a_n(T - \lambda_1) \cdots (T - \lambda_n) \end{aligned}$$

Sind $\lambda_1, .., \lambda_n \notin \sigma(T)$, dann gilt

$$(P(T) - \mu)^{-1} = a_n^{-1}(T - \lambda_n)^{-1} \cdots (T - \lambda_1)^{-1}$$

was $\mu \notin \sigma(P(T))$ bedeutet. Deswegen muß $\lambda_i \in \sigma(T)$ für ein $i \in \{1, .., n\}$.
$\Rightarrow \; \mu = P(\lambda_1) \in P(\sigma(T))$

q.e.d.

Lemma 8.2
Sei $T \in \mathcal{L}(H)$ selbstadjungiert. Dann gilt

$$||P(T)|| = \sup_{\lambda \in \sigma(T)} |P(\lambda)|$$

Beweis

$$\begin{aligned} ||P(T)||^2 &= ||(P(T)^* P(T))|| \\ &= ||\bar{P}(T)P(T)|| \\ &= ||(\bar{P}P)(T)|| \\ &= \sup_{\lambda \in \sigma(\bar{P}P(T))} |\lambda| \\ &= \sup_{\lambda \in \sigma(T)} |\bar{P}P(\lambda)| \\ &= \sup_{\lambda \in \sigma(T)} |P(\lambda)|^2 \\ &= (\sup_{\lambda \in \sigma(T)} |P(\lambda)|)^2 \\ \Rightarrow \; ||P(T)|| &= \sup_{\lambda \in \sigma(T)} |P(\lambda)| \end{aligned}$$

q.e.d.

Satz 8.3
*Sei T ein beschränkter und selbstadjungierter Operator. Dann existiert ein eindeutiger, beschränkter *-Algebrahomomorphismus*

$$F : C(\sigma(T)) \to \mathcal{L}(H)$$

mit F(id) = T. Desweiteren erfüllt F folgendes:

1. $||\varphi(T)|| = ||\varphi||_\infty = \max\limits_{x\in\sigma(T)} |\varphi(x)|$

2. $\sigma(\varphi(T)) = \varphi(\sigma(T))$

3. $\varphi \geq 0 \iff \varphi(T) \geq 0$

4. $T\xi = \lambda\xi \Rightarrow \varphi(T)\xi = \varphi(\lambda)\xi$

Beweis

*Existenz: Für ein Polynom P definiere $F_0(P) = P(T)$ wie oben. Dann ist F_0 ein *-Algebrahomomorphismus auf $Pol \subset C(\sigma(T))$.*

$$\Rightarrow \ ||F_0(P)|| = ||P||_{\infty,\sigma(T)}$$

Da die Menge der Polynome dicht liegt (Satz von Weierstraß), existiert eine Fortsetzung von $F : C(\sigma(T)) \to \mathcal{L}(H)$.

$$P_n \overset{||\cdot||_\infty}{\to} \varphi \ \Rightarrow \ \lim_{n\to\infty} P_n(T) =: F(\varphi)$$

*Dann ist F ein *-Algebrahomomorphismus.*

$$\Rightarrow \ ||F(\varphi)|| = ||\varphi||_\infty$$

*Eigenschaften: Ist F ein *-Algebrahomomorphismus mit $\tilde{F}(x) = \tilde{F}(id) = T$, dann gilt*

$$\tilde{F}|_{Pol} = F_o|_{Pol} \overset{Stetigkeit}{\Longrightarrow} \tilde{F} = F$$

was die Eindeutigkeit und (1) impliziert, da F isometrisch ist (das folgt aus $r(T) = ||T||$).
(2): "$\subseteq$": Ist $\mu \notin \varphi(\sigma(T))$:

$$\begin{array}{cc}
\Rightarrow & \psi(x) = \frac{1}{\varphi(x)-\mu} \ \in C(\sigma(T)) \\
\Rightarrow & (\varphi-\mu)\psi = 1 \\
\Rightarrow & (\varphi(T)-\mu)\psi(T) = 1 \\
\Rightarrow & \psi(T) = (\varphi(T)-\mu)^{-1},\ \mu \notin \sigma(\varphi(T))
\end{array}$$

"$\supseteq$": Sei $\mu \in \varphi(\sigma(T))$, Ziel: $\exists(\xi_n) \subset H$, $||\xi_n|| = 1$ mit $||(\varphi(T)-\mu)\xi_n|| \to 0$, dann gilt $\mu \in \sigma(\varphi(T))$:
Sei $\epsilon > 0$ fest. $\exists x \in \sigma(T)$, $\varphi(x) = \mu$ und $\delta > 0$ mit

$$\varphi(U_\delta(x)) \subseteq U_\epsilon(\mu)$$

$\exists \eta \in C_c(U_\delta(x))$ mit $0 \leq \eta \leq 1$, $\eta(x) = 1$.

$$\Rightarrow \ ||\eta||_\infty = 1 = ||\eta(T)||$$

Sei $\tilde{\xi} \in H$ mit $||\tilde{\xi}|| = 1$ und $||\eta(T)\tilde{\xi}|| = 1$.
Behauptung: $\xi := \eta(T)\tilde{\xi}$ erfüllt $||(\varphi(T)-\mu)\xi|| \leq \epsilon$.

$$\begin{aligned}
||(\varphi(T)-\mu)\xi|| &= ||(\varphi(T)-\mu)\eta(T)\tilde{\xi}|| \\
&\leq ||(\varphi(T)-\mu)\eta(T)|| \\
&= ||(\varphi-\mu)\eta||_\infty \leq \epsilon \\
&\quad (\varphi-\mu \leq \epsilon,\ und\, \eta(x) \neq 0)
\end{aligned}$$

(3): $\varphi \geq 0$ *auf* $\sigma(T)$*, dann ist* $\varphi^{\frac{1}{2}} \in C(\sigma(T))$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \quad & \varphi = \varphi^{\frac{1}{2}} \cdot \varphi^{\frac{1}{2}} \\
\Rightarrow \quad & \varphi(T) = \varphi^{\frac{1}{2}}(T) \cdot \varphi^{\frac{1}{2}}(T) \\
\Rightarrow \quad & \langle \varphi(T)\xi | \xi \rangle = \left\langle \varphi^{\frac{1}{2}}(T) \cdot \varphi^{\frac{1}{2}}(T)\xi \middle| \xi \right\rangle = \left\langle \varphi^{\frac{1}{2}}(T)\xi \middle| \varphi^{\frac{1}{2}}(T)\xi \right\rangle \geq 0
\end{aligned}$$

"$\Leftarrow$": $\varphi(T) \geq 0$*, dann gilt* $\sigma(\varphi(T)) \subset [0, \infty)$ *und* $\varphi(\sigma(T)) \subset [0, \infty)$ *und damit* $\varphi \geq 0$*.*
(4): $T\xi = \lambda\xi$*, und damit* $T^2\xi = \lambda^2\xi$*, und so weiter*

$$\Rightarrow P \in Pol\ :\ P(T)\xi = P(\lambda)\xi$$

$$\stackrel{Stetigkeit}{\Rightarrow} \varphi(T)\xi = \varphi(\lambda)\xi \text{ für } \varphi \in C(\sigma(T)).$$

q.e.d.

Korollar 8.4
Sei $T \in \mathcal{L}(H)$ *selbstadjungiert,* $T \geq 0$*, dann existiert ein selbstadjungierter Operator* $S \in \mathcal{L}(H)$*,* $S \geq 0$ *mit*

$$T = S^2 = S^*S$$

Beweis
$F(\sqrt{x}) =: S$ *wobei* F *der Funktionalkalkül ist.*

q.e.d.

Kapitel 9

Zwischenspiel: Der Satz von Riesz-Markoff

Maße $\leftrightarrow$ lineare Funktionale auf Unterräumen von $C(X)$

Erinnern wir uns daran, daß ein Topologischer Raum lokal kompakt heißt, falls jedes $x \in X$ eine kompakte Umgebung besitzt (jeder kompakte Raum ist lokalkompakt). Desweiteren heißt X σ-kompakt, falls kompakte Mengen C_n, $n \in \mathbb{N}$, existieren, mit

$$X = \bigcup_n C_n$$

Beispiele: $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$.
Die σ-Algebra der Borelmengen $\mathcal{B}$ auf X, ist die kleinste σ-Algebra die die offenen Mengen enthält. Ist X lokal kompakt und σ-kompakt, dann wird $\mathcal{B}$ von den kompakten Mengen erzeugt.

Definition 9.1
Ein Baire'sches Maß μ ist eine σ-additive Mengenfunktion, mit

$$\mu : \mathcal{B} \to [0, \infty] \; : \; \mu(C) < \infty \; \forall C \textit{ kompakt}$$

Beispiele: das Lebesgue Maß auf $\mathbb{R}, \mathbb{C}$

Definition 9.2
Für $\varphi : X \to \mathbb{C}$ ist

$$\textit{supp}\, \varphi = \overline{\{x \; : \; \varphi(x) \neq 0\}}$$

der Träger von φ, d.h. das Komplement der größten offenen Menge auf der φ verschwindet.
Definiere:

$$C_c(X) = \{\varphi \in C(X) \; : \; \textit{supp}\, \varphi \textit{ kompakt}\}$$

Da jedes $\varphi \in C_c(X)$ majorisiert wird durch χ_C für ein geeignetes kompaktes C, ist φ integrierbar bzgl. jeden Baire'schen Maßes μ:

$$\int |\varphi(x)| \, d\mu(x) \leq \mu(\textit{supp}\, \varphi)$$

Damit können wir lineare Funktionale $l = l_\mu$ auf $C_c(X)$ definieren durch:

$$l : C_c(X) \to \mathbb{C}, \; l(\varphi) := \int_X \varphi(x) \, d\mu(x)$$

Dieses Funktional ist positiv im Sinne von

$$\varphi \geq 0 \;\Rightarrow\; l(\varphi) \geq 0$$

Die Umkehrung dieser letzten Aussage ist:

Satz 9.3 (Satz von Riesz, Markoff, Kakutani)
Für jedes positive, lineare Funktional l auf $C_c(X)$ existiert ein Baire'sches Maß μ für das gilt:

$$l(\varphi) = \int_X \varphi(x)\, d\mu(x)$$

(Ist X lokal kompakt und σ-kompakt, dann ist dieses Maß eindeutig)

Idee des Beweises:
Für kompaktes $K \subset X$ gilt

$$\mu(K) = inf\{\int_X \varphi(x)\, d\mu(x) \;:\; \varphi \geq \chi_K\}$$

Ziel ist es μ auf $\mathcal{B}$ fortzusetzen.
Der Beweis kann in vielen Büchern der reellen Analysis gefunden werden (Stromberg, Rudin oder "Maß- und Integrationstheorie" von Bauer).

Ist X kompakt, dann ist μ endlich und der Satz von Riesz-Markoff sagt uns, daß

$$(C(X), ||\cdot||_\infty) = \{l_{\mu_+} - l_{\mu_-} \;:\; \mu_+,\, \mu_- \text{ Baire'sche Maße}\}$$

Kapitel 10

Der Spektralsatz II

Wir beginnen damit Spektralmaße einzuführen.
Wir betrachten einen Hilbertraum H, einen beschränkten, selbstadjungierten Operator T auf H. Wir wissen, daß $\sigma(T) =: K \subset \mathbb{R}$ kompakt ist. Für $\xi \in H$ betrachte die Abbildung

$$l_\xi : C(K) \to \mathbb{C},\ l_\xi(\varphi) := \langle \varphi(T)\xi | \xi \rangle$$

Definition 10.1
Das Maß ρ_ξ, assoziiert mit l_ξ (Satz von Riesz-Markoff), heißt das Spektralmaß von T bzgl. ξ. Es ist Ansichtssache ob man ρ_ξ als Maß auf K oder auf $\mathbb{R}$ betrachtet

$$\rho_\xi(B) = \rho_\xi(B \cap K)$$

Wir werden die ρ_ξ benutzen um uns L^2 Räume zu konstruieren, in denen dann T als Multiplikation agiert.
Ein einfacher Fall tritt auf, falls ξ ein zyklischer Vektoer ist:

Definition 10.2
Sei $T \in \mathcal{L}(H)$. $\xi \in H$ heißt zyklischer Vektor von T, falls

$$\overline{lin\,\{T^n\xi\ :\ n \in \mathbb{N}_0\}} = H = \overline{\{P(T)\xi\ :\ P\ Polynom\}}$$

($\{P(T)\xi\ :\ P\ Polynom\} = \{\varphi(T)\ :\ \varphi \in C(K)\}$ falls T selbstadjungiert ist)

Lemma 10.3
Sei T selbstadjungiert und beschränkt auf H, $K := \sigma(T)$, dann existiert ein unitärer Operator

$$U : H \to L^2(K, \rho_\xi)$$

mit

$$(UTU^{-1})f(\lambda) = \lambda \cdot f(\lambda)$$

in $L^2(K, \rho_\xi)$.

$$\begin{array}{ccc} H & \xrightarrow{T} & H \\ U\downarrow & & \downarrow U \\ L^2(K) & \xrightarrow{UTU^{-1}} & L^2(K) \end{array}$$

Bemerkung: Die Information von T liegt in dem Maß ρ_ξ und ξ.

Beweis
Für $\varphi \in C(K)$ definieren wir

$$U_0(\varphi(T)\xi) := \varphi \in C(K) \subset L^2(K)$$

Wir wollen zeigen, daß U_0 wohldefiniert und isometrisch auf
$H_0 = \{\varphi(T)\xi \, : \, \varphi \in C(K)\}$ *ist.*
Das folgt aus:

$$\begin{aligned}
||\varphi(T)\xi||^2 &= \langle \varphi(T)\xi | \varphi(T)\xi \rangle \\
&= \langle \varphi(T)^* \varphi(T)\xi | \xi \rangle \\
&= \langle \bar{\varphi}(T)\varphi(T)\xi | \xi \rangle \\
&= \left\langle |\varphi(T)|^2 \xi | \xi \right\rangle \\
&= \int_K |\varphi(x)|^2 \, d\rho_\xi \\
&= ||\varphi||^2_{L^2(K,\rho_\xi)}
\end{aligned}$$

Darum ist U_0 wohldefiniert: Sind $\varphi, \psi \in C(K)$ mit

$$\varphi(T)\xi = \psi(T)\xi$$

dann ist $||(\varphi - \psi)(T)\xi||^2 = 0 \;\Rightarrow\; ||\varphi - \psi||^2_{L^2(K,\rho_\xi)} = 0$

$$\Rightarrow \varphi = \psi \text{ in } L^2(K, \rho_\xi)$$

Da U_0 isometrisch auf dem dichten H_0 (da ξ zyklisch) ist, können wir U_0 aufgrund der Stetigkeit fortsetzen zu einer Isometrie

$$U : H \to L^2(K, \rho_\xi)$$

Da $C(K)$ dicht in $L^2(K, \rho_\xi)$ liegt, $U(H) = L^2(K, \rho_\xi)$

$$\Rightarrow \; U \text{ ist unitär}$$

Und als letztes für $\varphi \in C(K)$

$$\begin{aligned}
(UTU^{-1})\varphi(\lambda) &= U(T\varphi(T)\xi)(\lambda) \\
&= U((id \cdot \varphi)(T)\xi)(\lambda) \\
&= (id \cdot \varphi)(\lambda)
\end{aligned}$$

$\Rightarrow \; (UTU^{-1})|_{C(K)} = M_{id}|_{C(K)}$
$\overset{Stetigkeit}{\Rightarrow} \; UTU^{-1} = M_{id}$ *auf* $L^2(K, \rho_\xi)$.

q.e.d.

Hat T einen zyklischen Vektor, dann gilt

$$T = U^* M_{id} U$$

wobei

$$U : H \to L^2(\sigma(T), \rho_\xi)$$

Lemma 10.4
Sei H separabel, $T \in \mathcal{L}(H)$ selbstadjungiert. Dann existiert $N \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ und abgeschlossene Unterräume H_n, $n < N$, mit den folgenden Eigenschaften:

1. $H = \bigoplus_n H_n$
2. *H_n ist ein invarianter Unterraum von T, d.h.* $T(H_n) \subset H_n$, $T(H_n^\perp) \subset H_n^\perp$

3. *Es existiert ein zyklischer Vekror ξ_n für $T|_{H_n}$*

Beweis *Mit Zorn, $\to$ Übung.*
(Idee: Nehmen beliebiges $\xi \neq 0$. $\overline{\{\varphi(T)\xi \,:\, \varphi \in C(K)\}} \neq H$, dann $\exists \xi_1 \in H \,:\, \xi_1 \perp \{\varphi(T)\xi \,:\, \varphi \in C(K)\}$. Müssen zeigen $T^n\xi_1 \perp \{\varphi(T)\xi \,:\, \varphi \in C(K)\}$.)

Satz 10.5 (Spektralsatz - Multiplikationsoperatorform)
Sei $T \in \mathcal{L}(H)$ selbstadjungiert, H ein separabler Hilbertraum. Dann existiert $N \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ und Maße μ_n, $n < N$, auf $K := \sigma(T)$ und unitärer Operator

$$U : H \to \bigoplus_{n<N} L^2(K, \mu_n) \ni (\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

mit

$$(UTU^{-1}\xi_n)(x) = x\xi_n(x)$$

Diese unitäre Darstellung von T heißt Spektraldarstellung. Sie ist im Allgemeinen nicht eindeutig.
Ist H nicht separabel, so gilt analoges mit einer überabzählbaren Familie von Maßen.

Wir benüötigen aber die Abzählbarkeit für folgendes

Korollar 10.6
Sei $T \in \mathcal{L}(H)$ selbstadjungiert, H separabel. Dann existiert ein endlicher Maßraum $(X, \mathcal{F}, \mu)$,(d.h. $\mu(X) < \infty$), eine beschränkte, meßbare Funktion $F : X \to \mathbb{R}$ und ein unitärer Operator $U : H \to L^2(X, \mathcal{F}, \mu)$, für die gelten:

$$T = U^* M_F U$$

$$\begin{array}{ccc} H & \xrightarrow{T} & H \\ U\downarrow & & \downarrow U \uparrow U^{-1} = U^* \\ L^2 & \xrightarrow{M} & L^2 \end{array}$$

Beweis *des Spektralsatzes*
Nach vorhergehenden Lemma können wir

$$H = \bigoplus_n H_n$$

mit $T|_{H_n}$ selbstadjungiert und zugehörigem zyklischen Vektor ξ_n

$$H \to \bigoplus_n H_n \xrightarrow{\oplus U_n} \bigoplus_n L^2(K, \rho_{\xi_n})$$

wobei für $n \in \mathbb{N}$, U_n gegeben ist durch Lemma 10.3 mit

$$U_n(T|_{H_n})U_n^* = M_{id} \text{ auf } L^2(K, \rho_{\xi_n})$$

$\Rightarrow$ *$\oplus U_n =: U$ erfüllt die Behauptung.*

q.e.d.

Schreiben $\mu_n := \rho_{\xi_n}$.

Beweis*des Korollares:*
Idee: Schreiben $\bigoplus_n L^2(K, \mu_n) = L^2(X, \mathcal{F}, \mu)$.
Für zwei Maßräume $(X_1, \mathcal{F}_1, \mu_1), (X_2, \mathcal{F}_2, \mu_2)$ definieren wir:

$$X = X_1 \dot\cup X_2,\ \mathcal{F} = \{A \subset X \,:\, A \cap X_1 \in \mathcal{F}_1,\ A \cap X_2 \in \mathcal{F}_2\}$$

$$\mu(A) = \mu_1(A \cap X_1) + \mu_2(A \cap X_2)$$

$\Rightarrow\ L^2(X_1) \oplus L^2(X_2) \cong L^2(X)$
Identifizieren $f \in L^2(X_1)$ *mit* $\tilde{f} \in L^2(X)$

$$\tilde{f}(x) = \left\{ \begin{array}{lcl} f(x) & : & x \in X_1 \\ 0 & : & x \in X_2 \end{array} \right\}$$

Eine abzählbare Version: wählen (ξ_n) *mit* $||\xi_n|| = 2^{-n}$.
$\Rightarrow\ \rho_{\xi_n}(K) = \int 1\, d\rho_{\xi_n} = \langle 1(T)\xi|\xi\rangle = ||\xi_n||^2 = 2^{-2n}$
Für n *wie im Satz,* ξ_n *wie oben,* $n < N$ *definiere*

$$X_n := K \times \{n\},\ \mathcal{F}_n := \text{ Borel-}\sigma\text{-Algebra},\ \mu_n \simeq \rho_{\xi_n}$$

Wie oben definieren wir

$$X = \dot{\bigcup_{n<N}} X_n,\ \mathcal{F} = \{A \subset X\ :\ A \cap X_n \in \mathcal{F}_n\ \forall n\}$$

$$\mu(A) = \sum_{n<N} \mu_n(A \cap X_n) \leq \sum_{n<N} \mu_n(X_n) = \sum_{n<N} \rho_{\xi_n}(K) < \infty$$

$\Rightarrow\ (X, \mathcal{F}, \mu)$ *ist ein endlicher Maßraum*

$$\bigoplus_n L^2(K, \rho_{\xi_n}) \simeq \bigoplus_n L^2(X_n, \mathcal{F}_n, \mu_n) \simeq L^2(X, \mathcal{F}, \mu)$$

$\bigoplus_n M_{id}$ *auf* $\bigoplus_n L^2(K, \rho_{\xi_n}) \rightsquigarrow M_F$ *wobei*

$$F : X \to \mathbb{R},\ F(x,n) = x$$

$\Rightarrow\ T = U_1 \bigoplus_n M_{id} U_1^* = (U_1 V) M_F (U_1 V)^*$
wobei $U_1 : H \to \bigoplus_n L^2(K),\ V : \bigoplus_n L^2(K) \to L^2(X)$.
$\Rightarrow\ T = U M_F U^*$
Die Information über T *steckt im Spektrum* $\sigma(T) = K$ *und* $(\rho_{\xi_n}) = (\mu_n)$
Schönes Beispiel: Übung
Meta-Statement:
Ist T *ein Differenz- oder ein Differentialoperator, dann erhalten wir von der Fourierdarstellung eine unitäre Darstellung als Multiplikation:*

$$l^2(\mathbb{Z}) \xrightarrow{F} L^2(0,1)$$

$$L^2(\mathbb{R}) \xrightarrow{F} L^2(\mathbb{R})$$

Kapitel 11

Die Polarzerlegung

Analogien:

für Zahlen	$a \in \mathbb{C}, \bar{a}$	$\overline{a+b} = \bar{a} + \bar{b}$
für Operatoren	A, A^*	$(\lambda A)^* = \bar{\lambda} A^*$

reelles $a = \bar{a}$ $\leftrightarrow$ *selbstadjungierter* $A = A^*$

$\bar{u} = u^{-1}$ $\leftrightarrow$ *unitärer* $U^* = U^{-1}$

Jede Zahl kann geschrieben werden als $a = u \cdot |a|$ *mit* $u\bar{u} = 1$ *und* $|a| \in \mathbb{R}$. *Gilt analoges auch für Operatoren?*

$$|A| = \sqrt{A^*A}$$

Ist $A \in \mathcal{L}(H)$, *dann ist* A^*A *selbstadjungiert und* $A^*A \geq 0$

$$(A^*A)^* = A^*(A^*)^* = A^*A$$

$$\langle A^*A\xi|\xi\rangle = \langle A\xi|A\xi\rangle \geq 0$$

Definition 11.1
Für $A \in \mathcal{L}(H)$ *definieren wir das Modul von* A *durch*

$$|A| = \sqrt{A^*A}$$

(durch den Funktionalkalkül)

Definition 11.2
Für $M \subset \mathcal{L}(H)$ *definieren wir seinen Kommutator*

$$M' := \{B \in \mathcal{L}(H) \,:\, \forall A \in M :\; AB = BA\}$$

Bemerkung 9
Ist A *selbstadjungiert,* $\varphi \in C(\sigma(A))$, *dann gilt:*

$$\{A\}' \subset \{\varphi(A)\}'$$

Beweis
Ist φ *ein Polynom, dann ist* $\varphi(A) = \sum_{k=1}^{n} a_k A^k$ *und*

$$B \in \{A\}' \;\Rightarrow\; B \in \{A^k\}'\ \forall k$$

$$\varphi(A)B = \sum_{k=1}^{n} a_k A^k B = B\varphi(A)$$

Da die Polynome dicht in C(K) liegen, folgt die Behauptung. *q.e.d.*

Lemma 11.3
Sei $A \in \mathcal{L}(H)$, $A \geq 0$. Dann existiert ein eindeutiger Operator $B \in \mathcal{L}(H)$, $B \geq 0$ mit $B^2 = A$.
Desweiteren kommutiert B mit jedem Operator, mit dem A kommutiert,
d.h. $\{A\}' \subset \{B\}'$.

Beweis
Existenz folgt aus dem Spektralsatz: $B = \sqrt{A}$, B kommutiert, ... ($\varphi = \sqrt{}$ in voriger Bemerkung).
Sei $B' \geq 0$, $(B')^2 = A$. $B' \in \{A\}'$ weil

$$\begin{aligned} & B'A = B'(B')^2 = (B')^2B' = AB' \\ \Rightarrow \quad & BB' = B'B \\ \Rightarrow \quad & (B-B')B(B-B') + (B-B')B'(B-B') = 0 \end{aligned}$$

$(B-B')B(B-B')$ und $(B-B')B'(B-B')$ sind ≥ 0:

$$\langle (B-B')B(B-B')\xi|\xi\rangle = \langle B(B-B')\xi|(B-B')\xi\rangle \geq 0$$

da $B \geq 0$.

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad & (B-B')B(B-B') = 0 = (B-B')B'(B-B') \\ \Rightarrow \quad & (B-B')B(B-B') - (B-B')B'(B-B') = 0 \\ \Rightarrow \quad & (B-B')^3 = 0 \\ \Rightarrow \quad & (B-B')^4 = 0 \\ \Rightarrow \quad & 0 = ||(B-B')^4|| = ||B-B'||^4 \qquad (||C||^2 = ||C^*C||) \\ \Rightarrow \quad & B = B' \end{aligned}$$

q.e.d.

Problem: Wollen $A \in \mathcal{L}(H)$ schreiben als $U \cdot |A|$.

Beispiel 11.4
Sei S der Shift-Operator auf $l^2(\mathbb{N})$

$$S(\xi_n)_n = (\xi_{n-1})_n = (0, \xi_1, \xi_2, ...)$$

Dann ist $S^*(\xi_n)_n = (\xi_{n+1})_n$, da

$$\begin{aligned} \langle S\xi|\eta\rangle &= \sum_{j=1}^{\infty} \langle (S\xi)_j|\eta_j\rangle \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \langle \xi_j|\eta_{j+1}\rangle \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \langle \xi_j|(S^*\eta)_j\rangle \end{aligned}$$

So auch $S^*S = I$ und daraus $|S| = I$.
$\Rightarrow$ $S = U$ (Polarzerlegung)
d.h. (in the polardecomposition U cannot be assumed as unitary)

Definition 11.5
Ein Operator U heißt eine partielle Isometrie, falls $||Ux|| = ||x||$ für alle $x \in N(U)^\perp$.
Man nennt U eine Isometrie, falls $||Ux|| = ||x||$ für alle $x \in H$.

Bemerkung 10
Ist U eine partielle Isometrie, dann gilt:

$$H = N(U) \oplus N(U)^\perp = R(U) \oplus R(U)^\perp$$

und

$$U : N(U)^\perp \to R(U)$$

bzw.

$$U^* : R(U) \to N(U)^\perp$$

sind Isometrien, und es gilt

$$U^*|_{R(U)} = (U|_{N(U)^\perp})^{-1}$$

Proposition 11.6

1. *Ist U eine partielle Isometrie, dann gilt*

$$U^*U = P_{N(U)^\perp},\ UU^* = P_{R(U)}$$

2. *Ist $U \in \mathcal{L}(H)$ mit U^*U und UU^* sind Projektionen, dann ist U eine partielle Isometrie.*

Beweis *Übung*

Satz 11.7
Sei $A \in \mathcal{L}(H)$. Dann existiert eine partielle Isometrie U mit

$$A = U \cdot |A|$$

U ist eindeutig bestimmt durch $N(U) = N(A)$. Weiterhin gilt $R(U) = \overline{R(A)}$.

Beweis
Definiere $U : R(|A|) \to R(A)$ durch $U(|A|\xi) = A\xi$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} ||\,|A|\xi||^2 &= \left\langle \sqrt{A^*A}\xi|\sqrt{A^*A}\xi \right\rangle \\ &= \langle A^*A\xi|\xi\rangle \\ &= \langle A\xi|A\xi\rangle \\ &= ||A\xi||^2 \end{aligned}$$

Deswegen ist U wohldefiniert und linear. U ist isometrisch, und man kann U fortsetzen durch

$$U : \overline{R(|A|)} \to \overline{R(A)}$$

Wir setzen U auf H fort, indem wir $U = 0$ auf $(\overline{R(|A|)})^\perp$ setzen

$$(\overline{R(|A|)})^\perp = N(|A|^*) = N(|A|) = N(A)$$

Da U eindeutig auf $R(|A|)$ bestimmt ist, existiert nur eine Möglichkeit mit $N(U) = N(A)$.

q.e.d.

Beispiel 11.8

1. *Polarzerlegung des Shift-Operators?*

$$S = U \cdot |S| \text{ mit } U = S,\ |S| = 1$$

2. *Sei* $v : \Omega \to \mathbb{C}$ *eine Funktion auf* $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ *mit* $||v||_\infty < \infty$, $T = M_v$.
   Die Polarzerlegung von T:

$$\left.\begin{array}{lcl} T^* & = & M_{\bar{v}} \\ T^*T & = & M_{\bar{v}} M_v \end{array}\right\} \Rightarrow |T| = M_{|v|}$$

$$U = M_u$$

$$\text{wobei } u(\omega) = \left\{\begin{array}{lcl} \frac{v(\omega)}{|v(\omega)|} & : & v(\omega) \neq 0 \\ o & = & v(\omega) = 0 \end{array}\right\}$$

Kapitel 12

Kompakte Operatoren

Vieles, von dem was folgt, gilt in diesem Zusammenhang auch für Banachräume.

Definition 12.1
Seien E, F normierte Räume, ein Operator $T \in \mathcal{L}(E, F)$ heißt kompakt, falls $T(B_E)$ präkompakt ist, d.h.

$$\forall \epsilon > 0 \, \exists y_1, .., y_n \in F \; : T(B_E) \subset \bigcup_{j=1}^{n} U_\epsilon(y_j)$$

wobei

$$B_E = \{x \in E \; : \; |x| \leq 1\}$$

Sehr wichtige Beispiel dafür sind Integraloperatoren:

Beispiel 12.2
Sei $K : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{C}, \; K \in L^2([0,1]^2)$. Dann definiert

$$T_K : L^2[0,1] \to L^2[0,1]$$

$$(T_K f)(x) := \int_0^1 K(x,y) f(y) \, dy$$

einen kompakten Operator in $L^2[0,1]$. (Gleichmäßig beschränkte differenzierbare Mengen sind kompakt in C(K), siehe Satz von Arzela-Ascoli)

Beispiel 12.3
Sei $T \in \mathcal{L}(H)$ ein Operator endlichen Ranges, d.h. $R(T)$ ist endlich dimensional. Dann ist T kompakt, denn in einem endlich dimensionalen Raum ist jede beschränkte Menge präkompakt.
Erinneren wir uns daran, daß

$$x_n \xrightarrow{w} x \iff \langle x_n | y \rangle \to \langle x | y \rangle \, \forall y \in H$$

(Ist (e_n) ein ONS, dann gilt $e_n \xrightarrow{w} 0$.)
Das Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit (Satz von Banach-Steinhaus (BS)) sagt aus, daß jede schwach konvergente Folge beschränkt ist:

$$l_n \in H', \; l_n(y) = \langle y | x_n \rangle, \; ||l_n||_{H'} = ||x_n||_H$$

Ist $x_n \xrightarrow{w} x$, dann ist $\sup\limits_n ||l_n(y)|| < \infty$ für alle $y \in H$, da die konvergente Folge $l_n(y)$ beschränkt ist

$$\overset{BS}{\Rightarrow} \sup_n ||l_n|| < \infty \; \Rightarrow \; \sup_n ||x_n|| < \infty$$

Lemma 12.4
Sei $x_n \xrightarrow{w} 0$ und $K \subset H$ kompakt. Dann gilt

$$\sup_{z \in K} |\langle x_n | z \rangle| \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Beweis

- *punktweise Konvergenz*
- *Kompaktheit*
- *gleichmäßige Beschränktheit*

Satz 12.5
Ein kompakter Operator $T \in \mathcal{L}(H)$ bildet schwach konvergente Folgen auf norm-konvergente Folge ab.

Beweis
Erste Version: Aus dem vorigen Lemma, $x_n \xrightarrow{w} 0$ mit $||x_n|| < 1$ folgt:

$$||Tx_n||^2 = \langle Tx_n | Tx_n \rangle \leq \sup_{z \in T(B_H)} |\langle Tx_n | z \rangle| \to 0$$

da $Tx_n \xrightarrow{w} 0$.
Zweite Version: Für $x_n \xrightarrow{w} x$, gilt $Tx_n \xrightarrow{w} Tx$ weil

$$\langle Tx_n | y \rangle = \langle x_n | T^* y \rangle \Rightarrow \langle x | T^* y \rangle = \langle Tx | y \rangle$$

Da (x_n) beschränkt ist, ist (Tx_n) präkompakt. Wir werden zeigen, daß $y_n = Tx_n$ konvergiert. Es reicht zu zeigen, daß jede Teilfolge von (y_n) eine Teilfolge hat, die gegen Tx konvergiert. Nehmen $(y_{n_k}) \subset K$, mit kompakten K, dann existiert eine konvergente Teilfolge die gegen ein z konvergiert.
$\Rightarrow\ y_{n_{k_l}} \xrightarrow{w} y = Tx,\ y_{n_{k_l}} \to z$
$\Rightarrow\ z = y$

q.e.d.

Schreiben

$$\mathcal{C}(H) = \{T \in \mathcal{L}(H)\ :\ T \text{ kompakt}\}$$

für die Calkin-Algebra.

Satz 12.6
$\mathcal{C}(H)$ ist abgeschlossen in $(\mathcal{L}(H), ||\cdot||)$, d.h. für $(T_n) \subset \mathcal{C}(H)$ mit $||T_n - T|| \to 0$, gilt $T \in \mathcal{C}(H)$.

Beweis
Sei $\epsilon > 0$. Nehmen n hinreichend groß, so daß $||T - T_n|| \leq \frac{\epsilon}{2}$. Da $T_n(B_E)$ präkompakt ist, finden wir $y_1, .., y_m \in H$ mit $T_n(B_E) \subseteq \bigcup_{j=1}^{m} B_{\frac{\epsilon}{2}}(y_j)$:

$$\Rightarrow\ T(B_E) \subseteq B_{\frac{\epsilon}{2}}(T_n(B_E)) \subseteq \bigcup_{j=1}^{m} B_{\epsilon}(y_j)$$

q.e.d.

Aus dem letzten Satz folgt, daß der Grenzwert bzgl. der Norm von Operatoren mit endlichem Rang kompakt ist. Die Umkehrung hingegen gilt für Banachräume im Allgemeinen nicht, wohl aber für Hilberträume:

Satz 12.7
Sei H ein separabler Hilbertraum. Dann ist jeder kompakte Operator Grenzwert einer normkonvergenten Folge von Operatoren mit endlichen Rang.

Bemerkung 11
Man sagt, E hat die Approximationseigenschaft, falls jeder kompakte Operator Grenzwert einer normkonvergenten Folge von Operatoren mit endlichen Rang ist. Banach fragte sich, ob jeder Banachraum diese Eigenschaft hat. Antwort: Nein (erster Beweis von Per Enflo 1972).
Jetzt: $\mathcal{L}(H)$ mit $\dim H = \infty$, hat nicht die Approximationseigenschaft.

Beweis
oE sei $\dim H = \infty$ und (e_n) eine ONB. Definieren wir die monoton fallende Folge

$$\lambda_n := sup\{||T\xi|| \,:\, \xi \in \{e_1, .., e_n\}^\perp,\ ||\xi|| \leq 1\}$$

Wir zeigen $\lambda = \lim \lambda_n = 0$:
Wählen $\eta_n \in H$, $||\eta_n|| = 1$, $\eta_n \perp \{e_1, .., e_n\}$ und $||T\eta_n|| \geq \frac{\lambda}{2}$. Da $\eta \in \{e_1, .., e_n\}^\perp$, erhalten wir $\eta_n \xrightarrow{w} 0$, denn für $\xi \in H$ mit $\xi = \sum \langle \xi | e_n \rangle e_n$ gilt:

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \quad \langle \eta_n | \xi \rangle &= \sum_{k \geq n+1} \langle \xi | e_n \rangle \langle \eta_k | e_n \rangle \to 0 \\
\Rightarrow \quad ||T\eta_n|| &\to 0 \\
\Rightarrow \quad \lambda &= 0
\end{aligned}$$

Definieren $F_n \in \mathcal{L}(H)$ durch $F_n\xi = \sum \langle \xi | e_j \rangle T e_j \Rightarrow \lambda_n = ||T - F_n||$

$$\begin{aligned}
(||T - F_n|| &= \sup_{||\xi|| \leq 1} ||T\xi - F_n\xi|| \\
&= \sup_{||\xi|| \leq 1} ||\sum_{j=1}^{\infty} \langle \xi | e_j \rangle T e_j - \sum_{j=1}^{n} \langle \xi | e_j \rangle T e_j|| \\
&= \sup_{||\xi|| \leq 1} ||\sum_{j=n+1}^{\infty} \langle \xi | e_j \rangle T e_j|| \\
&= \sup_{\substack{||\xi|| \leq 1 \\ \xi \perp \{e_1, .., e_n\}}} ||\sum_{j=n+1}^{\infty} \langle \xi | e_j \rangle T e_j|| \\
&= \lambda_n)
\end{aligned}$$

Das grundlegende Prinzip, daß kompakte Operatoren so interessant macht, heißt Fredholm'sche Alternative:
Ist $T \in \mathcal{C}(H)$, dann gilt entweder

$$\exists \xi \neq 0 : \ T\xi = \xi \ :\ T - I \text{ ist nicht invertierbar}$$

(aber "$\Leftarrow$" gilt nicht für beliebiges $T \in \mathcal{L}(H)$, zB. Multiplikationsoperatoren).
oder

$$(I - T)^{-1} \in \mathcal{L}(H)$$

Das ist äquivalent zu:
Für beliebiges $\xi \in H$ existiert höchstens ein η mit $\eta = \xi + T\eta$. Dann gibt es genau eins (nehmen $\xi = 0$ oben).
Wir werden die Fredholm'sche Alternative aus dem folgenden Satz ableiten:

Satz 12.8 (Satz von Fredholm - analytische Version)
Sei $D \subset \mathbb{C}$ offen und zusammenhängend. Sei $f : D \to \mathcal{L}(H)$ analytisch mit $f(D) \subset \mathcal{C}(H)$. Dann gilt entweder:

$$(I - f(z))^{-1} \text{ existiert für kein } z \in D$$

oder

Es existiert eine diskrete Teilmenge $S \subset D$, so daß $(I - f(z))^{-1}$ existiert für $z \notin S$

Im zweiten Falle ist $(I - f(z))^{-1}$ eine meromorphe Funktion, die analytisch auf $D \backslash S$ ist, und die Residuen in den Punkten von S sind Operatoren mit endlichem Rang.
(f ist meromorph auf $D \iff f$ ist, mit Ausnahme der Pole, holomorph;
Ist $f : B_r(z_0) \backslash \{z_0\} \to \mathbb{C}$ holomorph, dann ist $f(z) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k (z - z_0)^k$ die Laurentreihe und $\operatorname{res} f(z_0) = a_{-1}$ das Residuum von f in z_0).

Beweis
Es reicht die Alternative in einer Umgebung von $z_0 \in D$ zu zeigen. Nach Satz 12.7 finden wir F mit endlichem Rang, mit:

$$||f(z_0) - F|| \leq \frac{1}{2}$$

Da f stetig ist, finden wir $r > 0$ mit

$$||f(z) - F|| \leq \frac{3}{4} \qquad \forall z \in B_r(z_0)$$

Entwickeln wir in eine geometrische Reihe

$$(I - f(z) + F)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (f(z) - F)^k$$

Schreiben

$$g(z) = F(I - f(z) + F)^{-1}$$

dann ist g holomorph und mit endlichen Rang. Man sieht

$$(I - f(z)) = (I - g(z))(I - f(z) + F)$$

Da $(I - f(z) + F)^{-1}$ existiert,

$$(I - f(z))^{-1} \textit{ existiert } \iff (I - g(z))^{-1} \textit{ existiert}$$

Wir untersuchen $(I - g(z))$. F hat endlichen Rang

$$\Rightarrow F\xi = \sum_{j=1}^{N} \langle \xi | \xi_j \rangle \eta_j$$

für geeignete linear unabhängige η_j und ξ_j

$$\Rightarrow g(z)\xi = \sum_{j=1}^{N} \langle (I - f(z) + F)^{-1} \xi | \xi_j \rangle \eta_j$$

$I-g(z)$ ist nicht invertierbar $\iff \exists \eta \neq 0$ *mit*

$$g(z)\eta = \eta$$

Entwickeln $\eta = \sum_{m=1}^{N} \beta_m \eta_m$

$$\begin{aligned}
\iff g(z)\eta &= \sum_{j=1}^{N} \langle (I-f(z)+F)^{-1}(\sum_{m=1}^{N} \beta_m \eta_m)|\xi_j\rangle \eta_j = \sum_{j=1}^{N} \beta_j \eta_j \\
\iff \beta_j &= \sum_{m=1}^{N} \underbrace{\langle (I-f(z)+F)^{-1}\eta_m|\xi_j\rangle \beta_m}_{=:a_{jm}(z)} \qquad \forall j=1,..,N
\end{aligned}$$

Jetzt: $g(z)\eta = \eta$ *hat eine nichttriviale Lösung* $\iff$

$$\beta = (\beta_1,..,\beta_N) \neq 0 : \ \beta_j = \sum_{m=1}^{N} \beta_m a_{jm}$$

$$\iff \underbrace{det(\delta_{jm} - a_{jm}(z))_{j,m}}_{holomorph} = 0$$

Also ist entweder $det(\delta_{jm} - a_{jm}(z))_{j,m} = 0$ *für* $z \in B_r(z_0)$ *oder es existiert eine diskrete Menge* $S_r \subset B_r(z_0)$ *mit* $det(\delta_{jm} - a_{jm}(z))_{j,m} \neq 0$ *für* $z \notin S_r$. *In diesem Fall existiert* $(I-g(z))^{-1}$ *und ist holomorph. Da dies äquivalent zur Existenz von* $(I-f(z))^{-1}$ *ist, folgt die Behauptung.*

q.e.d.

Korollar 12.9 (Fredholm'sche Alternative)
Sei $A \in \mathcal{C}(H)$ *dann ist entweder* $(I-A)$ *invertierbar oder* $N(I-A) \neq \{0\}$.

Beweis
Nehmen $f(z) = zA$ *und wenden vorigen Satz an mit* $z=1$.

q.e.d.

Beispiel 12.10
Die Fredholmsche Alternative gilt im Allgemeinen nicht:

$$v(x) = cos(x) \ auf \, \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \sigma(M_v) = [-1,1]$$

$$\Rightarrow \ I - M_v \ ist \ nicht \ invertierbar$$

aber $N(\lambda - M_v) = 0, \ \forall \lambda \in \mathbb{C}$

Satz 12.11 (Satz von Riesz- Scha de)
Sei $A \in \mathcal{C}(H)$. *Dann liegt* $\sigma(A)$ *diskret in* $\mathbb{C}\backslash\{0\}$.

Beweis
Sei $f(z) = zA$ *holomorph auf* $\mathbb{C}$. *Dann gilt:*

$$S = \{z : \ zA\xi = \xi \ hat \ eine \ Lösung \ \xi \neq 0\} \not\ni 0$$

ist diskret nach Satz 12.8 und $(I-zA)^{-1}$ *existiert für* $z \notin S$. *Für* $\frac{1}{\lambda} \notin S$ *existiert*

$$(\lambda - A)^{-1} = \frac{1}{\lambda}(I - \frac{1}{\lambda}A)^{-1} \qquad q.e.d.$$

Bemerkung 12
Jedes $\lambda \in \sigma(A)\backslash\{0\}$ ist ein Eigenwert von der endlichen Multiplikation:

$$\lambda \in \sigma(A)\backslash\{0\} \Rightarrow \lambda \textit{ Eigenwert}$$

Endliche Multiplikation: $L = N(\lambda - A) \subset H$

$$A|_L = \lambda \cdot I|_L \Rightarrow AB_L = \lambda B_L$$

ist relativ kompakt da A kompakt ist
$\overset{\lambda \neq 0}{\Rightarrow}$ B_L *kompakt* $\Rightarrow$ *dim* $L < \infty$

Satz 12.12 (Hilbert-Schmidt)
Sei A selbstadjungiert und kompakt. Dann existiert eine ONB $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *mit:*

$$A\xi_n = \lambda_n \xi_n$$

mit $\lambda_n \to 0$ *für* $n \to 0$.

Beweis
Sei $\{\lambda_n : n \in \mathbb{N}\}$ *die Menge der Eigenwerte von A. Nehmen ONBn für jedes* $N(\lambda_n - A)$
$\Rightarrow$ *ONS* $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *besteht aus Eigenwerten*
Betrachte $G = span\,\{\xi_n : n \in \mathbb{N}\}$. *Wir zeigen, daß* $G^\perp = \{0\}$ *ist. Da A selbstadjungiert ist, wissen wir:*

$$AG \subset G,\ AG^\perp \subset G^\perp$$
$$\sigma(A) = \sigma(A|_G) \cup \sigma(A|_{G^\perp})$$

Da A kompakt ist, ist $A|_{G^\perp}$ *kompakt und selbstadjungiert. Ist* $\lambda \in \sigma(A|_{G^\perp})\backslash\{0\}$, *so ist* λ *ein Eigenwert von* $A|_{G^\perp}$.

$$\begin{array}{rcl}
\Rightarrow & \sigma(A|_{G^\perp}) = \{0\} & \\
\Rightarrow & r(A|_{G^\perp}) = 0 & (\textit{Spektralradius}) \\
\Rightarrow & ||A|_{G^\perp}|| = 0 & \\
\Rightarrow & A|_{G^\perp} = 0 & \\
\Rightarrow & G^\perp \subset N(A) \subset G & \\
\Rightarrow & G^\perp = \{0\} &
\end{array}$$

q.e.d.

Satz 12.13 (Kanonische Darstellung von kompakten Operatoren)
Sei $A \in \mathcal{C}(H)$, *dann existieren ONS* (ξ_n), (η_n) *und* $\lambda_n > 0$ *mit*

$$A\xi = \sum_n \lambda_n \langle \xi | \eta_n \rangle \xi_n \qquad (\xi \in H) \qquad (*)$$

Beweis
Da A^*A *positiv und kompakt ist, finden wir ONS* (η_n) *und* $\mu_n > 0$ *mit*

$$A^*A\eta_n = \mu_n \eta_n$$

Schreiben $\lambda_n := \sqrt{\mu_n}$ *und* $\xi_n = \frac{1}{\lambda_n} A\eta_n$. *Wir zeigen* $\langle \xi_m | \xi_m \rangle = \delta_{nm}$ *und* $(*)$:

$$\begin{aligned}
\langle \xi_m | \xi_n \rangle &= \langle \frac{1}{\lambda_n} A\eta_n | \frac{1}{\lambda_m} A\eta_m \rangle \\
&= \frac{1}{\lambda_n} \cdot \frac{1}{\lambda_m} \langle A\eta_n | A\eta_m \rangle \\
&= \frac{1}{\lambda_n \cdot \lambda_m} \langle \lambda_n^2 \eta_n | \eta_m \rangle \\
&= \delta_{nm}
\end{aligned}$$

Ist $A\xi = 0,$ *dann* $A^*A\xi = 0$ *und* $\xi \perp \xi_n$

$$A\eta_n = \lambda_n \xi_n = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \langle \eta_n | \eta_k \rangle \xi_k$$

Das ist $(*)$ *für* $\xi = \eta_n$

$\Rightarrow\ A\xi = \sum_n \lambda_n \langle \xi | \eta_n \rangle \xi_n$ *für* $\xi \in lin\, \{\eta_n\} = N(A)^{\perp}$

q.e.d.