Störungstheorie von Dirichletformen mit Anwendungen auf Schrödingeroperatoren

Peter Stollmann

Habilitationsschrift

vorgelegt beim Fachbereich Mathematik
der Johann Wolfgang Goethe–Universität

Frankfurt am Main, November 1994

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Die grundlegenden Objekte der klassischen Quantenmechanik sind Schrödingeroperatoren, also partielle Differentialoperatoren der Form $-\Delta + V$, wobei V die äußeren Kräfte des Systems beschreibt.

Ein Ausgangspunkt der vorliegenden Arbeit ist folgender spezieller Aspekt der Störungstheorie von Schrödingeroperatoren: Ersetzt man das Potential V durch $V + W$, wobei der Träger von W als "klein" vorausgesetzt wird, so ist der resultierende Operator $-\Delta + V + W$ in gewissem Sinne eine kleine Störung von $-\Delta + V$. Bemerkenswert daran ist, daß man entsprechende Abschätzungen erhält, in die nur die Größe des Trägers von W eingeht. Als Extremfall kann man unendliche Potentiale, oder präziser Dirichlet–Randbedingungen betrachten. Obwohl uns hauptsächlich spektraltheoretische Konsequenzen im Kontext der klassischen Quantenmechanik interessieren (Invarianz des wesentlichen Spektrums, Existenz von Streuzuständen), arbeiten wir nicht mit der Schrödingergleichung, sondern hauptsächlich mit der Wärmeleitungsgleichung, das heißt wir benutzen die Halbgruppe $(e^{-t(-\Delta+V)}; t \geq 0)$. Mit deren Hilfe kann man das oben angesprochene Phänomen lokalisierter Störungen präziser fassen: Es geht uns darum, die Differenz der Halbgruppen für Störungen abzuschätzen, die kleinen Träger besitzen. Einige typische Anwendungen sollen einerseits den Nutzen solcher Abschätzungen demonstrieren und andererseits illustrieren, daß die Techniken, die wir zu deren Beweis entwickelt haben, in einem größeren Rahmen hilfreich sind.

Nun zu einer detaillierteren Inhaltsangabe: Abschnitte 1 und 2 beschäftigen sich mit der Definition der grundlegenden Operatoren, wobei wir statt $-\Delta$ allgemeiner den Erzeuger H einer regulären Dirichletform zulassen. Das hat natürlich den Vorteil vielfältigerer Anwendungsmöglichkeiten. Ebenso wichtig erscheint uns die Tatsache, daß die Beweise in diesem Kontext ihren angemessenen Rahmen haben und die zugrundeliegenden Strukturen klar zutage treten. Die zweite Verallgemeinerung bezieht sich auf den Potentialterm: Hier lassen wir anstelle von Funktionen allgemeinere Maße zu, nämlich solche, die bezüglich der zu H gehörigen Kapazität absolutstetig sind. Damit können wir auch Dirichlet–Randbedingungen als Potentiale behandeln. Im ersten Paragraphen konzentrieren wir uns zunächst auf nicht–negative Maße, deren Behandlung recht einfach ist und lediglich einige Grundtatsachen aus der Potentialtheorie benötigt. Für die eben angesprochene Klasse von Maßen führen wir außerdem den Träger und die Endlichkeitsmenge ein. Dabei bedienen wir uns der Tatsache, daß man die Ordnungsideale in Dirichleträumen gut charakterisieren kann.

Im zweiten Abschnitt geht es um Störungen mit negativem Vorzeichen. Hier sind naturgemäß stärkere Einschränkungen nötig als für positive Maße. Die zentrale Rolle spielt dabei die Kato–Bedingung in einer unserem Rahmen angemessenen allgemeinen Version. Im Hinblick auf die späteren Kapitel sind wir besonders an L^p–Eigenschaften der gestörten Halbgruppe interessiert. Insbesondere interessieren wir uns für Stabilität einer Eigenschaft, die in der englischsprachigen Literatur manchmal als $L^p - L^q$–"smoothing" bezeichnet wird. Ohne an dieser Stelle schon auf technische Einzelheiten eingehen zu wollen, erwähnen wir eine wichtige Technik: Man kann Maße so durch Potentiale approximieren, daß man letztere Eigenschaften durch die Kato–Konstanten kontrolliert. Es passiert sozusagen "nichts Neues" beim Übergang von Maßen zu Potentialen. In den Paragraphen 1 und 2 präsentieren wir also eine funktionalanalytische Behandlung von Störungen von Dirichletformen durch Maße. Dabei verweisen wir an vielen Stellen auf die Originalliteratur, wodurch dieser Teil

Übersichtscharakter bekommt.

Im dritten Abschnitt wird ein wichtiges Hilfsmittel unserer Untersuchung vorgestellt: der zu H gehörige stochastische Prozeß. Dabei ist besonders die Darstellung der gestörten Halbgruppe $\exp(-t(H+\mu))$ mittels der Feynman–Kac–Formel von Bedeutung. Da diese nach unserem Wissen für die in unserer Arbeit betrachteten Maße noch nicht bewiesen ist (wobei ein solcher Nachweis sicher nicht prinzipiell schwierig wäre), begnügen wir uns mit einem Spezialfall. Dabei haben wir bewußt auf eine Darstellung der technischen Einzelheiten verzichtet und den Begriff des additiven Funktionals nur skizziert.

Ist diese probabilistische Sichtweise das eine Bein, auf dem unsere Ergebnisse stehen (das Spielbein), so ist das Standbein eine Methode, der wir den vierten Paragraphen gewidmet haben: Spurnormabschätzungen mit Hilfe von Faktorisierung über die klassischen Banachräume L^1, L^∞ und $C(K)$. Zwei Resultate, die wir Hilbert–Schmidt beziehungsweise Spurklasse–Lemma genannt haben, stehen für uns dabei im Vordergrund. Beide folgen recht leicht mit den üblichen Techniken aus der Theorie der Operatorenideale. Da sie für die weiteren Abschnitte von zentraler Bedeutung sind, schien es vernünftig zu sein, einfache Beweise aufzunehmen, die einerseits die Arbeit in sich geschlossener machen und andererseits die Leser in das schöne Gebiet der Operatorenideale locken sollen.

An dieser Stelle ist vielleicht eine prinzipielle Bemerkung angebracht: Unser Hauptaugenmerk gilt zwar den Schrödingeroperatoren, trotzdem verwenden wir einen (den in unseren Augen richtigen) allgemeineren Rahmen und Techniken, die nicht zum üblichen Repertoire der mathematischen Physiker gehören, die sich mit Schrödingeroperatoren beschäftigen. Wir haben uns jedoch in der Regel (zu der es selbstverständlich Ausnahmen gibt) auf solche Resultate konzentriert, die schon im Spezialfall, sprich für Schrödingeroperatoren, interessant sind, und deren Beweis nicht durch die Betrachtung des allgemeineren Falles schwieriger wird.

Zurück zum eigentlichen Thema unserer Schrift, das in Abschnitt 5 aufgenommen wird: Es geht um Kompaktheitseigenschaften von Differenzen der Form

$$\exp(-t(H+\mu)) - \exp(-t(H+\nu)),$$

unter der Voraussetzung, daß sich μ und ν nur auf einer kleinen Menge unterscheiden. Wir erinnern daran, daß die Differenz der Halbgruppen das Äquivalent für die Differenz der Operatoren ist, die bei den singulären Störungen, die wir zulassen, nicht mehr sinnvoll definiert oder unendlich ist. Als Spezialfall ist mit unseren Sätzen zum Beispiel der Vergleich von Dirichlet–Laplaceoperatoren auf verschiedenen Mengen möglich. Wir haben nun schon des öfteren von "kleinen" Mengen gesprochen, ohne jedoch dem Leser zu verraten, was darunter zu verstehen ist. Dies ist in der Tat die eigentliche Frage: Was ist ein geeignetes Maß für den Träger von $\mu - \nu$, mit dem man Spurklasse–Abschätzungen erhält? Die offensichtliche Antwort ist: Es kommt darauf an. So stellt sich heraus (siehe 5.3 und 5.4), daß die Kapazität sehr gut kontrollierte Abschätzungen für die Hilbert–Schmidt–Norm der Halbgruppendifferenz liefert. Um zu zeigen, daß die Differenz der Halbgruppen Spurklasse ist, benötigen wir ein etwas komplizierteres "Maß" für den Träger, welches aber ähnlich der Kapazität aus den Wahrscheinlichkeiten berechnet wird, mit denen die Pfade des zu H gehörigen Prozesses diese Menge treffen. Inwieweit diese Resultate optimal sind, ist nicht klar: Bei trivialen diskreten Beispielen ist die Optimalität klar, beim interessanten Beispiel des Laplaceoperators nicht. In letzterem Fall kann man jedoch durch Beispiele zeigen, daß nicht jeder Träger endlicher

Kapazität zu Spurklassestörungen führt. Es soll noch einmal betont werden, daß die Differenz der Maße durchaus unendlich sein kann. In diesem Sinne ergänzen unsere Resultate die traditionelleren Aussagen der Störungstheorie, für die etwa die Differenz der Potentiale als klein vorausgesetzt wird. Dieser Spielraum kann vor allem in einem Bereich genutzt werden, der in den letzten Jahrzehnten an Bedeutung gewonnen hat: dem Studium von realistischen Modellen von Festkörpern mit Hilfe stochastischer Potentiale. Die dabei auftretenden Potentiale besitzen keine definierte Asymptotik im Unendlichen, und man hat allenfalls noch qualitative geometrische Aussagen über das Potential zur Verfügung. Nach diesem kleinen Vorgriff auf Paragraph 9 sei die entscheidende Bedingung erwähnt, die wir für die Resultate aus Abschnitt 5 benötigen: Die Ultrakontraktivität der zu H gehörigen Halbgruppe. Darunter versteht man die Eigenschaft, daß $\exp(-tH)$ für alle $t > 0$ einen beschränkten Operator von L^1 nach L^∞ induziert, oder anders ausgedrückt, daß der Kern von $\exp(-tH)$ beschränkt ist. Für den Laplaceoperator auf dem $\mathbb{R}^d$ hat man viel präzisere Informationen: Man weiß, daß $\|\exp(-tH) : L^1 \to L^\infty\|$ durch $const \cdot t^{-d}$ abgeschätzt werden kann. Allgemein spricht man von einer Halbgruppe der Dimension d, falls so eine Ungleichung erfüllt ist. Die Beziehung zwischen solchen Abschätzungen der Halbgruppe zwischen verschiedenen L^p–Räumen und Differenzierbarkeitseigenschaften (im Sinne von Sobolev-Ungleichungen etc.) ist ein zentrales Thema der Analysis. Wir nutzen gewissermaßen eine Richtung davon aus: In unserem allgemeinen Kontext dienen die L^p–Eigenschaften der Halbgruppe als Äquivalent für Differenzierbarkeitseigenschaften der Funktionen im Definitionsbereich von H.

Im sechsten Abschnitt wird untersucht, wann die Differenz

$$\exp(-t(H+\mu)) - \exp(-t(H+\nu))$$

kompakt ist. Die naheliegende Vermutung, daß dies der Fall ist, wenn sich μ und ν nur auf einer Menge endlichen Maßes unterscheiden, ist zwar falsch, setzt man aber zusätzlich eine geeignete Regularität der Menge voraus, so folgt die Kompaktheit der obigen Differenz (siehe Satz 6.4). Wir stellen außerdem ein Kompaktheitskriterium in L^p–Räumen vor, welches das berühmte Kriterium von Kolmogorov für $L^p(\mathbb{R}^d)$ verallgemeinert. Wir behandeln im Zusammenhang mit der Frage nach der Invarianz des wesentlichen Spektrums auch den Fall, daß die Differenz $\mu - \nu$ bezüglich der ungestörten Form $\mathfrak{h}$ in geeignetem Sinne klein wird. Setzt man in der obigen Differenz $\nu = \infty\mathrm{cap}$, so ist $\exp(-t(H+\nu)) = 0$, und wir erhalten die Frage, wann der Operator $H + \mu$ kompakte Resolvente besitzt als Spezialfall der Frage nach der Invarianz des wesentlichen Spektrums. In diesem Zusammenhang beweisen wir eine Charakterisierung des wesentlichen Spektrums mit Hilfe spezieller singulärer Folgen und geben eine Bedingung an μ an, die äquivalent dazu ist, daß $H + \mu$ rein diskretes Spektrum besitzt. Grob gesagt ist Kompaktheit der Resolvente dann zu erwarten, wenn μ bei ∞ gegen ∞ geht. Letztere Bedingung zu präzisieren, ist in diesem Zusammenhang die Hauptschwierigkeit.

Im siebten Abschnitt stehen Schrödingeroperatoren im Mittelpunkt. Dabei ist der Weg über die allgemeineren Dirichletformen, wie bereits bemerkt, keineswegs ein Umweg, sondern eher eine Abkürzung. Um die Lektüre der Arbeit für solche Leser zu erleichtern, die hauptsächlich an Schrödingeroperatoren interessiert sind, rekapitulieren wir in diesem Abschnitt einige Ergebnisse der vorherigen Paragraphen. Für Schrödingeroperatoren im $\mathbb{R}^d$ haben wir außerdem Hilfsmittel zur Hand, die in der allgemeinen Situation fehlen: Kenntnisse über den zu $-\frac{1}{2}\Delta$ gehörigen Prozeß (die Brownsche Bewegung) liefern leicht handhabbare Abschätzungen für die Treffwahrscheinlichkeiten, die in Abschnitt 5 als Maß für die Größe einer Menge ausschlaggebend waren. Mit Hilfe der Zerlegung des $\mathbb{R}^d$ in Würfel lassen sich Aussagen über Normresolventenkonvergenz und als Anwendung Aussagen über Kompaktheit von Resolventendifferenzen beweisen. So möchten wir besonders den "lokalen Test" Satz 7.5 herausheben, ein Ergebnis, das hier wohl das erste Mal die angemessene Beachtung erfährt. Ebenso wichtig ist in diesem Abschnitt das einzige nicht (völlig) triviale Beispiel der Arbeit in 7.4. Dieses Beispiel grenzt insbesondere die Sätze 5.3 und 5.6 im Falle der klassischen Dirichletform voneinander ab.

Der achte Abschnitt ist der Frage gewidmet, inwiefern H_G stetig vom Gebiet G abhängt. Die Antwort hängt natürlich davon ab, welche Topologie man für die Operatoren H_G verwendet: Die Folge H_{G_n} konvergiert im starken Resolventensinn, wenn der Limes Superior und der Limes Inferior der Folge (G_n) in geeignetem Sinn übereinstimmen. Das ist der Inhalt von Satz 8.1. Die Stetigkeit im Normresolventensinn erhalten wir für solche Folgen, deren symmetrische Differenzen zusätzlich in der Kapazität beschränkt bleiben; siehe 8.3. Für Schrödingeroperatoren kann man mit Hilfe des "lokalen Tests" ein schönes Kriterium mit Kapazitäten, Satz 8.4, herleiten.

In Abschnitt 9 stellen wir Aussagen über Schrödingeroperatoren mit Barrieren vor. Dabei geht es um geometrische Bedingungen an die Barrieren, mit denen man absolutstetiges Spektrum ausschließen kann. Grob gesagt verhindern genügend hohe und breite Barrieren die Existenz von Streuzuständen. Die Kriterien im Falle "breiter Barrieren" lassen sich dabei zu einem Vergleichskriterium für das Spektrum von Schrödingeroperatoren erweitern, siehe 9.2. Die Motivation für die Behandlung solcher Fragen liegt im Studium zufälliger Potentiale, die als Modelle für Festkörper große Bedeutung erlangt haben. Die Ergebnisse, die wir im neunten Paragraphen angeben, konnten zwar (außer in einer Dimension) noch nicht auf solche Modelle angewandt werden, stellen aber doch einen Schritt in diese Richtung dar, indem sie Mechanismen identifizieren, die singuläres Spektrum hervorrufen.

Der zehnte Abschnitt beschäftigt sich mit Operatoren in Divergenzform. Wir gehen der Frage nach, wie man den Hauptteil stören kann, ohne das wesentliche Spektrum zu verändern. Dabei benutzen wir unter anderem die im vierten Abschnitt vorgestellten Faktorisierungstricks. Da symmetrische Operatoren Dirichletformen erzeugen, kann man für sie die Aussagen aus den Abschnitten 5 und 6 verwenden. Will man jedoch den Hauptteil wesentlich (nicht nur auf kleinen Mengen) variieren, so benötigt man neue Hilfsmittel, da ein Äquivalent zur Feynman–Kac–Formel fehlt.

In einem Anhang haben wir einige Begriffe und Aussagen gesammelt, die wir im Text oft benutzt haben. So findet man dort die Definition von Dirichletformen, Kapazität und einige grundlegende Eigenschaften. Wir hoffen, unseren Lesern damit einige Wege zum Bücherregal erspart zu haben, obwohl wir natürlich in diesen Anhang keine Beweise aufgenommen haben.

Eine vollständige Liste all derer aufzustellen, die mich durch hilfreiche Bemerkungen und interessante Diskussionen bei der Erstellung dieser Arbeit unterstützt haben, ist schwer. Erwähnen will ich W. Boenkost, H. Brasche, J. vanCasteren, A. Defant, P. Duclos, B. Helffer, R. Hempel, W. Kirsch, K. Kuwae, R. Lang, I. McGillivray, E. Mourre, E.M. Ouhabaz, M. Stollmann, T. Sturm, J. Weidmann. Ein besonders herzliches Dankeschön geht an M. Demuth, G. Stolz und J. Voigt, die während der Zusammenarbeit an verschiedenen Projekten nicht nur meinen mathematischen Horizont erweitert haben. Schließlich möchte ich diese Arbeit meinen Eltern Alfred und Margret Stollmann widmen.

1. Störungen durch Potentiale, Dirichlet–Randbedingungen und allgemeinere positive Maße

Zusammenfassung: Für Maße $\mu \geq 0$, die bezüglich der Kapazität absolutstetig sind, wird $H + \mu$, der Quasiträger $q - \operatorname{supp}(\mu)$ und die Endlichkeitsmenge E_μ eingeführt.

In der Quantenmechanik beschreibt man Modelle mit äußeren Kräften durch Operatoren der Form $-\Delta + V$ oder $-\Delta_G$, wobei letzteres den Laplaceoperator in der offenen Menge $G \subset \mathbb{R}^d$ mit Dirichlet–Randbedingung bezeichnet. Während $-\Delta + V$ meist als Störung von $-\Delta$ aufgefaßt wird, ist diese Betrachtungsweise für $-\Delta_G$ eher unüblich. Ein Grund dafür ist sicher die Tatsache, daß die beiden Operatoren in verschiedenen Hilberträumen definiert sind. Es ist jedoch oft von Vorteil, sich $-\Delta_G$ als $-\Delta + V$ mit "$V = \infty$ auf G^c vorzustellen. Diese Vorstellung soll nun mit Hilfe der Klasse $\mathcal{M}_0$ realisiert werden.

Dabei arbeiten wir im allgemeineren Rahmen regulärer Dirichletformen. Genauer

1.1. Sei E ein lokalkompakter Hausdorffraum, $\mathfrak{B}$ seine Borel-σ-Algebra, und m ein Radonmaß auf E, dessen Träger E ist. In $L^2(E)$ sei mit H ein selbstadjungierter Operator gegeben, dessen zugehörige Form $\mathfrak{h}$ eine reguläre Dirichletform mit Definitionsbereich D ist (siehe A3).

Für unser Standardbeispiel $H = -\Delta$ in $\mathbb{R}^d$ ist $D = W^{1,2} = W^{1,2}(\mathbb{R}^d)$.

Wir wollen im folgenden eine Klasse $\mathcal{M}_0$ von Maßen einführen, für die man $\mathfrak{h} + \mu$ und damit $H + \mu$ (als selbstadjungierten Operator in einem Teilraum von L^2) definieren kann und die Potentiale und Dirichlet–Randbedingungen umfaßt. Deshalb erinnern wir zunächst daran, wie man für positive meßbare Potentiale $V : E \to [0, \infty]$ den Operator $H + V$ erhält:

$$D(\mathfrak{h} + V) := \{f \in D; V^{1/2} f \in L_2\}, (\mathfrak{h} + V)[f, g] := \mathfrak{h}[f, g] + \int f \overline{g} V \, dm$$

definiert eine abgeschlossene (nicht notwendig dicht definierte) Form; mit $H + V$ bezeichnen wir den zugehörigen selbstadjungierten Operator in $\overline{D(\mathfrak{h} + V)}$. (Eine Charakterisierung derjenigen V, für die dieser Abschluß mit $L_2(E)$ übereinstimmt, wurde in [66] gegeben; entsprechende Aussagen für Maße (aus [81, 48]) werden wir in Kürze vorstellen.) In Analogie zur Definition des Dirichlet–Laplaceoperators setzen wir für $G \subset \mathbb{R}^d$ offen:

$$D_0(G) := \overline{D \cap C_c(G)}^D, \mathfrak{h}_G := \mathfrak{h} | D_0(G).$$

Offenbar ist $\mathfrak{h}_G$ eine abgeschlossene Form im Hilbertraum $\overline{D_0(G)}^{L^2}$, deren zugehörigen Operator wir mit H_G bezeichnen. Den Hilbertraum, in dem H_G lebt, bestimmen wir in der folgenden Bemerkung:

1.2. Bemerkung. $\overline{D_0(G)}^{C_b(E)} = C_0(G)$, $\overline{D_0(G)}^{L_2} = L_2(G)$.

Beweis: Um die erste Gleichung zu beweisen, genügt es, $f \in C_c(G)_+$ gleichmäßig durch Funktionen in $D \cap C_c(G)$ zu approximieren. Da $\mathfrak{h}$ regulär ist, gibt es $\phi_n \in D \cap C_c(E)_+$ mit $\|f - \phi_n\|_\infty =: \eta_n \to 0$. Da $\mathfrak{h}$ eine Dirichletform ist, ist $(\phi_n - \eta_n)^+ =: f_n \in D \cap C_c(G)_+$, denn

$$\{f_n > 0\} \subset \{\phi_n > \eta_n\} \subset \{f > 0\},$$

also $\text{supp} f_n \subset \text{supp} f \subset G$. Da $\|f - f_n\|_\infty \leq \|f - \phi_n\|_\infty + \|f_n - \phi_n\|_\infty \leq \eta_n$, folgt die gewünschte gleichmäßige Konvergenz und damit das erste "="–Zeichen. Mit dem Satz von der majorisierten Konvergenz folgt aber auch die Konvergenz von f_n gegen f in L_2 und damit die zweite Behauptung. $\square$

Das bedeutet, daß jede reguläre Dirichletform bereits "very regular" im Sinne der Def. 10.1 aus [44] ist.

1.3. Definition. Es sei

$$\mathcal{M}_0 := \{\mu : \mathfrak{B} \to [0, \infty]; \mu \quad \sigma - \text{ additiv }, \mu << \text{cap}\},$$

wobei $\mu << \text{cap}$ bedeutet, daß für $N \in \mathfrak{B}$ mit $\text{cap}(N) = 0$ auch $\mu(N) = 0$ sein muß.

1.4. Beispiele. (1) Ist $V \geq 0$ meßbar, so ist $V dm \in \mathcal{M}_0$.

(2) Für $B \subset E$ setze $\infty_B(A) := \infty \cdot \text{cap}(A \cap B)$ für $A \in \mathfrak{B}$ mit der Konvention $\infty \cdot 0 = 0$. Dann ist $\infty_B \in \mathcal{M}_0$.

(3) Für die klassische Dirichletform $\mathfrak{h}$ in $\mathbb{R}^d$ ist das Punktmaß δ nur für $d = 1$ in $\mathcal{M}_0$.

Für die klassische Dirichletform wurde $\mathcal{M}_0$ von Baxter, DalMaso und Mosco in [5] und von Sturm in [81] studiert. In [48] findet man den Zusammenhang zu additiven Funktionalen, der in [81] für die klassische Dirichletform hergeleitet wurde, und den wir im Abschnitt 3 kurz skizzieren werden. Für allgemeine Dirichletformen sind in [73, 68, 75] einige grundlegende Beobachtungen festgehalten, so zum Beispiel die Tatsache, daß man für $\mu \in \mathcal{M}_0$ die Summe $\mathfrak{h} + \mu$ als abgeschlossene Form definieren kann. Dazu erinnern wir an den quasi–stetigen Repräsentanten $\tilde{f}$ von Elementen in D, siehe A4.

1.5. Satz. *Setze*

$$D(\mathfrak{h} + \mu) := \{f \in D; \tilde{f} \in L_2(E, \mu)\}, (\mathfrak{h} + \mu)[f, g] := \mathfrak{h}[f, g] + \int \tilde{f}\tilde{\overline{g}} d\mu.$$

Dann ist $\mathfrak{h} + \mu$ *abgeschlossen.*

Wir bemerken, daß die entsprechende Stelle bei [2] inkorrekt ist. Den zu $\mathfrak{h} + \mu$ gehörigen selbstadjungierten Operator in $\overline{D(\mathfrak{h} + \mu)}^{L_2}$ bezeichnen wir mit $H + \mu$.

1.6. Bemerkung. Für $B \subset E, G := B^c$ gilt

$$D(\mathfrak{h} + \infty_B) = \{f \in D; \tilde{f} \text{ q.ü. auf } B\}.$$

Ist B abgeschlossen, so folgt

$$\mathfrak{h} + \infty_B = \mathfrak{h}_G, H + \infty_B = H_G.$$

Zum Beweis verwendet man, daß für abgeschlossenes $B \subset E$

$$\{f \in D; \tilde{f} = 0 \text{ q.ü. auf } B\} = D_0(G)$$

ist; siehe [34]. Wir verwenden ab sofort die Notation $D_0(G)$, H_G für beliebige Mengen G und verstehen darunter $D(\mathfrak{h} + \infty_{G^c})$ beziehungsweise $H + \infty_{B^c}$. Da offenbar $\mathfrak{h} + Vm = \mathfrak{h} + V$, können wir also Potentiale und Randbedingungen durch Maße in $\mathcal{M}_0$ beschreiben. Nun wollen wir $D(\mathfrak{h}+\mu)$ und insbesondere $\overline{D(\mathfrak{h}+\mu)}^D, \overline{D(\mathfrak{h}+\mu)}^{L_2}$ genauer untersuchen. Für die klassische Dirichletform wurde dies in [81] mit probabilistischen Mitteln durchgeführt, während wir hier einen Ansatz aus [69] verwenden, der von einer Charakterisierung der Ordnungsideale in D ausgeht. Unabhängig von [69] wurde später in [48] mit zum Teil sehr ähnlichen Argumenten eine Verallgemeinerung der Ergebnisse aus [81] erzielt.

Ein Teilraum $I \subset D$ heißt *Ideal* (genauer sollte man vielleicht Ordnungsideal sagen), falls $f \in D, g \in I$ und $|f| \leq g$ schon $f \in I$ impliziert. Als typische Beispiele könnte man im Fall der klassischen Dirichletform mit $D = W^{1,2}$ die Ideale $W_0^{1,2}(U)$, U offen oder auch

$$I = \{f \in W^{1,2}; f = 0 \text{ f.ü. auf } U^c\}$$

erwähnen. Unter schwachen Regularitätsbedingungen stimmt letzteres Ideal mit $W_0^{1,2}(U)$ überein. Es gibt jedoch Beispiele, wo dies nicht der Fall ist. Dies steht nur scheinbar im Widerspruch zum folgenden Satz aus [69]:

1.7. Satz. *Ist I ein abgeschlossenes Ideal in D, so gibt es eine quasi–offene Menge $G \subset E$ mit $I = D_0(G)$.*

Dabei heißt G *quasi–offen*, wenn es eine quasi–stetige Funktion f gibt mit $G = \{f > 0\}$.

Für $\mu \in \mathcal{M}_0$ ist $D(\mathfrak{h} + \mu)$ ein Ideal, dessen Abschluß damit auch die Idealeigenschaft besitzt:

1.8. Bemerkung. Mit $I \subset D$ ist auch $\overline{I}^D$ ein Ideal in D.

Beweis.
Sei $f \in D$ reell und $g \in \overline{I}$ mit $|f| \leq g$. Es ist $f \in \overline{I}$ zu zeigen. Da der schwache und der Norm–Abschluß von I übereinstimmen, genügt es, eine Folge f_n in I mit schwachem Häufungspunkt f zu finden. Dazu wähle $g_n \in I$ mit $g_n \to g$. O.E konvergieren die g_n q.ü. gegen g, siehe A4. Dann erfüllt

$$f_n := -g_n \vee f \wedge g_n$$

die gewünschten Bedingungen: Wegen der in A3 genannten Eigenschaften ist $\sup_n \mathfrak{h}[f_n] < \infty$, woraus mit relativer schwacher Kompaktheit beschränkter Mengen folgt, daß die f_n einen schwachen Häufungspunkt besitzen. Die Konvergenz q.ü. zeigt, daß dieser gerade f ist. $\square$

Es existiert also eine quasi–offene Menge E_μ so, daß

$$\overline{D(\mathfrak{h}+\mu)}^D = D_0(E_\mu), \overline{D(\mathfrak{h}+\mu)}^{L^2} = L^2(E_\mu).$$

Wir nennen E_μ die *Menge der Endlichkeitspunkte* von μ. Ein Ergebnis aus [68] kann man damit folgendermaßen darstellen: Für die Klasse $\mathcal{S}$ der *glatten Maße* gilt

$$\mu \in \mathcal{S} \iff \mathrm{cap}(E_\mu^c) = 0.$$

Dabei heißt μ glatt, falls es eine aufsteigende Folge F_n abgeschlossener Teilmengen von E gibt, für die $\mu(F_n) < \infty$ ist, und die E im folgenden Sinne ausschöpfen: Für jedes Kompaktum K gilt $\mathrm{cap}(K \setminus F_n) \to 0$ für $n \to \infty$.

Aus den Eigenschaften der Endlichkeitsmenge folgt sofort, daß $\mathfrak{h} + \mu$ genau dann dicht definiert ist, wenn E_μ^c eine m–Nullmenge ist. Auch den *quasi–Träger* $q-\mathrm{supp}(\mu)$ eines Maßes $\mu \in \mathcal{M}_0$ kann man mit Hilfe von 1.7 einführen. Offenbar ist

$$D(\mathfrak{h} + \infty\mu) = \{f \in D; \tilde{f} = 0 \quad \mu \text{ f.ü.}\}$$

ein abgeschlossenes Ideal. Es gibt also eine quasi–abgeschlossene Menge $q - \mathrm{supp}(\mu)$ mit

$$D(\mathfrak{h} + \infty\mu) = D_0(q - \mathrm{supp}(\mu)^c).$$

Der quasi–Träger ist die kleinste quasi–abgeschlossene Menge, auf der μ lebt. (Dabei ist als Ordnung die Inklusion der entsprechenden Ideale zu wählen.) Die Existenz eines solchen Trägers ist nicht von vorneherein klar, wurde aber in sehr allgemeinem Kontext in [33] gezeigt. In Unkenntnis dieser Arbeit wurde in [35] der quasi–Träger für glatte Maße und in [72] für Maße in $\mathcal{M}_0$ eingeführt. Der nicht–symmetrische Fall wird in [30] behandelt. Den Hinweis auf [33] verdanke ich Prof. K. Kuwae, dem ich an dieser Stelle recht herzlich dafür danken möchte. Als weitere Anwendung von 1.7 wollen wir nun ein Resultat vorstellen, zu dessen Formulierung wir auf 2.1 vorgreifen. Wir verwenden dabei die Schreibweise

$$\mu \sim \nu :\iff \mathfrak{h} + \mu = \mathfrak{h} + \nu,$$

und die Klasse

$$\mathcal{S}_0 := \{\mu \in \mathcal{M}_0; \exists c \quad \forall f \in D: \quad \int \tilde{f} d\mu \leq c \cdot \|f\|_{\mathfrak{h}}\}$$

der *Maße endlicher Energie.*

1.9. Satz. *Sei $\mu \in \mathcal{M}_0$. Dann existiert eine meßbare Funktion $q : E \to [0, \infty]$ und ein Maß $\nu \in \mathcal{S}_K$ so, daß*

$$\mu \sim q\nu.$$

Dieser Satz war das eigentliche Ziel der Arbeit [69] in ihrer ursprünglichen Fassung (siehe [70]). Für die klassische Dirichletform auf $\mathbb{R}^d$ wurde er von Baxter, DalMaso und Mosco in [5] und von Sturm in [81] gezeigt. Unabhängig von [69, 70] hat Kuwae die obige Version gefunden, die wiederum von Fitzsimmons und Getoor in [30] auf den nicht–symmetrischen Fall ausgeweitet wurde. In [75] spielte 1.9 eine wichtige Rolle beim Beweis der Analytizität der zu $\mathfrak{h} + \mu$ gehörigen Halbgruppe auf L_1. Nun soll noch illustriert werden, daß $\mathcal{M}_0$ die richtige Klasse von Maßen ist, um $\mathfrak{h} + \mu$ mit Hilfe von Formen zu definieren. Dazu erinnern wir daran, daß ein Radon–Maß auf E ein von innen reguläres Maß ist, welches kompakten Mengen endliche Werte zuordnet. Ist ν ein Radon–Maß, so gibt es eine Zerlegung $\nu = \nu_r + \nu_s$, wobei ν_r ein Radon–Maß in $\mathcal{M}_0$ und ν_s disjunkt zu $\mathcal{M}_0$ ist. Letzteres bedeutet, daß jedes Radon–Maß ρ mit der Eigenschaft $0 \leq \rho \leq \nu_s$ Null ist. Um dies einzusehen, kann man etwa den Beweis des Lebesgueschen Zerlegungssatzes in [3], Satz 17.13 mit $\mu = \text{cap}$ durchführen. Siehe auch [36], Lemma 2.1

In [60] hat Simon gezeigt, daß sich halbbeschränkte Formen $\mathfrak{t}$ so in einen regulären Teil $\mathfrak{t}_r$ und einen singulären Teil $\mathfrak{t}_s$ zerlegen lassen, daß $\mathfrak{t}_r$ die größte abschließbare Form ist, die von $\mathfrak{t}$ majorisiert wird. Simon betonte die Analogie seines Beweises zu dem des Lebesgueschen Zerlegungssatzes. Diese Analogie spiegelt sich in folgendem Satz wider:

1.10. Satz. *Sei μ ein Radon–Maß und $(\mathfrak{h} + \mu)[f, g] := \mathfrak{h}[f, g] + \int_E f\overline{g}d\mu$ für $f, g \in D \cap C_c(E)$. Dann gilt*

$$\overline{(\mathfrak{h} + \mu|D \cap C_c(E))_r} = \overline{(\mathfrak{h} + \mu_r|D \cap C_c(E))} = \mathfrak{h} + \mu_r.$$

2. Störungen durch negative Potentiale – die Katobedingung

Zusammenfassung: Definition von $H+\mu$ für Maße $\mu = \mu^+ - \mu^-$, wobei $\mu^+ \in \mathcal{M}_0$ und μ^- einer *Katobedingung* genügt. Studium der L^p–Eigenschaften der zugehörigen Halbgruppe.

Will man für negative Potentiale $V \in L^1_{loc}$ den Schrödingeroperator $-\frac{1}{2}\Delta + V$ definieren, so bietet sich die Formmethode an. Formbeschränktheit von V mit Schranke kleiner 1 erweist sich als die geeignete Bedingung an V. Oft ist man aber an weitergehenden Eigenschaften von $-\frac{1}{2}\Delta + V$ interessiert: Existenz und Abschätzungen für Kerne von Resolventen, Halbgruppe und ähnliches. Spätestens seit dem Übersichtsartikel [63] hat sich die *Katoklasse* als geeignete Klasse von Potentialen etabliert:

$$K_d := \{q \in L^1_{loc}; \operatorname{ess\,sup}_x \int_{|x-y|\le 1} |g_d(x-y)q(y)|dy < \infty, \lim_{r\to 0}(\operatorname{ess\,sup} \int_{|x-y|\le r} |...|dy = 0)\},$$

wobei g_d die Fundamentallösung von $\frac{1}{2}\Delta$ bezeichnet. In [63] findet man eine eindrucksvolle Sammlung von Resultaten unter der Bedingung $V \in K_d$, sowie Indizien dafür, daß letztere Bedingung annähernd optimal ist, wenn man an L^p–Eigenschaften der Halbgruppe interessiert ist. Die zweite Bedingung in der Definition von K_d wurde in [86] von Voigt abgeschwächt: Viele Aussagen gelten für Potentiale mit der Eigenschaft

$$c(V) := \lim_{r\to 0}(\operatorname{ess\,sup}_x \int_{|x-y|\le r} |g_d(x-y)V(y)|dy) < 1.$$

Letztere Bedingung impliziert nämlich, daß $\frac{1}{2}\Delta + V$ Erzeuger einer stark stetigen Halbgruppe auf L^1 ist. Genauer gilt, mit $U_1(t) := \exp(\frac{1}{2}\Delta t)$ in L^1:

$$c(V) < 1$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\lim_{a\to 0+} \|V\int_0^a U_1(t)dt\|_{1,1} = \lim_{a\to\infty} \|V(a-\tfrac{1}{2}\Delta)^{-1}\|_{1,1} < 1$$

$$\Longrightarrow$$

$$\tfrac{1}{2}\Delta + V \text{ erzeugt stark stetige Halbgruppe auf } L^1.$$

Benutzt man nun

$$\|V(a-\tfrac{1}{2}\Delta)^{-1}\|_{1,1} = \sup\{|\int[(-\tfrac{1}{2}\Delta + a)^{-1}f]V dx|; f \in C_{c,+}, \|f\| \le 1\},$$

so wird die folgende Definition (die wir [75] entnommen haben) für Dirichletformen (wir setzen die Situation aus 1.1 voraus) und Maße in $\mathcal{M}_0$ transparent: In der letzten Bedingung ersetzt man $-\frac{1}{2}\Delta$ durch H und $V dx$ durch μ.

2.1. Definition. Die Menge

$$\hat{\mathcal{S}}_K := \{\mu \in \mathcal{M}_0; \exists a > 0 : \sup\{\int_E (\widetilde{(H+a)^{-1}f})d\mu; f \in C_c(E)_+, \|f\|_1 \le 1\} < \infty\}$$

heißt *erweiterte Katoklasse*; für $\mu \in \hat{\mathcal{S}}_K$ schreiben wir $k(\mu, a)$ für das Supremum in der Definition von $\hat{\mathcal{S}}_K$ und $k(\mu) := \inf_a k(\mu, a) = \lim_{a\to\infty} k(\mu, a)$.

$$\mathcal{S}_K := \{\mu \in \hat{\mathcal{S}}_K; k(\mu) = 0\}$$

heißt *Katoklasse.*

Die Katobedingung für Maße wurde von zahlreichen Autoren in unterschiedlicher Allgemeinheit untersucht: In [2] wird das Analogon von $\mathcal{S}_K$ probabilistisch eingeführt; dort wird unter anderem eine etwas schwächere Aussage als (1) des folgenden Satzes bewiesen ([2], Proposition 3.1). In diesem Zusammenhang fällt auf, daß der eigentliche Vorteil der Erweiterung von $\mathcal{S}_K$ zu $\hat{\mathcal{S}}_K$ in der Betonung der *Katokonstanten* $k(\mu, \cdot)$ liegt, die, wie wir sehen werden, in Abschätzungen immer wieder auftauchen. Für den Spezialfall des Laplaceoperators wurde in [6] die Katoklasse mit Hilfe der Fundamentallösung definiert und mit GK_d bezeichnet. Dieser Fall ist auch in den Untersuchungen von Sturm [79, 80, 82] enthalten, der von einem Huntprozeß als "ungestörtem Objekt" ausgeht. Während die Katobedingung in vielerlei Hinsicht für Störungen mit festem Vorzeichen optimal ist, findet man in [80, 82] eine interessante Abschwächung der Katobedingung, die Kompatibilitätsbedingung, bei der der gegenseitigen Auslöschung (zum Beispiel bei stark oszillierenden Potentialen) Rechnung getragen wird.

Erste wichtige Konsequenzen der Katobedingung notieren wir in

2.2. Satz. *Sei $a > 0, \gamma < 1$ und $\mu \in \hat{\mathcal{S}}_K$ mit $k(\mu, a) < \gamma$. Dann gilt:*

(1) *$\int |\tilde{f}|^2 d\mu \le \gamma \mathfrak{h}[f] + a\|f\|^2$ für alle $f \in D$. Insbesondere definiert $\mathfrak{h} - \mu$ eine abgeschlossene Form mit Definitionsbereich D, deren zugehörigen Operator wir mit $H + \mu$ bezeichnen.*

(2) *Für alle $p \in [1, \infty]$ induziert $\exp(-(H - \mu)t)$ einen beschränkten Operator auf $L^p(E)$, den wir mit $U_p(t)$ bezeichnen.*

(3) *$(U_p(t); t \ge 0)$ ist eine stark stetige Halbgruppe, und es gibt Konstanten $M \ge 0, \omega \in \mathbb{R}$, die nur von a, γ abhängen, und für die gilt:*

$$\|U_p(t)\| \le Me^{\omega t} (t \ge 0, p \in [1, \infty)).$$

Für den Beweis siehe [75]. Ist $k(\mu) < \gamma$, so sind die Bedingungen aus diesem Satz für geeignetes a erfüllt. Insbesondere erhält man aus (1):

$$\mu \in \hat{\mathcal{S}}_K \Longrightarrow \mu \text{ ist } k(\mu)\text{–formbeschränkt bezüglich } \mathfrak{h}.$$

Wir setzen nun, für $a > 0, \gamma < 1$

$$\hat{\mathcal{S}}_K(a, \gamma) := \{\mu \in \hat{\mathcal{S}}_K; k(\mu, a) < \gamma\}.$$

Bereits in Satz 2.2 haben wir gesehen, daß die Maße in dieser Menge gleichmäßig relativ beschränkt sind bezüglich $\mathfrak{h}$. Auch bei den folgenden Aussagen über die Halbgruppe werden wir Abschätzungen erhalten, die gleichmäßig auf Mengen der Form $\hat{\mathcal{S}}_K(a, \gamma)$ gelten. Wir wollen nun Positiv- und Negativteile addieren und erinnern dazu an die Endlichkeitsmenge E_μ aus dem letzten Abschnitt.

2.3. Satz. *Sei $\mu^+ \in \mathcal{M}_0$, $\mu^- \in \hat{\mathcal{S}}_K$, $k(\mu^-) < 1$. Dann definiert $\mathfrak{h} + \mu := (\mathfrak{h} + \mu^+) + \mu^-$ eine abgeschlossene Form mit Definitionsbereich $D(\mathfrak{h} + \mu^+)$. Der zugehörige selbstadjungierte Operator $H + \mu$ in $L^2(E_{\mu^+})$ induziert für $p \in [1, \infty)$ Halbgruppen auf $L^p(E)$, welche auf $L^p(E_{\mu^+})$ stark stetig sind.*

Für den Beweis siehe [75]. Die ursprünglich nur auf $L^p(E_{\mu^+})$ gegebenen Halbgruppen setzen wir durch Null auf $L^p(E)$ fort. Das führt zu einer Halbgruppe, die für positive Zeiten stark stetig ist, aber für $t \to 0$ gegen die Projektion auf den Teilraum $L^p(E_{\mu^+})$ konvergiert. Wir schreiben meistens $\exp(-(H + \mu)t$ für $U_p(t)$. Für unsere späteren Betrachtungen wird der folgende Approximationssatz, der auch beim Beweis von Satz 2.2 verwendet wurde, eine zentrale Rolle spielen. Wir führen dazu eine Notation ein, die sich fast von selbst erklärt: Wir schreiben $\mu \in \mathcal{M}_0 - \hat{\mathcal{S}}_K(a, \gamma)$ wenn es $\mu^+ \in \mathcal{M}_0$ und $\mu^- \in \hat{\mathcal{S}}_K(a, \gamma)$ gibt mit $\mu = \mu^+ + \mu^-$.

2.4. Satz. *Sei $a > 0, \gamma < 1$ und $\mu \in \hat{\mathcal{S}}_K(a, \gamma)$. Dann existiert eine Folge (V_n) in $L^2 \cap L^\infty$ mit*

(i) $k(V_n^-, a) \leq \gamma \qquad (n \in \mathbb{N})$.

(ii) $H - V_n \xrightarrow{srs} H - \mu$.

(iii) $\exp(-(H + V_n))t \xrightarrow{s} \exp(-(H + \mu)t)$ *für* $t > 0$.

Die Folge (V_n) kann so gewählt werden, daß für $\rho \in \mathcal{M}_0$ auch $\exp(-(H + V_n + \rho))t \xrightarrow{s} \exp(-(H + \mu + \rho)t)$ *für* $t > 0$

Beweis:
Nach Satz 1.9 können wir $\mu^+ = q^+ \cdot \nu^+$ und $\mu^- = q^- \cdot \nu^-$ annehmen, mit $\nu^+, \nu^- \in \mathcal{S}_K \cap \mathcal{S}_0$. Mit monotoner Formkonvergenz (A2) folgt, für $\mu_n^1 := (q^+ \wedge n)\nu^+ - q^- \nu^-$, daß $H + \mu_n^1 \xrightarrow{srs} H + \mu$ und $H + \mu_n^1 + \rho \xrightarrow{srs} H + \mu + \rho$. Ist $n \in \mathbb{N}$ fest, so erhält man für $\mu_k^n := (q^+ \wedge n)\nu^+ - (q^- \wedge k)\nu^-$ wieder mit monotoner Formkonvergenz:

$$H + \mu_k^n + \rho \xrightarrow{srs} H + \mu_n^1 + \rho \text{ für } k \to \infty.$$

Dabei ist offenbar $k((\mu_k^n)^-, a) \leq \gamma$. Setze nun $\nu := (q^- \wedge k)\nu^+ \in \mathcal{S}_K \cap \mathcal{S}_0$. Dann gibt es gemäß [75], Beweis von Theorem 2.1, eine Folge (V_n^-) in $L^2 \cap L^\infty$ so, daß die gewünschte Ungleichung für die Katokonstanten besteht, und für $u \in B_\mathfrak{h} := \{v \in D; (\mathfrak{h} + 1)[v] \leq 1\}$ die folgende gleichmäßige Konvergenz gilt:

$$\sup_{v \in B} \left(\int V_n^- u(x) v(x) dm(x) - \int \tilde{u}(x) \tilde{v}(x) d\nu(x) \right) \to 0 \text{ für } n \to \infty \qquad (\heartsuit)$$

Aus dieser gleichmäßigen Konvergenz folgt nach A1 die starke Resolventenkonvergenz

$$H + (q^+ \wedge l)\nu^+ - V_n^- \xrightarrow{srs} H + (q^+ \wedge l)\nu^+ - \nu \text{ für } n \to \infty.$$

Da für $\rho \in \mathcal{M}_0$ die Einheitskugel $B_{\mathfrak{h}+\rho} \subset B_\mathfrak{h}$ erfüllt, folgt auch die entsprechende Konvergenz mit ρ aus ($\heartsuit$). Analog kann man die Positivteile approximieren. Damit haben wir gezeigt, daß man in mehreren Schritten μ als Häufungspunkt geeigneter Potentiale erhält. Da die starke

Operatortopologie auf beschränkten Mengen metrisierbar ist (man muß die Konvergenz nur auf einer abzählbaren dichten Teilmenge des separablen Raums $L^2(E)$ nachprüfen), finden wir eine Folge (V_n) mit den gewünschten Eigenschaften. Dabei folgt die Konvergenz der Halbgruppen aus der der Resolventen mit Standardargumenten. $\square$

Die wesentlichen Ideen zum letzten Beweis haben wir der Arbeit [75] entnommen, wo der Satz für negative Maße und ohne das zusätzliche ρ als Theorem 2.1 zu finden ist. Deshalb haben wir die Argumente bewußt etwas knapp dargestellt.

Eine Halbgruppe $U = (U(t); t \geq 0)$ selbstadjungierter Operatoren auf $L^2(E)$ heißt *ultrakontraktiv* , falls $U(t) : L^2 \to L^\infty$ für $t > 0$ beschränkt ist. Mit dem Interpolationssatz von Riesz–Thorin (siehe A5) und Dualität sieht man, daß $U(t)$ dann für $t > 0$ und $1 \leq p \leq q \leq \infty$ einen stetigen Operator von L^p nach L^q induziert. Eine spezielle Klasse ultrakontraktiver Halbgruppen sind die von *endlicher lokaler Dimension*: Gilt

$$\|U(t) : L^2 \longrightarrow L^\infty\| \leq const \cdot t^{-\frac{d}{4}} \qquad (0 < t < 1),$$

so sagt man U besitzt *lokale Dimension* d. Obwohl d keineswegs eindeutig ist, schreiben wir $\dim_{loc} U = d$. Der nächste Satz besagt nun, daß sich bei Störungen durch Maße, deren Negativteil eine Katobedingung erfüllt, die Ultrakontraktivität auf die gestörte Halbgruppe überträgt und gegebenenfalls auch die lokale Dimension erhalten bleibt. Dies wird für die späteren Abschnitte von zentraler Bedeutung sein, weil wir für unsere Faktorisierungstechnik die Ultrakontraktivität benötigen. Für Halbgruppen mit endlicher lokaler Dimension kann man L^p–Eigenschaften der zugehörigen Resolventenpotenzen folgern, siehe 2.8.

2.5. Satz. *Sei* $\mu^+ \in \mathcal{M}_0$ *und* $\mu^- \in \hat{\mathcal{S}}_K$ *mit* $k(\mu^-) < 1$.

(1) *Ist* $(\exp(-Ht); t \geq 0)$ *ultrakontraktiv, so ist auch* $(\exp(-(H+\mu)t); t \geq 0)$ *ultrakontraktiv.*

(2) *Ist* $\dim_{loc}(\exp(-Ht)) = d$, *so ist auch* $\dim_{loc}(\exp(-(H+\mu)t)) = d$.

Schon in Satz 2.2 haben wir gesehen, daß manche Aussagen über $H + \mu$ nur vom Verhalten von $k(\mu, \cdot)$ abhängen. Dies ist auch beim letzten Resultat der Fall. Es gilt genauer (siehe [75], Theorem 5.1)

2.6. Zusatz. (1) *Sei* $(\exp(-Ht))$ *ultrakontraktiv. Für* $a > 0, \gamma < 1$ *und* $t > 0$ *gibt es eine Konstante* $c(a, \gamma, t)$ *so, daß für alle* $\mu^+ \in \mathcal{M}_0$ *und* $\mu^- \in \hat{\mathcal{S}}_K(a, \gamma)$:

$$\|e^{-(H+\mu)t} : L^2 \longrightarrow L^\infty\| \leq c(a, \gamma, t)$$

(2) *Ist* $\dim_{loc}(\exp(-Ht)) = d$ *und* $a > 0, \gamma < 1$, *so gibt es eine Konstante* $c(a, \gamma)$ *so, daß für alle* $\mu^+ \in \mathcal{M}_0$ *und* $\mu^- \in \hat{\mathcal{S}}_K(a, \gamma)$:

$$\|e^{-(H+\mu)t} : L^2 \longrightarrow L^\infty\| \leq c(a, \gamma) t^{-\frac{d}{4}} \qquad (0 < t < 1).$$

Warum der Positivteil in den beiden letzten Resultaten keine Rolle gespielt hat, sieht man an der folgenden Monotonieeigenschaft:

2.7. Proposition. *Seien $\mu^+, \nu^+ \in \mathcal{M}_0$ und $\mu^-, \nu^- \in \hat{\mathcal{S}}_K$ mit $k(\mu^-), k(\nu^-) < 1$. Ist $\mu^+ \geq \nu^+$ und $\mu^- \leq \nu^-$, so folgt, für alle $t \geq 0$ und $0 \leq f \in L^p$:*

$$0 \leq e^{-(H+\mu)t} f \leq e^{-(H+\nu)t} f \qquad f.ü.$$

Für die Aussage der Proposition hätte als Voraussetzung, gemäß [75], Corollary B.3 die folgende Voraussetzung an die Maße genügt:

$$(\mathfrak{h} + \nu)[u,v] \leq (\mathfrak{h} + \mu)[u,v] \qquad (u, v \in D(\mathfrak{h} + \mu)_+).$$

Daß dies eine wirkliche Abschwächung zur Voraussetzung in der Proposition darstellt, möge sich der Leser am Beispiel $\mu = \infty\lambda$, $\nu = \infty\text{cap}$ für die klassische Dirichletform (mit dem Lebesguemaß λ) verdeutlichen.

Wir notieren nun noch eine einfache Folgerung über L^p-Eigenschaften von Resolventenpotenzen, wenn die entsprechende Halbgruppe endliche lokale Dimension besitzt:

2.8. Proposition. *Sei $\dim_{loc}(\exp(-Ht)) = d$. Dann gilt*

(1) *Es gibt c mit $\|\exp(-Ht)\|_{p,q} \leq c \cdot t^{-\frac{d}{2}(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}$ für $0 < t < 1$.*

(2) *Für $s > \frac{d}{2}(\frac{1}{p} - \frac{1}{q})$ induziert $(H+1)^{-s}$ einen stetigen Operator von L^p nach L^q.*

Beweis:
(1) folgt aus dem Konvexitätssatz von Riesz–Thorin (siehe A5) und Dualität.
(2): Es ist

$$(H+1)^{-s} = \Gamma(s)^{-1} \int_0^\infty t^{s-1} e^{-(H+1)t} dt.$$

Außerdem folgt mit der Halbgruppeneigenschaft, daß $\|\exp(-Ht)\|_{p,q}$ für $t \geq 1$ gleichmäßig beschränkt ist. Damit konvergiert das obige Integral absolut (bezüglich $\|\cdot\|_{p,q}$) bei ∞, es bleibt daher zu zeigen, daß

$$\int_0^1 t^{s-1} \|e^{-(H+1)t}\|_{p,q} dt < \infty.$$

Dies folgt aber aus der Abschätzung in (1) nach Wahl von s. □

Die Zusammenhänge zwischen endlicher lokaler Dimension, Sobolev-Ungleichungen und der Geometrie des zugrundeliegenden Raumes sind ein zentrales Thema der Analysis. Wir verweisen auf die Arbeit [85] und die Darstellung in [15], wo man weitere Literatur zu diesem schönen Gebiet findet.

3. Die Feynman–Kac–Formel

Zusammenfassung: Die Halbgruppe von $(H+V)_G$ wird mittels des zu H gehörigen Prozesses dargestellt.

In den Abschnitten 5 und 6 wollen wird die Differenz $\exp(-(H+\mu)t) - \exp(-(H+\nu)t)$ auf Kompaktseigenschaften hin untersuchen. Dabei wird eine probabilistische Darstellung der Halbgruppe eine entscheidende Rolle spielen. Mit Hilfe des Approximationssatzes 2.4 aus Abschnitt 2 können wir uns dabei auf den Fall $\mu = V + \infty_B$ mit beschränktem V und meßbarem B beschränken, obwohl allgemeinere Aussagen möglich sind.

Wir erinnern zunächst daran, daß zu H (wir setzen wieder die Situation aus 1.1 voraus) ein Markovprozeß $(\Omega, (X_t; t \geq 0), (\mathbb{P}^x; x \in E))$ assoziiert ist, für den

$$e^{-Ht} f = \mathbb{E}^x[f \circ X_t] \tag{3.1}$$

$m-f.ü.$ für alle $f \in L^2$ gilt (siehe [34]; der Prozeß kann sogar als Huntprozeß gewählt werden, aber auf solche technischen Einzelheiten wollen wir hier nicht eingehen). Die erste Treffzeit τ_B einer Menge $B \in \mathfrak{B}$ ist durch die Formel

$$\tau_B(\omega) = \inf\{s > 0; X_s(\omega) \in B\}, \omega \in \Omega$$

gegeben. Mit ihrer Hilfe können wir das Ergebnis dieses Abschnitts wie folgt formulieren:

3.1. Satz. *Sei $V : E \to \mathbb{R}$ beschränkt und meßbar, $G \in \mathfrak{B}$. Dann gilt*

$$e^{-t(H+V)_G} f(x) = \mathbb{E}^x[f \circ X_t \cdot e^{-\int_0^t V \circ X_s ds} \cdot \mathbb{1}_{\tau_{G^c} > t}] \tag{3.2}$$

Bevor wir diesen Sachverhalt aus einer recht neuen Arbeit von Kuwae, [48], herleiten, wollen wir zunächst bemerken, daß Gleichung (3.2) für $H = -\frac{1}{2}\Delta$ als Feynman–Kac–Formel wohlbekannt ist (siehe etwa [61] oder [20] für ein neueres Zitat in größerer Allgemeinheit). Hinter der Gleichung (3.2) steht der Zusammenhang zwischen Störungen von H durch Maße und additive Funktionale. Wir wollen diesen Zusammenhang nun kurz erklären, ohne jedoch auf Feinheiten einzugehen. Dem interessierten Leser empfehlen wir [5, 81] für $H = -\frac{1}{2}\Delta$ und [34],§5, [48] für den allgemeinen Fall. Wir bemerken zunächst, daß man den Prozeß $(\Omega, (X_t; t \geq 0), (\mathbb{P}^x; x \in E))$ so wählen kann, daß ein Shift $\Theta_t : \Omega \to \Omega$ mit der Eigenschaft $X_s \circ \Theta_t = X_{t+s}$ existiert.

Ein *positives, additives Funktional* ist eine Abbildung

$$\begin{aligned} A : [0,\infty) \times \Omega &\to [0,\infty], \\ (t,\omega) &\mapsto A_t(\omega), \end{aligned}$$

die neben gewissen Meßbarkeits– und Stetigkeitsbedingungen die folgende Gleichung erfüllt (Additivität):

$$A_{t+s}(\omega) = A_s(\omega) + A_t(\Theta_s\omega). \tag{3.3}$$

(Genau genommen muß A nur auf einer Teilmenge von Ω definiert sein. Die Notwendigkeit, solche allgemeinen Additiven Funktionale, in [48] PCAF_e genannt, zu verwenden, liegt in der Betrachtung sehr singulärer Störungen.) Man sollte sich $A_t(\omega)$ als die Rate vorstellen, mit der das Teilchen ω bis zum Zeitpunkt t absorbiert wird. Damit bedeutet (3.3), daß sich die Absorption bis zum Zeitpunkt s und die von s bis $s+t$ addieren.

3.2. Beispiele. (1) Sei $V : E \to [0, \infty)$ beschränkt und meßbar. Dann definiert $A_t^{(1)}(\omega) := \int_0^t V \circ X_s(\omega) ds$ ein additives Funktional.

(2) Sei $B \in \mathfrak{B}$. Dann definiert $A_t^{(2)}(\omega) := \infty \cdot \chi_{\{\tau_B \geq t\}}(\omega)$ ein additives Funktional.

Das Hauptergebnis von [48] ist nun die Aussage, daß es zu jedem $\mu \in \mathcal{M}_0$ ein additives Funktional A gibt, so daß

$$e^{-(H+\mu)t} f(x) = \mathbb{E}^x [f \circ X_t \cdot e^{-A_t}] \tag{3.4}$$

$m - f.ü.$ für alle $f \in L^2$ gilt (siehe [48], §1, Theorem, wo der Zusammenhang allerdings über die Resolvente formuliert wird).

Sind $\mu^{(1)}, \mu^{(2)} \in \mathcal{M}_0$ Maße mit zugehörigen Funktionalen $A^{(1)}, A^{(2)}$, so ist $A^{(1)} + A^{(2)}$ im Sinne der Gleichung (3.4) zu $\mu^{(1)} + \mu^{(2)}$ assoziiert, siehe [48], S. 21.

Damit können wir nun *Satz* 3.1 *beweisen :*
Wir können, wegen der Beschränktheit o. E. $V \geq 0$ annehmen. (Ansonsten betrachten wir $\mathfrak{h} + c$). Sei $\mu^{(1)} = Vm$ und $\mu^{(2)} = \infty_B$. Dann ist $A^{(1)}$ aus Beispiel 3.2 (1) zu $\mu^{(1)}$ und $A^{(2)}$ aus Beispiel 3.2 (2) zu $\mu^{(2)}$ assoziiert (siehe [48] und [34], §4.4).

Die oben erwähnte Linearität beendet den Beweis. □

Es sollte nicht zu schwierig sein, für Maße in $\mathcal{M}_0 - \hat{\mathcal{S}}_K$ mit $k(\mu) < 1$ ein zugehöriges additives Funktional zu konstruieren. Die Konstruktionen aus [79] bieten einen Rahmen, in dem die klassische Dirichletform behandelt werden kann, der aber nicht allgemeine Dirichletformen umfasst. Das liegt daran, daß man im allgemeinen bei der Definition additiver Funktionale Ausnahmemengen zulassen muß (vergleiche [48], (A.1), (A.2), (A.2)' mit [79], Definition 1.14). Als schöne Anwendung der Darstellung mittels additiver Funktionale erhält man die folgende Monotonieeigenschaft, die sich Leserin oder Leser leicht plausibel machen können, indem sie für μ, ν Differenzen reeller Zahlen einsetzen.

3.3. Proposition. *Seien $\mu, \nu \in \mathcal{M}_0 - \hat{\mathcal{S}}_K$ mit $k(\mu^-), k(\nu^-) < 1$ und $\nu \leq \mu$ (siehe 2.7). Dann ist*

$$0 \leq \left(e^{-(H+\mu)t} - e^{-(H+\nu)t}\right) \leq \left(e^{-(H+\mu^-)t} - e^{-(H+\nu^-)t}\right)$$

f.ü. für $f \in \bigcup_p L^p$, $f \geq 0$.

Beweis:
Die erste Ungleichung ist die Aussage von 2.7. Um die zweite Ungleichung zu beweisen, können wir uns mit Hilfe von Satz 2.4 auf den Fall beschränkter Potentiale zurückziehen (dazu bemerke man, daß man für approximierende Folgen (V_n) für μ und (W_n) für ν die Ungleichung $V_n \leq W_n$ erreichen kann). Die Feynman–Kac–Formel (3.2) liefert nun die gewünschte Ungleichung. □

4. Hilfsmittel aus der Theorie der Operatorenideale

Zusammenfassung: Es werden absolut–p–summierende Operatoren eingeführt und benutzt, um Hilbert–Schmidt– und Spurnorm–Abschätzungen für Operatoren zu beweisen, die über L^p–Räume faktorisieren.

In diesem Abschnitt stellen wir ein Hilfsmittel zum Beweis von Kompaktheitsaussagen bereit, zu dem Diestel und Uhl in [24] schreiben: "The idea of factoring an operator through classical Banach spaces is simple and possibly occured to others before Grothendieck. What sets the work of Grothendieck apart is that he not only thought about factoring operators: he did it."

Die klassischen Banachräume, die wir benutzen werden sind $C(K)$ für kompaktes K und $L^p = L^p(\Omega)$ für σ–endliche Maßräume $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$. (Wir werden im folgenden für K und Ω stets diese Eigenschaften voraussetzen.)

Ein wichtiges Resultat von Grothendieck wird heute manchmal "little Grothendieck theorem" genannt. Es lautet:

4.1. Satz. *Sei H ein Hilbertraum und E ein Banachraum, der zu $C(K)$ oder L^1 isomorph ist. Sind $A \in \mathfrak{L}(E, H)$ und $B \in \mathfrak{L}(H, E)$, so ist AB ein Hilbert–Schmidt–Operator.*

Dabei schreiben wir $\mathfrak{L}(E, F)$ oder $\mathfrak{L}$ für die beschränkten (überall definierten) Operatoren zwischen den Banachräumen E und F; die *nuklearen Operatoren* kürzen wir mit

$$\mathfrak{N}(E, F) = \{T \in \mathfrak{L}; \exists x_i' \in E', y_i \in F : \quad \sum_i \|x_i'\| \|y_i\| < \infty, \quad Tx = \sum_i \langle x_i', x\rangle y_i\},$$

und die zugehörige Norm mit

$$\|T\|_N = \inf\{\sum_i \|x_i'\| \|y_i\|; Tx = \sum_i \langle x_i', x\rangle y_i\}$$

ab. Wir bemerken, daß die nuklearen Operatoren zwischen Hilberträumen gerade mit den *Spurklasseoperatoren* (siehe [89], Satz 7.12) übereinstimmen. Die *Hilbert–Schmidt–Operatoren* und die Hilbert–Schmidt–Norm bezeichnen wir mit $\mathfrak{HS}$ und $\|\cdot\|_{HS}$. Der Beweis von Satz 4.1 ist keineswegs trivial (siehe etwa [16]), aber einen recht einfachen Beweis des folgenden Spezialfalles werden wir später vorstellen.

4.2. Lemma. *(Hilbert–Schmidt–Lemma) Seien $A \in \mathfrak{L}(C(K), L^2)$, $B \in \mathfrak{L}(L^2, C(K)$ und A positivitätserhaltend (d.h. $f \geq 0$ impliziert $Af \geq 0$). Dann ist $AB \in \mathfrak{HS}$,*

$$\|AB\|_{HS} \leq \|A\| \cdot \|B\|.$$

Daraus folgt recht einfach das

4.3. Lemma. *(Spurklasse–Lemma) Sei $A \in \mathfrak{L}(L^1, L^2)$, $B \in \mathfrak{L}(L^2, L^1)$ positivitätserhaltend und so, daß ein Φ existiert mit $|Bf| \leq \Phi$ punktweise für alle $f \in L^2$ mit $\|f\| \leq 1$. Dann ist AB nuklear mit*

$$\|AB\|_N \leq \|A\| \cdot \|\Phi\|_1.$$

Wir bemerken schon an dieser Stelle, daß im Hilbert–Schmidt–Lemma auch die entsprechende Aussage für L^∞ anstelle von $C(K)$ enthalten ist, da sich L^∞ mit Hilfe der Gelfandabbildung (siehe etwa [84]) als $C(K)$ realisieren läßt (wobei die Ordnung respektiert wird).

Im Beweis von Lemma 4.2 werden wir das von Pietsch eingeführte Ideal der absolut 2–summierenden Operatoren benutzen; dabei heißt für $1 \leq p < \infty$, ein Operator $T : E \to F$ zwischen Banachräumen *absolut p–summierend* , falls

$$\exists c \quad \forall x_1, ..., x_n \in E : (\sum_i \|Tx_i\|^p)^{\frac{1}{p}} \leq c \cdot \sup_{x' \in E, \|x'\| \leq 1} (\sum_i |\langle x_i, x' \rangle|^p)^{\frac{1}{p}}. \qquad (*)$$

Wir schreiben

$$\|T\|_{\mathfrak{P}_p} := \inf\{c; c \text{ wie in } (*) \ \}$$

und $\mathfrak{P}_p(E,F)$ für die Klasse aller absolut p–summierenden Operatoren. Zwei Eigenschaften machen $\mathfrak{P}_p$ und insbesondere $\mathfrak{P}_2$ für uns interessant:

- H_1, H_2 Hilberträume $\Longrightarrow \mathfrak{P}_2(H_1, H_2) = \mathfrak{HS}(H_1, H_2)$ mit gleicher Norm.
- E, F, X Banachräume, $C \in \mathfrak{L}(F, G), B \in \mathfrak{P}_p(E, F), A \in \mathfrak{L}(F, X)$
  $\Longrightarrow ABC \in \mathfrak{P}_p(E, X), \|ABC\|_{\mathfrak{P}_p} \leq \|A\| \cdot \|B\|_{\mathfrak{P}_p} \cdot \|C\|$

Die einfachen Rechnungen zum Nachweis dieser Eigenschaften wollen wir hier nicht ausführen (siehe [16], insbesondere Proposition 11.6 für den ersten Punkt). Der Leser findet etwa in Pietsch's Klassiker [52] oder in [16] eine gründliche Einführung in die Theorie der Operatorenideale. In [93] werden einige schöne Anwendungen dieser Theorie vorgestellt.

4.4. Proposition. *Sei $T \in \mathfrak{L}(C(K), L^p)$ positivitätserhaltend. Dann ist $T \in \mathfrak{P}_p(C(K), L^p)$ mit $\|T\|_{\mathfrak{P}_p} = \|T\|$.*

Beweis:
Sei zunächst $M := M_F : L^\infty(\Omega) \to L^p(\Omega)$ Multiplikation mit einer L^p–Funktion $F \geq 0$. Dann gilt, für $f_1, ...f_n \in L^\infty$:

$$\begin{aligned}
\left(\sum_n \|Mf_n\|^p\right)^{\frac{1}{p}} &= \left(\sum_n \int_\Omega |Mf_n|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \left(\int_\Omega \left(\sum_n |f_n|^p\right) F^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \left(\int_\Omega [M \left(\sum_n |f_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}]^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \|M\| \cdot \operatorname{ess\,sup} \left(\sum_n |f_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} \qquad \text{(I)}
\end{aligned}$$

Wir zeigen nun

$$\operatorname{ess\,sup} (\sum_n |f_n|^p)^{\frac{1}{p}} \leq \sup_{x' \in (L^\infty)', \|x'\| \leq 1} (\sum_n \langle x', f_n \rangle^p)^{\frac{1}{p}}. \qquad \text{(II)}$$

Sei dazu $G : L^\infty \to C(\hat{\Omega})$ die Gelfandabbildung, also $\hat{\Omega} = \{x' \in L^\infty, x' \text{ multiplikativ }, \langle x', 1\rangle = 1\}$. Für f_n wie oben setze $g_n := Gf_n$. Dann folgt $G|f_n| = |g_n|$ und $G(\sum_n |f_n|^p) = \sum_n |g_n|^p$. Damit erhalten wir $\| \sum_n |f_n|^p\|_\infty = \sup_{t\in\hat{\Omega}} \sum_n |g_n(t)|^p = \sup_{t\in\hat{\Omega}} |\langle t, f_n\rangle|^p$, woraus offensichtlich (II) folgt.

(I) und (II) zusammen ergeben $\|M\|_{\mathfrak{P}_p} \le \|M\|$ und die andere Ungleichung ist klar (siehe auch [16], Ex. 11.14). Es sei nun $T : C(K) \to L^p$ positivitätserhaltend. Es folgt

$$|Tf| \le T|f| \le T1 =: F \qquad (f \in C(K), \|f\| \le 1). \qquad \text{(III)}$$

Setze $F^{-1}(x) := F(x)^{-1}$ falls $F(x) \neq 0$ und 0 sonst. Wegen (III) ist dann $S := M_{F^{-1}}T \in \mathfrak{L}(C(K), L^\infty)$ mit $\|S\| \le 1$. Außerdem ist $M_F M_{F^{-1}}T = T$. Aus den Abschätzungen für die $\mathfrak{P}_p$-Norm von M_F folgt dann

$$\|T\|_{\mathfrak{P}_p} \le \|M_F\|_{\mathfrak{P}_p}\|M_{F^{-1}}T\| \le \|M_F\| = \|F\|_p = \|T\|$$

□

In [16], 11.2 Corollary findet man einen einfachen Beweis der vorhergehenden Proposition, der etwas mehr Kenntnisse über Tensorprodukte voraussetzt. Ein entscheidender Schritt im vorhergehenden Beweis war eine Art Minkowski–Ungleichung

$$(\sum_n |Mf_n|^p)^{\frac{1}{p}} \le M[(\sum_n |f_n|^p)^{\frac{1}{p}}]$$

punktweise für $f_1, ... f_n \in L^\infty$. Eine entsprechende Ungleichung gilt für beliebige positivitätserhaltende Operatoren von $C(K)$ nach L^p, wie wir nun sehen werden. Wir benutzen dieses Resultat in der vorliegenden Arbeit nicht weiter, verweisen aber auf [22], wo 4.5 (1) mit $p = 2$ angewandt wurde.

4.5. Proposition. *Sei $1 \le p < \infty$ und $T : C(K) \to L^p$ positivitätserhaltend. Dann gilt*

(1) *(Hölderungleichung) Für $f, g \in C(K)$ ist $|T(fg)| \le [T(|f|^p)]^{1/p}[T(|g|^q)]^{1/q}$ f.ü.*

(2) *(Minkowskiungleichung) Es ist $(\sum_n |Tf_n|^p)^{1/p} \le T(\sum_n |f_n|^p)^{1/p}$ f.ü. für $f_1, ..., f_n \in C(K)$.*

Beweis:
Nach [67], Beweis von 1.1 gibt es eine Familie $\tau_y(\cdot)$ von Maßen auf K mit

$$Tf(y) = \int_K f(x)d\tau_y(x) =: Pf(y) \qquad f.ü. \qquad (\clubsuit)$$

für alle $f \in C(K)$. Daraus lassen sich nun beide Ungleichungen leicht herleiten. Nach ($\clubsuit$) müssen wir die entsprechenden Aussagen mit P anstelle von T beweisen.
(1):
Für $a, b \in \mathbb{R}$ gilt

$$|ab| \le \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q \qquad (*).$$

Sei $y \in \Omega$. Setze

$$\hat{f} := f \cdot (P|f|^p)^{-\frac{1}{p}}(y), \qquad \hat{g} := g \cdot (P|g|^q)^{-\frac{1}{q}}(y)$$

Aus $(*)$ folgt

$$|P(\hat{f}\hat{g})| \leq P|\hat{f}\hat{g}| \leq \frac{1}{p}P|\hat{f}|^p + \frac{1}{q}P|\hat{g}|^q,$$

woraus durch Auswertung an der Stelle y folgt

$$|P(\hat{f}\hat{g})(y)| \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

Nach Definition von $\hat{f}$ folgt daraus die gewünschte Ungleichung.
(2):
Es ist

$$\begin{aligned}(\sum_n |Pf_n|^p)^{\frac{1}{p}} &= (\sum_n |\int_K f_n(x)d\tau_y(x)|^p)^{\frac{1}{p}} \\ &\overset{(!)}{\leq} \int_K (\sum_n |f_n|^p)^{\frac{1}{p}} d\tau_y(x)\end{aligned}$$

Um (!) zu sehen, setzt man $f : K \to \mathbb{C}^n, f(x) := (f_1(x), ..., f_n(x))$ und nutzt aus, daß nach [24], II.2, Theorem 4

$$\| \int f(x)d\tau_y(x)\|_p \leq \int \|f(x)\|_p d\tau_y(x)$$

ist. Das ist aber gerade die gewünschte Ungleichung. □

(An dieser Stelle ist eine Bemerkung zum vorhergehenden Beweis angebracht, mit der ich hauptsächlich die Freunde des Wattens versöhnen möchte: Oaché hods ned gemm.)
Beweis von Lemma 4.2:
Aus Proposition 4.4 folgt $\|A\|_{\mathfrak{P}_2} \leq \|A\|$ und die Idealeigenschaft liefert dann $\|AB\|_{HS} = \|AB\|_{\mathfrak{P}_2} \leq \|A\| \cdot \|B\|$. □

Beweis von Lemma 4.3:
Sei $\Phi^{-1}(x) = \Phi(x)^{-1}$ falls $\Phi(x) \neq 0$ und 0 sonst. Dann folgt

$$AB = AM_{\Phi^{1/2}}M_{\Phi^{1/2}}M_{\Phi^{-1}}B.$$

Da für alle $f \in L^2, \|f\| \leq 1$ offenbar $|M_{\Phi^{-1}}Bf| \leq 1$ punktweise f.ü., folgt

$$M_{\Phi^{-1}}B \in \mathfrak{L}(L^2, L^\infty), \|M_{\Phi^{-1}}B\| \leq 1.$$

Außerdem ist $M_{\Phi^{1/2}} \in \mathfrak{L}(L^\infty, L^2)$ mit Norm $\|\Phi^{1/2}\|_2 = \|\Phi\|_1^{1/2}$. Aus Proposition 4.4 folgt

$$M_{\Phi^{1/2}}M_{\Phi^{-1}}B \in \mathfrak{HS}, \|M_{\Phi^{1/2}}M_{\Phi^{-1}}B\|_{HS} \leq \|\Phi\|_1^{1/2} \qquad (*).$$

Da $\|AM_{\Phi^{1/2}}\|_{HS} = \|(AM_{\Phi^{1/2}})^*\|_{HS} = \|M_{\Phi^{1/2}}A^*\|_{HS}$ folgt, wieder mit Proposition 4.4 und der Tatsache, daß $A^* \in \mathfrak{L}(L^2, L^\infty)$, daß

$$\|AM_{\Phi^{1/2}}\|_{HS} = \|M_{\Phi^{1/2}}A^*\|_{\mathfrak{P}_2} \leq \|\Phi\|_1^{1/2}\|A\| \quad (**)$$

Aus $(*)$ und $(**)$ folgt die Behauptung mit [89], Satz 7.10. $\square$

Für die Faktorisierungskriterien in Lemma 4.2 und 4.3 haben wir damit vollständige Beweise gegeben (dabei sind wir im Fall von 4.3 der Argumentation aus [74] gefolgt, die von G. Stolz stammt). Mit etwas mehr "Maschinerie" aus der Theorie der Operatorenideale hätten wir noch kürzere Beweise erhalten (siehe [71]). Im Abschnitt 10 benötigen wir allerdings das folgende L^p–Analogon des "little Grothendieck theorem".

4.6. Proposition. *Sei $1 \leq p < \infty$ und $A \in \mathfrak{L}(L^\infty, L^p), B \in \mathfrak{L}(L^p, L^\infty)$. Dann ist $AB \in \mathfrak{P}_r(L^p, L^p)$, für $r > \max\{2, p\}$, insbesondere ist AB kompakt.*

Beweis:
Die erste Aussage folgt aus [16], 24.7 Theorem , S. 324, denn L^∞ ist ein $\mathfrak{L}^\infty$–Raum und $\mathrm{cotype}(L^p) = \max\{p, 2\}$; für letzteres siehe etwa [16], 8.6 Proposition, S. 98. Daraus folgt die Kompaktheit mit den folgenden Argumenten: Da L^p reflexiv ist, müssen wir zeigen, daß AB vollstetig ist, das heißt schwache Nullfolgen auf Nullfolgen abbildet. Das folgt aber sofort aus der Tatsache, daß AB absolut p–summierend ist. $\square$

In der Arbeit [22] findet der Leser weitergehende Spurklassekriterien für Produkte von Integraloperatoren und Differenzen von Diffusionshalbgruppen. Letztere kann man insbesondere verwenden, um Schrödingeroperatoren mit Neumann–Randbedingungen zu behandeln. Wir schreiben $\mathfrak{K}(E, F)$ für die kompakten Operatoren zwischen den Banachräumen E und F. Fast hätte ich's vergessen. Wer sich für Tensorprodukte und Operatorenideale interessiert, sollte natürlich auch einmal den Meister selbst konsultieren und einen Blick in [38] werfen.

5. Hilbert–Schmidt und Spurklassen–Eigenschaften von Halbgruppendifferenzen

Zusammenfassung: Wir schätzen

$$\|e^{-(H+\mu)t} - e^{-(H+\nu)t}\|_{HS/N}$$

für Maße μ, ν ab, welche sich nur auf einer kleinen Menge unterscheiden.

In diesem Abschnitt ändern wir unsere Perspektive etwas: stand für die Definition des Operators $H + \mu$ die zugehörige Form im Vordergrund, so wollen wir nun vor allem die Halbgruppe $(\exp(-(H + \mu)t; t \geq 0)$ betrachten. Wir erinnern daran, daß wir die zunächst nur auf einem Teilraum definierte Halbgruppe stets durch 0 auf den ganzen Raum fortgesetzt betrachten (gemäß den in Abschnitt 2 getroffenen Vereinbarungen). In den zentralen Sätzen dieses Abschnitts wollen wir Abschätzungen für

$$\|e^{-(H+\mu)t} - e^{-(H+\nu)t}\|_{HS}, \quad \|e^{-(H+\mu)t} - e^{-(H+\nu)t}\|_{N}$$

angeben, welche nur von der Größe der Menge abhängen, auf denen sich μ und ν unterscheiden. Diese Abschätzungen werden interessante Konsequenzen nach sich ziehen, nämlich die Invarianz des absolutstetigen beziehungsweise wesentlichen Spektrums. Die grundlegenden Hilfsmittel sind das Hilbert–Schmidt und das Spurklasse–Lemma aus dem vorherigen Abschnitt. Um die Voraussetzungen dieser abstrakten Kriterien nachzuprüfen, benutzen wir den zu H gehörigen Prozeß und die Darstellung der Halbgruppe mit Hilfe der Feynman–Kac–Formel (siehe Abschnitt 3). Aufgrund der vielfältigen Anwendungsmöglichkeiten von Abschätzungen der oben genannten Art findet man (für $H = -\Delta$) zahlreiche Varianten in der Literatur, von denen wir [13, 17, 18, 45, 88] erwähnen. Eine andere Strategie, Maßstörungen spektraltheoretisch zu behandeln wird in den Arbeiten [9, 31, 32, 8] verfolgt; diese schließt allerdings eine Anwendung auf Maße der Form ∞_S (die, wie wir später sehen werden besonders interessant sind) aus, da die relative Beschränktheit der Störung eine wesentliche Rolle spielt. Eine systematische Untersuchung von Halbgruppendifferenzen haben van Casteren und Demuth initiiert. Man findet im Kontext von Feller–Halbgruppen in [20, 21] eine Vielzahl interessanter und für uns relevanter Ergebnisse. An dieser Stelle möchte ich M. Demuth recht herzlich danken, der mich für die hier behandelten Fragen begeistert hat.

Unser abstrakter Zugang mittels Dirichletformen und Faktorisierungstechniken umfaßt die von vanCasteren und Demuth untersuchten Feller–Halbgruppen und zeichnet sich besonders durch Einfachheit und Robustheit aus.

Wir betrachten in diesem Abschnitt wieder einen Operator wie in 1.1 und benötigen als generelle Voraussetzung zusätzlich, daß die zugehörige Halbgruppe $(\exp(-Ht); t \geq 0)$ *ultrakontraktiv* ist (siehe Abschnitt 2). Wir schreiben $\|A\|_{p,q}$ für die Operatornorm von $A \in \mathfrak{L}(L^p, L^q)$ und betrachten $\exp(-Ht)$ als Operator zwischen verschiedenen L^p-Räumen. (Hier müßte man streng formal zwischen den von $\exp(-Ht)$ für $t > 0$ und $1 \leq p \leq q \leq \infty$ induzierten Operatoren in $\mathfrak{L}(L^p, L^q)$ unterscheiden, was jedoch sehr umständlich werden würde.)

Wir beginnen die oben angekündigten Untersuchungen mit dem Spezialfall $\mu = 0, \nu = \infty_B$, in dem die Anwendung der Faktorisierungstechnik besonders einfach darzustellen ist und erinnern dazu an die Definition von $H_G = H + \infty_B$ (wobei $G := B^c$) und die Darstellung der zugehörigen Halbgruppe aus Satz 3.1.

5.1. Proposition. *$B \in \mathfrak{B}$ erfülle $\int_E (\mathbb{P}^x\{\tau_B \leq t_0\})^2 dm(x) < \infty$ für ein $t_0 > 0$; sei $G := B^c$. Dann ist $\exp(-Ht) - \exp(-H_G t) \in \mathfrak{H}\mathfrak{S}$ für alle $t > 0$, und es gilt*

$$\|e^{-Ht} - e^{-H_G t}\|_{HS} \leq 2 \cdot \|\mathbb{P}^{\cdot}\{\tau_B \leq t/2\}\|_2 \cdot \|e^{-Ht/2}\|_{2,\infty}.$$

Beweis:
Setze $D(t) := \exp(-Ht) - \exp(-H_G t)$. Da

$$D(2t) = e^{-Ht} D(t) + D(t) e^{-H_G t} \qquad (\heartsuit)$$

ist, können wir $t \leq t_0$ annehmen. Wegen der Monotonie (siehe Proposition 2.7) ist $\|\exp(-H_G t)\|_{2,\infty} \leq \|\exp(-Ht)\|_{2,\infty} < \infty$ und wegen des Hilbert–Schmidt–Lemmas 4.2 genügt es, $\|D(t)\|_{\infty,2}$ abzuschätzen, um eine Abschätzung für die Hilbert–Schmidt–Norm des zweiten Summanden in $(\heartsuit)$ zu erhalten. Dazu schreiben wir

$$\begin{aligned} D(t)1(x) &= \mathbb{P}^x\{1\} - \mathbb{P}^x\{\tau_B > t\} \\ &= \mathbb{P}^x\{\tau_B \leq t\}. \end{aligned}$$

Es folgt $\|D(t)\|_{\infty,2} \leq \|\mathbb{P}^{\cdot}\{\tau_B \leq t/2\}\|_2$ und Lemma 4.2 liefert

$$\|D(t)e^{-H_G t}\|_{HS} \leq \|\mathbb{P}^{\cdot}\{\tau_B \leq t/2\}\|_2 \cdot \|\exp -Ht\|_{2,\infty},$$

sowie

$$\|e^{-Ht} D(t)\|_{HS} = \|D(t)e^{-Ht}\|_{HS} \leq \|\mathbb{P}^{\cdot}\{\tau_B \leq t/2\}\|_2 \cdot \|\exp -Ht\|_{2,\infty},$$

woraus mit $(\heartsuit)$ die Behauptung folgt. □

Die Bedingung an die Größe von B läßt sich mit Hilfe der zu $\mathfrak{h}$ beziehungsweise H gehörigen *Kapazität* leicht nachweisen. Genauer gilt:

5.2. Bemerkung. Für $B \in \mathfrak{B}$ gilt

$$\|\mathbb{P}^{\cdot}\{\tau_B \leq t\}\|_2 \leq \|\mathbb{P}^{\cdot}\{\tau_B \leq t\}\|_1 \leq e^t \cdot \mathrm{cap}(B).$$

Beweis:

$$\mathbb{P}^{\cdot}\{\tau_B \leq t\} \leq e^t \mathbb{E}^x\{e^{-\tau_B}\} = e^t e_B(x),$$

wobei e_B das Gleichgewichtspotential von B bezeichnet (siehe A4). Ist ν_B das zugehörige Gleichgewichtsmaß, so folgt für $g \in L^2, 0 \leq g \leq 1$:

$$\begin{aligned} (e_B|g) &= (\mathfrak{h}+1)[e_b, (H+1)^{-1}g] \\ &= \int_E (H+1)^{-1} g(x) d\nu_B(x) \\ &\leq \nu_B(E) = \mathrm{cap}(B), \end{aligned}$$

wobei wir verwendet haben, daß mit g auch $(H+1)^{-1}g \leq 1$ ist. Aus der obigen Ungleichung folgt die Behauptung. □

Wir können nun eines der Hauptergebnisse dieses Abschnitts, ja der gesamten Arbeit vorstellen und beweisen. Zur Formulierung verwenden wir die Schreibweise $\mu \sim \nu$ außerhalb von B, falls $(\mathfrak{h}+\mu)[f] = (\mathfrak{h}+\nu)[f]$ für alle $f \in D_0(B^c)$, was wiederum äquivalent ist zur Bedingung $\mathfrak{h}+\mu+\infty_B = \mathfrak{h}+\nu+\infty_B$. Stimmen die Maße μ und ν auf B^c überein, so ist dies insbesondere erfüllt.

5.3. Satz. *Für $t > 0$, $a > 0$ und $\gamma < 1/2$ gibt es eine Konstante c, so daß für alle $B \in \mathfrak{B}$ und für alle $\mu, \nu \in \mathcal{M}_0 - \hat{\mathcal{S}}_K(a,\gamma)$ mit $\mu \sim \nu$ außerhalb von B die folgende Ungleichung gilt:*

$$\|e^{-(H+\mu)t} - e^{-(H+\nu)t}\|_{HS} \leq c \cdot \|\mathbb{P}^{\cdot}\{\tau_B \leq t/2\}\|_1^{1/2}.$$

Dabei ist die Aussage natürlich so zu verstehen, daß die Halbgruppendifferenz ein Hibert–Schmidt–Operator ist, wenn die Funktion $\mathbb{P}^{\cdot}\{\tau_B \leq t/2\}$ integrierbar ist. Dies ist gemäß der vorhergehenden Bemerkung für Mengen B mit endlicher Kapazität erfüllt. Ist $k(\mu^-), k(\nu^-) < 1/2$, so kann man definitionsgemäß a, γ mit den im Satz geforderten Eigenschaften finden. Wir wollten bei der Formulierung des Resultats im Hinblick auf spätere Anwendungen die Gleichmäßigkeit der Abschätzung in den Katokonstanten betonen, auch wenn der Satz dadurch auf den ersten Blick komplizierter erscheint.

Beweis:
Sei $D_1(t) := \exp(-(H+\mu)t) - \exp(-(H+\mu+\infty_B)t)$ und $D_2(t)$ die entsprechende Differenz mit ν anstelle von μ. Da $\mu \sim \nu$ außerhalb von B, ist

$$e^{-(H+\mu)t} - e^{-(H+\nu)t} = D_1(t) - D_2(t),$$

es genügt also, die Hilbert–Schmidt–Norm von $D_1(t)$ in geeigneter Form abzuschätzen. Wegen Proposition 3.3 genügt es, $\mu^+ = 0$ zu untersuchen. Betrachten wir zunächst den Fall $\mu = V dm$ mit beschränktem V. Dann können wir mit Satz 3.1 wie folgt rechnen:

$$\begin{aligned}
(e^{-(H+V)t} - e^{-(H+V+\infty_B)t})1(x) &= \mathbb{E}^x\{e^{-\int_0^t V\circ X_s ds}(1 - \mathbb{1}_{\{\tau_B > t\}})\} \\
&= \mathbb{E}^x\{e^{-\int_0^t V\circ X_s ds}\mathbb{1}_{\{\tau_B \leq t\}}\} \\
&\leq \mathbb{E}^x\{e^{\int_0^t V^-\circ X_s ds}\mathbb{1}_{\{\tau_B \leq t\}}\} \\
&\leq \left(\mathbb{E}^x\{e^{\int_0^t 2V^-\circ X_s ds}\}\right)^{1/2} \cdot (\mathbb{P}^x\{\tau_B \leq t\})^{1/2},
\end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt die Cauchy–Schwarz–Ungleichung auf die Integration bezüglich $\mathbb{P}^x$ angewendet haben. Nun ist

$$\begin{aligned}
\operatorname{ess\,sup}_x \mathbb{E}^x\{e^{\int_0^t 2V^-\circ X_s ds}\} &= \|e^{-(H-2V^-)t}1\|_\infty \\
&\leq \|e^{-(H-2V^-)t}\|_{1,1} \\
&\leq c(t,a,\gamma),
\end{aligned}$$

wobei wir für die letzte Ungleichung Satz 2.2 (3) verwendet haben. Damit ist

$$\begin{aligned}
\|(e^{-(H+V)t} - e^{-(H+V+\infty_B)t})1(x)\|_2 &= \|e^{-(H+V)t} - e^{-(H+V+\infty_B)t}\|_{\infty,2} \\
&\leq c(t,a,\gamma)^{1/2}\|\mathbb{P}^{\cdot}\{\tau_B \leq t\}\|_1^{1/2}.
\end{aligned}$$

Da gemäß Zusatz 2.6

$$\|e^{-(H+V)t}\|_{2,\infty} \leq c(t,a,\gamma),$$

folgt wie im Beweis von Proposition 5.1

$$\|D_1(2t)\|_{HS} \leq c(t,a,\gamma)\|\mathbb{P}^{\cdot}\{\tau_B \leq t\}\|_1^{1/2}.$$

(Dabei muß man $c(t,a,\gamma)$ eventuell etwas vergrößern.) Um nun zum allgemeinen Fall zurückzukehren, approximieren wir μ^- wie in Satz 2.4 durch Potentiale V_n, auf die wir die obigen Überlegungen anwenden können. Wir erhalten damit

$$D_1(t) = s - \lim D_n$$

mit Operatoren D_n, deren Hilbert–Schmidt–Norm gleichmäßig (und in geeigneter Weise von t, a, γ abhängig) beschränkt ist, woraus nach [62], Theorem 2.21 die Behauptung folgt. $\square$

Daraus erhält man

5.4. Korollar. *Seien $\mu, \nu \in \hat{\mathcal{S}}_K$ mit $k(\mu^-), k(\nu^-) < 1$ und $\mu \sim \nu$ außerhalb einer Menge endlicher Kapazität. Dann ist $\phi(H+\mu) - \phi(H+\nu) \in \mathfrak{K}$ für alle $\phi \in C_0(\mathbb{R})$, insbesondere ist $\sigma_{ess}(H+\mu) = \sigma_{ess}(H+\nu)$.*

Beweis:
Für $k(\mu), k(\nu) < 1/2$ folgt die Aussage aus Satz 5.3 mit einem Stone–Weierstraß–Argument:

Man setze $I := \{\phi \in C_0(\mathbb{R}); \phi(H+\mu) - \phi(H+\nu) \in \mathfrak{K}\}$. Dann ist I ein abgeschlossenes Ideal, welches genügend viele Funktionen enthält, da nach Satz 5.3 (bei $-\infty$ geeignet modifizierte) Funktionen der Form $\exp(-t\cdot)$ in I enthalten sind. Mit dem Satz von Stone–Weierstraß folgt $I = C_0(\mathbb{R})$. Die Invarianz des Spektrums folgt dann für $\phi(t) = (t+c)^{-1}$ mit geeignetem c aus einer Version des Satzes von Weyl, siehe etwa [56].

Um die Aussage für $\mu, \nu \in \hat{\mathcal{S}}_K$ mit $k(\mu^-), k(\nu^-) < 1$ zu erhalten, benutzen wir analytische Störungstheorie:
Sei $\gamma > 1$ mit $\gamma \cdot k(\mu), \gamma \cdot k(\nu) < 1$. Für $0 < \mathrm{Re} z < \gamma$ setzen wir

$$\mathfrak{a}_z := \mathfrak{h} + \mu^+ + z \cdot \mu^-, \mathfrak{b}_z := \mathfrak{h} + \nu^+ + z \cdot \nu^-$$

Da nach der Bedingung für γ für $0 < r < \gamma$ stets $k(r\mu^-), k(r\nu^-) < 1$ gilt, sind $\mathfrak{a}_z$ und $\mathfrak{b}_z$ sektorielle Formen mit Definitionsbereich $D(\mathfrak{h}+\mu^+)$ beziehungsweise $D(\mathfrak{h}+\nu^+)$; siehe 2.3,2.2 und [47], VI, 1.2, S. 310f. Für $U := \{z \in \mathbb{C}; 0 < r < \gamma\}$ sind $\mathfrak{a}_z, \mathfrak{b}_z, z \in U$ holomorphe Familien vom Typ (a) im Sinne von [47],VII 4.2, S. 395f (eventuell zunächst nur in Teilräumen von $L^2(E)$ definiert, was aber keine Schwierigkeiten bereitet). Insbesondere sind, für λ geeignet,

$$z \mapsto (H + \mu^+ + z \cdot \mu^- + \lambda)^{-1}, (H + \nu^+ + z \cdot \nu^- + \lambda)^{-1}$$

holomorphe Funktionen. Die Differenz

$$z \mapsto (H + \mu^+ + z \cdot \mu^- + \lambda)^{-1} - (H + \nu^+ + z \cdot \nu^- + \lambda)^{-1} \in \mathfrak{L}(L^2)$$

ist also eine holomorphe Funktion, die für $z \in (0, 1/2)$ nur Werte in den kompakten Operatoren $\mathfrak{K}(L^2)$ annimmt. (Für solche z können wir die Argumentation vom Beginn des Beweises benutzen.) Da $\mathfrak{K}(l^2)$ ein abgeschlossener Teilraum von $\mathfrak{L}(L^2)$ ist, liefert der Identitätssatz (man betrachte Funktionale, die auf $\mathfrak{K}(L^2)$ verschwinden), daß

$$(H + \mu^+ + z \cdot \mu^- + \lambda)^{-1} - (H + \nu^+ + z \cdot \nu^- + \lambda)^{-1} \in \mathfrak{K}(L^2)$$

für alle $z \in U$, insbesondere für $z = 1$ $\square$

Auf die Frage nach der Kompaktheit der Halbgruppendifferenz werden wir im nächsten Abschnitt genauer eingehen. Wir wenden uns nun Spurnormabschätzungen zu, wobei wir zunächst wieder einen einfachen Fall betrachten.

5.5. Proposition. *Für $B \in \mathfrak{B}$, $G := B^c$ sei $\int_E (\mathbb{P}^x\{\tau_B \leq t_0\})^{1/2} dm(x) < \infty$ für ein $t_0 \geq 0$. Dann ist $\exp(-Ht) - \exp(-H_G t) \in \mathfrak{N}$ für alle $t > 0$, und es gilt*

$$\|e^{-Ht} - e^{-H_G t}\|_N \leq 2 \cdot \|\mathbb{P}^{\cdot}\{\tau_B \leq t/2\}^{1/2}\|_1 \cdot \|e^{-Ht/2}\|_{1,\infty}.$$

Beweis:
Wie im Beweis von 5.1 genügt es, $t \leq 2t_0$ zu betrachten. Wir verwenden wieder die Bezeichnung $D(t)$ für die Halbgruppendifferenz. Für $f \in L^2$ mit $\|f\|_2 \leq 1$ ist

$$\begin{aligned} |D(t/2)f| &= |\mathbb{E}^x\{f \circ X_{t/2} \mathbb{1}_{\tau_B \leq t/2}\}| \\ &\leq (\mathbb{P}^x\{\tau_B \leq t\})^{1/2} \cdot \left(\mathbb{E}^x\{|f|^2 \circ X_{t/2}\}\right)^{1/2} \\ &\leq (\ldots)^{1/2} \cdot \left(\|e^{-Ht/2}\|_{1,\infty}\right)^{1/2}, \end{aligned}$$

denn $|f|^2$ liegt in der Einheitskugel von L^1. Nun ist

$$D(t) = e^{-Ht/2} D(t/2) + D(t/2) e^{-H_G t/2}.$$

Nach dem Spurklasse–Lemma ist

$$\|e^{-Ht/2} D(t/2)\|_N \leq \|\mathbb{P}^{\cdot}\{\tau_B \leq t/2\}^{1/2}\|_1 \cdot \left(\|e^{-Ht/2}\|_{1,\infty}\right)^{1/2} \cdot \|e^{-Ht/2}\|_{1,2}.$$

Nach Riesz–Thorin (siehe A5) ist $\|e^{-Ht/2}\|_{1,2} \leq \left(\|e^{-Ht/2}\|_{1,\infty}\right)^{1/2}$.
Schätzt man $\|D(t/2)e^{-H_G t/2}\|_N = \|e^{-H_G t/2} D(t/2)\|_N$ analog ab und benutzt wieder die Monotonie um $\|e^{-H_G t}\|_{p,q} \leq \|e^{-Ht}\|_{p,q}$ einzusehen, so erhält man die Behauptung. $\square$

5.6. Satz. *Für $t > 0$, $a > 0$ und $\gamma < 1$ gibt es eine Konstante c, so daß für alle $B \in \mathfrak{B}$ und für alle $\mu, \nu \in \mathcal{M}_0 - \hat{\mathcal{S}}_K(a, \gamma)$ mit $\mu \sim \nu$ außerhalb von B die folgende Ungleichung gilt:*

$$\|e^{-(H+\mu)t} - e^{-(H+\nu)t}\|_N \leq c \cdot \|\mathbb{P}^{\cdot}\{\tau_B \leq t/2\}^{1/2}\|_1.$$

Beweis:
Wie im Beweis von Satz 5.3 genügt es, $\mu = V \leq 0$ und $\nu = V + \infty_B$ zu betrachten.

Für $f \in L^2$, $\|f\|_2 \leq 1$ rechnen wir wie im Beweis von Proposition 5.5,

$$
\begin{aligned}
|D(t/2)f(x)| &= |\mathbb{E}^x\{e^{-\int_0^{t/2} V\circ X_s ds} f \circ X_{t/2} \mathbb{1}_{\{\tau_b \leq t/2\}}\}| \\
&\leq \left(\mathbb{E}^x\{e^{-\int_0^{t/2} 2V\circ X_s ds} |f|^2 \circ X_{t/2}\}\right)^{1/2} \cdot (\mathbb{P}^x\{\tau_B \leq t/2\})^{1/2} \\
&\leq \left(\|e^{-(H+2V)t/2}\|_{1,\infty}\right)^{1/2} \cdot (\dots)^{1/2}.
\end{aligned}
$$

Mit den L^p–Abschätzungen aus Zusatz 2.6 und dem Spurklasse–Lemma 4.3 erhält man nun die Behauptung wie im Beweis von Proposition 5.5. □

Eine wichtige Konsequenz des vorherigen Resultats ist die Existenz der Wellenoperatoren und damit die Invarianz des absolutstetigen Spektrums. Diese kann man jedoch sogar für Maße beweisen, die sich nur auf einer Menge endlicher Kapazität unterscheiden, wie Demuth bemerkt hat. Der folgende Satz wurde im Spezialfall $\mu = 0$, $\nu = \infty_B$ in [71] bewiesen.

5.7. Korollar. *Unter den Voraussetzungen von* Satz 5.6 *existieren, für P die Orthogonalprojektion auf $L^2(E_\nu)$, die Wellenoperatoren*

$$\Omega_{+/-}(H+\mu, H+\nu, P) := s - \lim_{t\to -/+\infty} e^{i(H+\nu)t} P e^{-i(H+\mu)t} P_{ac}(H+\nu)$$

und sind vollständig; insbesondere ist $\sigma_{ac}(H+\mu) = \sigma_{ac}(H+\nu)$.

Beweis:
Sind $H+\mu$ und $H+\nu$ auf ganz $L^2(E)$ selbstadjungiert, so kann man direkt das Invarianzprinzip (siehe zum Beispiel [56], Corollary 4, S. 31) anwenden und erhält die Aussage. Wir nehmen nun den "schlimmsten Fall" an, daß nämlich $L^2(E_\mu)$ und $L^2(E_\nu)$ (dort sind die Operatoren gemäß 2.3 definiert) unendlichdimensionales orthogonales Komplement haben. (Die nötigen Modifikationen für die weniger schlimmen Fälle werden gleich klar.) Wir setzen $H_1 := (H+\mu) \oplus D_1$ auf $L^2(E) = L^2(E_\mu) \oplus L^2(E_\mu)^\perp$ wobei D_1 ein Diagonaloperator mit Eigenwerten n, $n \in \mathbb{N}$ ist. Mit einer entsprechenden Konstruktion von H_2 mit $H+\nu$ sind H_1, H_2 selbstadjungierte Operatoren. Für t wie in 5.6 ist

$$e^{-H_1 t} - e^{-H_2 t} = e^{-(H+\mu)t} \oplus 0 - e^{-(H+\nu)t} \oplus 0 + 0 \oplus e^{-D_1 t} - 0 \oplus e^{-D_2 t}$$

ein Spurklasseoperator. Die Spurnorm der ersten Differenz wird gerade in 5.6 abgeschätzt, und die beiden anderen Summanden sind Diagonaloperatoren mit exponentiell fallender Eigenwertfolge. Auf H_1 und H_2 können wir nun das Invarianzprinzip anwenden, und erhalten, daß die Wellenoperatoren

$$\Omega_{+/-} = s - \lim_{t\to -/+\infty} e^{iH_2 t} e^{-iH_1 t}$$

existieren und vollständig sind. Da $\Omega_{+/-} = P_{ac}(H_2)\Omega_{+/-}$ und $P_{ac}(H_2)P = P_{ac}(H_2)$ nach Konstruktion von D_2, folgt, daß $\Omega_{+/-}$ die gewünschten Wellenoperatoren sind. □

6. Kompaktheit von Resolventendifferenzen und Stabilität des wesentlichen Spektrums

Zusammenfassung: Wir geben Bedingungen dafür an, daß die Differenz $(H+\mu)^{-1} - (H+\nu)^{-1}$ kompakt ist und diskutieren als Spezialfall die Frage, wann $H+\mu$ rein diskretes Spektrum besitzt.

Im letzten Abschnitt haben wir unter anderem Kriterien dafür angegeben, daß die Differenz $\exp(-(H+\mu)t) - \exp(-(H+\nu)t)$ ein Hilbert-Schmidt–Operator ist. Wir wollen nun – darauf aufbauend – untersuchen, wann diese Differenz oder äquivalent dazu, wann die Differenz der Resolventen kompakt ist. Dabei steht wieder die Frage im Vordergrund, wie groß die Menge, auf der sich μ und ν unterscheiden, sein darf, um diese Kompaktheit noch zu garantieren. Dabei werden die generellen Voraussetzungen an H aus dem letzten Abschnitt übernommen, das heißt H ist wie in 1.1 und die zugehörige Halbgruppe ist ultrakontraktiv. Wir beginnen mit einer einfachen Folgerung aus früheren Ergebnissen:

6.1. Proposition. *Sei $M \in \mathfrak{B}$ mit $m(M) < \infty$ und $\mu \in \mathcal{M}_0 - \hat{\mathcal{S}}_K$ mit $k(\mu^-) < 1$.*

(1) *Für alle $t > 0$, a genügend groß und $p \in [1,\infty)$ sind $\chi_M \exp(-(H+\mu)t)$ und $\chi_M(H+\mu+a)^{-1}$ kompakte Operatoren auf L^p.*

(2) *Für alle $\phi \in C_0(\mathbb{R})$ ist $\chi_M \phi(H+\mu) \in \mathfrak{K}(L^2)$.*

Beweis:
(1): Ist $t > 0$, so faktorisiert nach Zusatz 2.6

$$L^p \xrightarrow{e^{-(H+\mu)t}} L^\infty \xrightarrow{\chi_M} L^p,$$

woraus mit Proposition 4.4 (siehe die Argumentation im Beweis von 4.6) die behauptete Kompaktheit für die Halbgruppendifferenz folgt. Nun läßt sich, für genügend großes a

$$(H+\mu+a)^{-1} = s - \int_0^\infty e^{-at} e^{-(H+\mu)t} dt$$

schreiben, $\chi_M(H+\mu+a)^{-1}$ ist also als starkes Integral kompakter Operatoren kompakt, siehe [87].
(2) folgt aus (1) mit einem Stone–Weierstraß–Argument. □

Ein bekanntes Kompaktheitskriterium von Kolmogorov beschreibt relativ kompakte Teilmengen in $L^p(\mathbb{R}^d)$. Der nun folgende Satz liefert ein Analogon für $L^p(E)$.

6.2. Satz. *Eine beschränkte Menge $K \subset L^p(E)$ ist genau dann relativ kompakt, wenn folgende zwei Bedingungen erfüllt sind:*

(i) *Es gibt $E_n \in \mathfrak{B}$ mit $m(E_n) < \infty$ so, daß*

$$\sup_{f \in K} \int_{E_n^c} |f(x)|^p dm(x) \longrightarrow 0 \text{ für } n \to \infty.$$

(ii) *Es konvergiert* $\exp(-Ht)f \to f$ *für* $t \to 0$ *gleichmäßig auf* K.

Beweis:
Bezeichnet man mit M_n die Multiplikation mit der charakteristischen Funktion von E_n als Operator auf $L^p(E)$, so ist (i) offenbar äquivalent zu
(i') $M_n \to I$ gleichmäßig auf K.
Ist K relativ kompakt, so folgt letzteres aus der Tatsache, daß gleichgradig stetige Funktionen, die auf einem Kompaktum punktweise konvergieren schon gleichmäßig konvergieren. Mit diesem Argument folgt auch (ii) für relativ kompaktes K. Seien nun (i) und (ii) erfüllt.
Die Operatoren $T_n := M_n \exp(-H1/n)$ sind nach Proposition 6.1 kompakt und konvergieren auf K gleichmäßig gegen die Identität, denn

$$\begin{aligned} \|T_n f - f\| &\leq \|M_n e^{-H1/n} f - M_n f\| + \|M_n f - f\| \\ &\leq \|M_n\| \|e^{-H1/n} f - f\| + \|M_n f - f\|. \end{aligned}$$

Daraus folgt die Präkompaktheit von K, denn $T_n K$ ist präkompakt, und K ist für alle $\varepsilon > 0$ in einer ε–Umgebung von $T_n K$ enthalten, für $n = n(\varepsilon)$ genügend groß. □

Im Kolmogorov–Kriterium wird anstelle von (ii) die gleichmäßige Konvergenz der Translationsoperatoren auf K gefordert. Schreibt man die Translation in Richtung e_i als $\exp(t\partial_i)$, so wird die Analogie zur Bedingung (ii) besser sichtbar.

Die Proposition 6.1 kann einen zu folgendem Trugschluß verleiten (dem der Autor übrigens auch zum Opfer gefallen ist): Die Halbgruppendifferenz $\exp(-Ht) - \exp(-H_G t)$ entspricht ungefähr $\chi_B \exp(-Ht)$, da weit weg von $B = G^c$ die gestörte und die ungestörte Halbgruppe fast gleich sind. Eine naheliegende Vermutung ist also, daß für $m(B) < \infty$ die obige Halbgruppendifferenz kompakt ist.

Wie falsch diese Vermutung ist, sieht man an folgendem schönen Beispiel, welches ich J. Voigt verdanke:
Für $H = -\Delta$ auf $\mathbb{R}^2$ betrachte $B = \mathbb{Z} \times \mathbb{R} \cup \mathbb{R} \times \mathbb{Z}$. Dann ist $m(B) = 0$. Da H_G in eine direkte Summe von Laplaceoperatoren auf kongruenten Würfeln zerfällt, ist $\sigma(H_G)$ eine diskrete Menge und $\exp(-Ht) - \exp(-H_G t)$ kann deshalb nicht kompakt sein (sonst würden die wesentlichen Spektren übereinstimmen). Man sieht leicht, daß dieses Beispiel durch "Aufdicken" der Geraden so modifiziert werden kann, daß man ein glattes B erhält, welches der Abschluß seines Inneren ist. Wir führen nun eine Regularitätseigenschaft ein, die zusammen mit der Endlichkeit des Maßes hinreichend für die Kompaktheit der Resolventen beziehungsweise der Halbgruppendifferenz ist.

6.3. Definition. Wir nennen $B \in \mathfrak{B}$ für $\mathfrak{h}$ *nrs–regulär, falls* $H + \mu + n\chi_B \xrightarrow{nrs} H + \mu + \infty_B$ für $n \to \infty$ für alle $\mu \in \mathcal{M}_0 - \hat{\mathcal{S}}_K$ mit $k(\mu^-) < 1$.

Im Falle $H = -\Delta$ wird B *Kac–regulär* genannt, wenn $H + n\chi_B \xrightarrow{srs} H + \infty_B$, was wiederum äquivalent ist zu $\infty_B \sim \infty\chi_B$. Unter schwachen Regularitätsbedingungen (zum Beispiel Segmentbedingung) ist letztere Bedingung erfüllt. In [42] findet man dazu mehr Informationen und Hinweise auf relevante Literatur. Wir zeigen nun

6.4. Satz. *Seien $\mu, \nu \in \mathcal{M}_0 - \hat{\mathcal{S}}_K$ mit $k(\mu^-), k(\nu^-) < 1$ und sei $\mu \sim \nu$ außerhalb einer nrs-regulären Menge B endlichen Maßes. Für $\phi \in C_0(\mathbb{R})$ ist dann*

$$\phi(H + \mu) - \phi(H + \nu) \in \mathfrak{K},$$

insbesondere ist $\sigma_{ess}(H + \mu) = \sigma_{ess}(H + \nu)$.

Beweis:
Ohne Einschränkung können wir $H + \mu \geq 0$ annehmen. Wie im Beweis von 5.3 sieht man, daß es genügt, $\nu = \mu + \infty_B$ zu betrachten. Gemäß Proposition 6.1 ist

$$(H + \mu + 1)^{-1} - (H + \mu + n\chi_B + 1)^{-1} = (H + \mu + 1)^{-1} n\chi_B (H + \mu + n\chi_B + 1)^{-1}$$

kompakt und da B als nrs–regulär vorausgesetzt war, ist

$$(H + \mu + 1)^{-1} - (H + \mu + \infty_B + 1)^{-1} = \|\cdot\| - \lim_{n\to\infty} (H + \mu + 1)^{-1} - (H + \mu + n\chi_B + 1)^{-1}$$

kompakt. Damit folgt die behauptete Kompaktheit für $\phi(t) = (|t| + 1)^{-1}$. Mit einem einfachen Stone–Weierstraß–Argument erhält man die Behauptung. □

Man kann sich leicht überlegen, daß für Kac–reguläre Mengen B die folgende Umkehrung von Satz 6.4 gilt:

Ist $(H + \mu + 1)^{-1} - (H + \mu + \infty_B + 1)^{-1}$ kompakt für alle $\mu \in \mathcal{M}_0 - \hat{\mathcal{S}}_K$ mit $k(\mu^-) < 1$, so ist B nrs–regulär.

Dazu verwendet man, daß

$$0 \leq (H + \mu + 1)^{-1} - (H + \mu + n\chi_B + 1)^{-1} \leq (H + \mu + 1)^{-1} - (H + \mu + \infty_B + 1)^{-1}.$$

Wir sind also in der Situation $0 \leq T_n \leq K$ mit K kompakt und $T_n \xrightarrow{s} 0$, in der man recht einfach $\|T_n\| \to 0$ zeigen kann.

Insbesondere sind Kac–reguläre Mengen endlicher Kapazität nrs–regulär, eine Tatsache, die wir ohne den Umweg über 5.3 bisher nicht zeigen konnten. Für den Laplaceoperator werden wir später ein Kriterium angeben, welches sich leichter nachprüfen läßt.

Wir wollen nun ein etwas traditionelleres Kompaktheitskriterium beweisen, welches besagt, daß $(H+\mu)^{-1} - (H+\nu)^{-1}$ kompakt ist, wenn die Differenz zwischen μ und ν in geeigneter Weise bei ∞ verschwindet. Was letzteres genau bedeutet, wollen wir nun zum Inhalt einer Definition machen. Wir sagen für $\mu, \nu \in \mathcal{M}_0 - \hat{\mathcal{S}}_K$ mit $k(\mu^-), k(\nu^-) < 1$, daß $\mu - \nu$ *klein bezüglich* $\mathfrak{h}$ *bei* ∞ ist, falls es eine aufsteigende Folge K_n kompakter Mengen mit $\bigcup_n K_n^\circ = E$ gibt, für die

$$\sup\{|\int |\tilde{f}|^2 d\mu - \int |\tilde{f}|^2 d\nu|; f \in D, (\mathfrak{h} + 1)[f] \leq 1, \tilde{f} = 0 \text{ q.ü. auf } K_n\} \to 0$$

für $n \to \infty$.
Ist $\mu - \nu$ klein bezüglich $\mathfrak{h}$ bei ∞, so folgt insbesondere, daß

$$D(\mathfrak{h} + \mu + \infty_{K_n}) = D(\mathfrak{h} + \nu + \infty_{K_n})$$

für genügend großes n. Es ist leicht zu sehen, daß diese Definition von der Wahl der Ausschöpfung durch Kompakta unabhängig ist.

6.5. Satz. *Ist $\mu - \nu$ klein bezüglich $\mathfrak{h}$ bei ∞, so gilt*

$$\phi(H+\mu) - \phi(H+\nu) \in \mathfrak{K} \qquad (\phi \in C_0(\mathbb{R})),$$

insbesondere ist $\sigma_{ess}(H+\mu) = \sigma_{ess}(H+\nu)$.

Beweis:
Es genügt, die Kompaktheit für die Resolventendifferenz zu zeigen. Dafür nehmen wir an, daß die Formsummen jeweils positiv sind und schreiben:

$$\begin{aligned}(H+\mu+1)^{-1} - (H+\nu+1)^{-1} &= (H+\mu+1)^{-1} - (H+\mu+\infty_{K_n}+1)^{-1} \\ &- (H+\nu+1)^{-1} + (H+\nu+\infty_{K_n}+1)^{-1} \\ &+ (H+\mu+\infty_{K_n}+1)^{-1} - (H+\nu+\infty_{K_n}+1)^{-1}.\end{aligned}$$

Da die ersten beiden Differenzen wegen Satz 5.4 kompakt sind, genügt es zu zeigen, daß

$$\|(H+\mu+\infty_{K_n}+1)^{-1} - (H+\nu+\infty_{K_n}+1)^{-1}\| \to 0 \text{ für } n \to \infty.$$

Dies folgt jedoch aus A1, denn

$$\sup\{|(\mathfrak{h}+\mu+\infty_{K_n} - \mathfrak{h}+\nu+\infty_{K_n})[u]; u \in D(\mathfrak{h}+\mu+\infty_{K_n}), (\mathfrak{h}+\mu+\infty_{K_n})[u] \le 1\}$$

$$\le \sup\{|\int |\tilde{f}|^2 d\mu - \int |\tilde{f}|^2 d\nu|; f \in D, (\mathfrak{h}+1)[f] \le 1, \tilde{f} = 0 \text{ q.ü. auf } K_n\} \to 0$$

für $n \to \infty$. □

Im Falle von Schrödingeroperatoren läßt sich die folgende Aussage noch verschärfen. Das ist ein Resultat von Gårding; wir haben uns für die hier gegebenen Beweise von der Darstellung in [91], §11 inspirieren lassen.

6.6. Proposition. *Sei $\mu \in \mathcal{M}_0 - \hat{\mathcal{S}}_K$ mit $k(\mu) < 1$ und K_n wie oben. Dann sind äquivalent:*

(i) *$\lambda \in \sigma_{ess}(H+\mu)$.*

(ii) *Es gibt $f_n \in D$ mit $\tilde{f}_n = 0$ q.ü. auf K_n, $\|f_n\| = 1$ und $(\mathfrak{h}+\mu)[f_n] \to \lambda$ für $n \to \infty$.*

Beweis:
(i)$\Longrightarrow$(ii): Für alle $l \in \mathbb{N}$ ist gemäß 5.4 auch $\lambda \in \sigma_{ess}(H+\mu+\infty_{K_l}) = \sigma_{ess}(H+\mu)$. Es gibt damit für alle $l \in \mathbb{N}$ eine singuläre Folge $f_n^{(l)}$ für $\mathfrak{h}+\mu+\infty_{K_l}$, also mit $\tilde{f}_n = 0$ q.ü. auf K_l. Die Folge $f_n := f_n^{(n)}$ leistet das Gewünschte.
(ii)$\Longrightarrow$(i): Aus der Trägerbedingung folgt $f_n \xrightarrow{w} 0$, und damit ist f_n eine singuläre Folge für λ und $H+\mu$. □

Das vorherige Resultat kann man dahingehend verstehen, daß für die Bestimmung des wesentlichen Spektrums nur das Verhalten von μ bei ∞ entscheidend ist. Diesen Effekt wollen wir uns noch genauer in einem Spezialfall ansehen. Genauer beschäftigen wir uns nun mit

Maßen, für die $H + \mu$ kompakte Resolvente besitzt. Das ordnet sich in den Kontext dieses Paragraphen ein, wenn man $\nu = \infty_E$ setzt. Für den Laplaceoperator und Multiplikationsoperatoren weiß man, daß der Operator $H + V$ kompakte Resolvente besitzt, wenn $V \to \infty$ bei ∞. Außerdem gibt es ein schönes Kriterium von Molchanov, welches man in einer Dimension dahingehend ausweiten kann, daß $H + \mu$ kompakte Resolvente hat, falls für alle offenen Intervalle $U \neq \emptyset$

$$\mu(U + x) \to \infty \text{ für } x \to \infty.$$

Dieses Kriterium läßt sich auch auf Dirichlet–Laplaceoperatoren anwenden, wenn man $\mu = \infty_B$ setzt. Auch für höherdimensionale Dirichlet–Laplaceoperatoren gibt es ein Molchanovkriterium, welches nun allerdings etwas technisch wird (siehe [25]). Die einfache Bedingung von oben genügt nun sicher nicht mehr, wie man sich an folgendem Beispiel überlegen kann. Sei $B = \bigcup_n B_n$ eine Vereinigung von Kugeln, deren Mittelpunkte dicht in $\mathbb{R}^d$, $d \geq 2$ liegen. Die Abschätzungen aus 5.6 liefern nun, daß für $G := B^c$ die Differenz $\exp(Ht) - \exp(H_G t)$ Spurklasse ist, falls die Radien r_n der Kugeln B_n schnell genug gegen 0 gehen (siehe auch Proposition 7.1). Insbesondere ist $\sigma_{ac}(H_G) = [0, \infty)$ und H_G kann keine kompakte Resolvente besitzen.

Wir wollen nun eine Bedingung vorstellen, die das Wachstum des Maßes bei ∞ in geeigneter Weise formalisiert. Dazu setzen wir, für $G \in \mathfrak{B}$,

$$Av_G^\lambda(\mu) := \inf\{\int_E |\tilde{f}|^2 d\mu; \|f\|_2 = 1, \mathfrak{h}[f] \leq \lambda, \tilde{f} = 0 \text{ q.ü. auf } G^c\}.$$

6.7. Satz. *Seien K_n kompakte Mengen mit $\bigcup_n K_n^\circ = E$, $G_n := K_n^c$ und $\mu \in \mathcal{M}_0$. Dann sind äquivalent:*

(i) $\sigma_{ess}(H + \mu) = \emptyset$.

(ii) *Für $(f_n) \in D$ mit $(\mathfrak{h} + \mu + 1)[f_n] \leq 1$ und $\tilde{f}_n = 0$ auf K_n folgt $\|f_n\|_2 \to 0$.*

(iii) *Für alle $\lambda > 0$ konvergiert $Av_{G_n}^\lambda(\mu) \to \infty$ für $n \to \infty$.*

Beweis:
(i)$\Longrightarrow$(ii): Die Einheitskugel $B := \{f \in D; (\mathfrak{h} + \mu + 1)[f] \leq 1\}$ ist nach [57], Theorem XIII.64 kompakt in L^2. Da die Bedingung an die Träger von f_n außerdem $f_n \xrightarrow{w} 0$ sichert, folgt die Normkonvergenz.
(ii) $\Longrightarrow$(iii): Angenommen, es gibt $\lambda > 0$ und c mit $Av_{G_n}^\lambda(\mu) < c$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann existiert $f_n \in D$ mit $\tilde{f}_n = 0$ auf K_n, $\|f_n\|_2 = 1$, $\mathfrak{h}[f_n] \leq \lambda$ und $\mu[f_n] \leq c$. Insbesondere ist $(\mathfrak{h} + \mu + 1)[f_n] \leq \lambda + c$, aber $\|f_n\|_2 \not\to 0$, im Widerspruch zu (ii).
(iii)$\Longrightarrow$(i): Angenommen $\lambda \in \sigma_{ess}(H + \mu)$. Dann gibt es nach Proposition 6.6 eine Folge (f_n) in D mit $\tilde{f}_n = 0$ q.ü. auf K_n, $\|f_n\| = 1$ und $(\mathfrak{h} + \mu)[f_n] \to \lambda$ für $n \to \infty$. O.E. $(\mathfrak{h} + \mu)[f_n] \leq \lambda + 1$. Damit ist $Av_{G_n}^\lambda(\mu) \leq \lambda + 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$, (iii) also nicht erfüllt. □

7. Schrödingeroperatoren

Zusammenfassung: Die Ergebnisse der letzten Abschnitte werden für Schrödingeroperatoren präzisiert und verbessert. Ein Kriterium für Konvergenz im Normresolventensinn wird bewiesen und auf die Frage nach der Kompaktheit von Resolventendifferenzen angewendet.

In diesem Abschnitt verfolgen wir mehrere Ziele. Zunächst sollen die Aussagen aus den letzten beiden Paragraphen für $H = -\frac{1}{2}\Delta$ rekapituliert und präzisiert werden. Dabei haben wir einerseits an Leser gedacht, die primär an Anwendungen für Schrödingeroperatoren interessiert sind und für die es umständlich ist, die für sie interessanten Resultate in dem vorher skizzierten allgemeinen Setting zu erkennen. Andererseits kann man die zusätzlichen Strukturen im Fall $E = \mathbb{R}^d$, $H = -\frac{1}{2}\Delta$ ausnutzen, um die abstrakten Ergebnisse zu verbessern oder leichter handhabbare Kriterien zu finden. Außerdem werden wir eine abgeschlossene Menge B endlicher Kapazität angeben, für die die Halbgruppendifferenz ein Hilbert–Schmidtoperator endlicher Spur ist, der nicht in der Spurklasse liegt. Ein weiteres Hilfsmittel von großem Nutzen stellen wir mit dem "lokalen Test", Satz 7.5, vor. Dabei wird die Normresolventenkonvergenz von Schrödingeroperatoren auf Abschätzungen auf Würfeln zurückgeführt. Neben einer Anwendung auf ein Kompaktheitskriterium, das wir in diesem Abschnitt vorstellen, wird der lokale Test auch in Abschnitt 8 eine wichtige Rolle spielen.

Zunächst soll nun der Operator $-\frac{1}{2}\Delta$ auf $\mathbb{R}^d$ genauer untersucht werden. Als Standardreferenz verweisen wir dafür auf [63]. Der Definitionsbereich der zugehörigen Form ist offenbar $D = W^{1,2}(\mathbb{R}^d)$, und für offenes G ist der in Abschnitt 1 definierte Operator H_G der Dirichlet–Laplaceoperator, mit Formdefinitionsbereich $W^{1,2}(G)$ und Definitionsbereich $D(H_G) = W^{2,2}(G) \cap W_0^{1,2}(G)$. (Dabei haben wir verwendet, daß

$$\overline{C_c^\infty(G)}^{W^{1,2}} = \overline{C_c(G) \cap W^{1,2}}^{W^{1,2}} = W_0^{1,2}(G),$$

was wir in etwas allgemeinerem Rahmen im Beweis von 10.3 beweisen werden.)

Wie in Abschnitt 2 erwähnt, ist die Katoklasse K_d (in [63] wird die Dimension mit ν bezeichnet) mit Hilfe der Fundamentallösung von $-\frac{1}{2}\Delta$ definiert, und für $V^- \geq 0$ ist

$$V^- \in K_d \iff V^- dx \in \mathcal{S}_K,$$

wenn man $\mathcal{S}_K$ bezüglich der klassischen Dirichletform auf $\mathbb{R}^d$, also bezüglich der zu $-\frac{1}{2}\Delta$ gehörigen Form bildet. Als Positivteil des Potentials können wir in unserem Rahmen beliebige meßbare Funktionen $V^+ : \mathbb{R}^d \to [0, \infty]$ betrachten, da für solche V^+ offenbar $V^+ dx \in \mathcal{M}_0$ gilt. Etwas traditioneller ist die Bedingung $V^+ \in L^1_{loc}$, unter der man erhält, daß die zugehörige Form dicht definiert ist. Ist $V^+ \in L^2_{loc}$, so kann man $-\frac{1}{2}\Delta + V$ auf C_c^∞ definieren, und $-\frac{1}{2}\Delta + V$ beziehungsweise $(-\frac{1}{2}\Delta + V)_G$ als Friedrichsfortsetzung des symmetrischen Operators $-\frac{1}{2}\Delta + V$ auf C_c^∞ beziehungsweise $C_c^\infty(G)$ betrachten. Die Halbgruppe $(\exp(-Ht)) = (\exp(\frac{1}{2}\Delta))$ hat "natürlich" die lokale Dimension d, es gilt ja

$$\|\exp(\frac{1}{2}\Delta)\|_{1,\infty} = \sup \exp(\frac{1}{2}\Delta)(x, y) = (2\pi t)^{-d/2} \qquad (0 < t < \infty).$$

Daß diese endliche Dimension bei Störungen mit K_d-Negativteilen erhalten bleibt, findet sich in [63], Theorem B.6.3, wobei dort allerdings eine unnötige Zusatzforderung an den Positivteil gestellt wird.

Das $\frac{1}{2}$ beim Laplaceoperator haben wir gewählt, damit der zu $-\frac{1}{2}\Delta$ gehörige Prozeß die *Brownsche Bewegung* wird. Wir können das *Spiegelungsprinzip* (siehe zum Beispiel [61]) dazu verwenden, um die Aussage (1) in der folgenden Proposition zu erhalten, zu deren Formulierung wir die *verallgemeinerte Oberfläche* einer kompakten Menge S als

$$\sigma(S) = \sup_{r\geq 0} \frac{\lambda\{x; r \leq \operatorname{dist}(x,S) \leq r+1\}}{r^d+1}$$

definieren. Es gilt (siehe [50])

7.1. Proposition. (1) *Für $\eta < 1/2$ gibt es eine Konstante $c = c(d,\eta)$ so, daß für alle abgeschlossenen $B \subset \mathbb{R}^d$ mit $r(x) := dist(x,B)$ die folgende Ungleichung gilt:*

$$\mathbb{P}^x\{\tau_B \leq t\} \leq c \cdot e^{-\eta r(x)^2/t}$$

(2) *Für $t > 0$ und $p > 0$ gibt es $C = C(d,t,p)$ so, daß für alle kompakten $S \subset \mathbb{R}^d$ die folgende Ungleichung gilt:*

$$\int_{\mathbb{R}^d} (\mathbb{P}^x[\tau_S \leq t])^p \, dx \leq C\sigma(S).$$

Wir bemerken, daß sich aus (1) der vorherigen Proposition zusammen mit den Sätzen 5.3 und 5.6 das folgende Korollar ergibt:

7.2. Korollar. *Sei $V^- \in K_d$, V^+ meßbar und $B \subset \mathbb{R}^d$ abgeschlossen. Setze $r(x) := dist(x,B)$ und $G := B^c$.*

(1) *Ist $I := \int \exp(-\eta r(x)^2/t)dx < \infty$ für ein $\eta < 1/2$, so ist*

$$\|e^{-(-\frac{1}{2}\Delta+V)2t} - e^{-(-\frac{1}{2}\Delta+V)_G 2t}\|_{HS} \leq c \cdot I^{1/2}.$$

(2) *Ist $I < \infty$ für ein $\eta < 1/4$, so ist*

$$\|e^{-(-\frac{1}{2}\Delta+V)2t} - e^{-(-\frac{1}{2}\Delta+V)_G 2t}\|_N \leq c \cdot I.$$

(3) *Ist $W^- \in K_d$ und W^+ meßbar mit $V = W$ außerhalb von B, so gelten die Abschätzungen aus (1),(2) für die Differenz $e^{-(-\frac{1}{2}\Delta+V)2t} - e^{-(-\frac{1}{2}\Delta+W)2t}$ entsprechend.*

Wir steuern nun auf ein Beispiel zu, welches aus verschiedenen Gründen bemerkenswert ist: Es handelt sich dabei um eine abgeschlossene Menge B endlicher Kapazität, für welche $\exp(-Ht) - \exp(-H_G t)$ kein Spurklasseoperator ist. Das zeigt zunächst, daß die Voraussetzungen von 5.3 für Spurklassedifferenz nicht ausreichend sind. Zudem sieht man, daß eine Ankündigung aus [10] zu optimistisch war. Schließlich handelt es sich dabei um einen "natürlich" auftretenden Integraloperator mit positivem Kern, für den die Spur endlich ist, der aber kein Spurklasseoperator ist, was angesichts einer Bemerkung von Simon in [62], Remark 2, S. 37, völlig unerwartet ist.

Wir erinnern an die Birman–Solomjak–Räume

$$l^1(L^2) = \{f \in L^2_{loc}; \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \|\chi_k f\|_2 < \infty\},$$

wobei χ_k die Indikatorfunktion eines Würfels mit Kantenlänge 1 um k bezeichnet. Die folgenden Resultate des Autors wurden in [22] veröffentlicht:

7.3. Proposition. *Sei B eine abgeschlossene Menge endlicher Kapazität, für die $\chi_B \notin l^1(L^2)$. Dann ist für alle $t > 0$ die Halbgruppendifferenz $\exp(-Ht) - \exp(-H_G t)$ ein Hilbert–Schmidt–Operator endlicher Spur, der nicht Spurklasse ist.*

Beweis:
Die Operatoren $D(t) = \exp(-Ht) - \exp(-H_G t), \exp(-Ht), \exp(-H_G t)$ besitzen alle stetige, nichtnegative Kerne. Wir wollen zeigen

$$\mathrm{tr}(D(t)) := \int D(t)[x,x]dx < \infty \qquad (*),$$

wobei wir mit $A[x,y]$ den Kern des Operators A bezeichnen. Wir bemerken zunächst, daß mit der Definition der Spur als Integral des Kerns über die Diagonale wie in $(*)$ die Gleichung $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$ eine einfache Konsequenz aus den Sätzen von Fubini–Tonelli ist (für Operatoren mit stetigen, nicht–negativen Kernen). Um $(*)$ zu beweisen, schreiben wir

$$D(2t) = e^{-Ht}D(t) + D(t)e^{-H_G t},$$

und erhalten mit den Überlegungen von eben:

$$\begin{aligned} \mathrm{tr}D(2t) &= \mathrm{tr}(e^{-Ht}D(t)) + \mathrm{tr}(D(t)e^{-H_G t}) \\ &= \mathrm{tr}(e^{-Ht/2}D(t)e^{-Ht/2}) + \mathrm{tr}(e^{-H_G t/2}D(t)e^{-H_G t/2}) \\ &< \infty, \end{aligned}$$

wobei wir [62], Theorem 3.9, S. 50 ausnutzen, denn aus 4.3 folgt

$$e^{-Ht/2}D(t)e^{-Ht/2}, e^{-H_G t/2}D(t)e^{-H_G t/2} \in \mathfrak{N}.$$

Genauer:

$$\underbrace{L^2 \xrightarrow{e^{-Ht/2}} L^\infty \xrightarrow{D(t)} L^1}_{B}\underbrace{\xrightarrow{e^{-Ht/2}} L^2}_{A}$$

ist eine Zerlegung wie in 4.3 gefordert, wobei man

$$\Phi(x) := const \cdot D(t)1(x) = const \cdot \mathbb{P}^x\{\tau_B \le t\}$$

setzen kann. Aus 5.3 folgt, daß $D(t)$ ein Hilbert–Schmidt–Operator ist.
Wäre $D(t)$ in der Spurklasse, so auch $\chi_B D(t) = \chi_B \exp(-Ht)$. Dafür ist nach [62], Proposition 4.7, S. 55 nötig, daß $\chi_B \in l^1(L^2)$, im Widerspruch zur Annahme. □

7.4. Beispiel. Sei $d \ge 5$ und $B_n := K_{r_n}(n, 0, ..., 0)$ mit $r_n := n^{-2/d}$. Dann erfüllt $B = \bigcup_n B_n$ die Bedingungen aus Proposition 7.3.

Um das einzusehen, überzeugt man sich mit Hilfe von Skalierungsargumenten davon, daß $\mathrm{cap}(B_n) \le cr_n^{d-2}$, woraus $\mathrm{cap}(B) < \infty$ mit der Subadditivität der Kapazität folgt. Andererseits ist, für n genügend groß, $\|\chi_n \chi_B\|_2 = \|\chi_{B_n}\|_2 = cr_n^{d/2}$, so daß $\chi_B \notin l^1(L^2)$. In [23] finden Leser zusätzliche Informationen zu diesem Beispiel.

Wir stellen nun ein Kriterium für Konvergenz im Normresolventensinn vor, das wir den "lokalen Test" nennen. Dazu schreiben wir Γ_L für die Menge aller offenen Würfel mit Kantenlänge L.

7.5. Satz. *Seien $\mu_n, \mu \in \mathcal{M}_0 - \hat{\mathcal{S}}_K(a,\gamma)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\gamma < 1, a > 0$ fest. Zwischen den Bedingungen*

(i) $-\frac{1}{2}\Delta + \mu_n \xrightarrow{nrs} -\frac{1}{2}\Delta + \mu$.

(ii) *Für all $L > 0$ konvergiert*

$$\sup_{C \in \Gamma_L} \|(-\tfrac{1}{2}\Delta + \chi_C \mu_n + i)^{-1} - (-\tfrac{1}{2}\Delta + \chi_C \mu + i)^{-1}\| \to 0 \text{ für } n \to \infty.$$

(ii') *Für alle $L > 0$ konvergiert*

$$\sup_{C \in \Gamma_L} \|(-\tfrac{1}{2}\Delta + \mu_n + i)_C^{-1} - (-\tfrac{1}{2}\Delta + \mu + i)_C^{-1}\| \to 0 \text{ für } n \to \infty.$$

(iii) *Für alle (ein) $L > 0$ konvergiert*

$$\sup_{C \in \Gamma_L} \| \left((-\tfrac{1}{2}\Delta + \mu_n + i)^{-1} - (-\tfrac{1}{2}\Delta + \mu + i)^{-1}\right) \chi_C \| \to 0 \text{ für } n \to \infty.$$

haben wir folgende Implikationen: (ii)$\Longrightarrow$ (iii) $\Longrightarrow$ (i) $\Longrightarrow$ (iii) *and* (ii') $\Longrightarrow$ (iii). *Ist, für alle $n \in \mathbb{N}$, entweder $\mu_n \leq \mu$ oder $\mu_n \geq \mu$, so sind* (i)-(iii) *äquivalent.*

Dieser Satz ist zumindest teilweise bekannt (siehe zum Beispiel [41]). Es scheint jedoch sinnvoll, ihn in der gegebenen Form zu isolieren, weil er für uns ein wichtiges Hilfsmittel darstellt. Dabei haben wir die allgemeine Form mit Maßstörungen gewählt, da wir ihn später auf Potentiale und Dirichlet–Randbedingungen anwenden. Diejenigen anwendungsorientierten Leser (für die dieser Abschnitt ja vor allem geschrieben ist), denen beim Anblick von Maßstörungen unbehaglich wird, mögen das μ einfach als V lesen, und den kleinen Ausrutscher verzeihen. (Noch besser wäre natürlich, sie würden sich durch einen Blick in die ersten Abschnitte davon überzeugen, daß ihr Unbehagen ganz unnötig ist.)

Wir stellen nun zunächst zwei exponentielle Abschätzungen bereit, von denen die erste manchmal als Combes–Thomas–Argument bezeichnet wird.

7.6. Lemma. *Seien $a > 0$, $\gamma < 1$ und $K \subset \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ kompakt. Dann existieren C und $\eta > 0$ so, daß für alle $\mu \in \mathcal{M}_0 - \hat{\mathcal{S}}_K(a,\gamma)$, $\lambda \in K$ und alle $\chi, \tilde{\chi} \in L^\infty$ mit $\|\chi\|_\infty, \|\tilde{\chi}\|_\infty \leq 1$ und $dist(supp\chi, supp\tilde{\chi}) = \delta$ die folgenden Abschätzungen gelten:*

$$\|\chi(-\tfrac{1}{2}\Delta + \mu + \lambda)^{-1}\tilde{\chi}\|_{2,2} \leq C \cdot \exp(-\eta \cdot \delta),$$
$$\|\chi\partial_i(-\tfrac{1}{2}\Delta + \mu + \lambda)^{-1}\tilde{\chi}\|_{2,2} \leq C \cdot \exp(-\eta \cdot \delta) \qquad (i = 1, \ldots, d).$$

Beweis:
Abgesehen von der zusätzlichen Störung durch μ ist die Aussage mit Lemma 3.1 aus [74] identisch. Man kann den dort gegebenen Beweis nun mühelos übertragen, wenn man benutzt, daß man wegen Satz 2.4 nur Potentiale betrachtet werden müssen und die Normen

$$\|\partial_i(-\tfrac{1}{2}\Delta + \mu + \lambda)^{-1}\|$$

wegen 2.2 gleichmäßig für $V^- \in \hat{\mathcal{S}}_K(a,\gamma)$ und $\lambda \in K$ beschränkt sind. □

In 10.6 beweisen wir eine teilweise Verallgemeinerung, indem wir statt des Laplaceoperators einen elliptischen Operator in Divergenzform zulassen. Dort verzichten wir allerdings (mangels Anwendungen) auf die Betrachtung von Potentialtermen.

7.7. Proposition. *Seien $a > 0$ und $\gamma < 1$. Dann gibt es $\eta > 0$, und für jedes $\varepsilon > 0$ ein C_ε, so daß für alle $B, C \in \mathfrak{B}$ mit dist$(B,C) =: \delta > 0$, alle $\mu, \nu \in \mathcal{M}_0 - \hat{\mathcal{S}}_K(a,\gamma)$ mit $\mu \sim \nu$ außerhalb B und alle λ groß genug (abhängig nur von a, γ) die folgende Ungleichung gilt:*

$$\| \left((-\tfrac{1}{2}\Delta + \mu + \lambda)^{-1} - (-\tfrac{1}{2}\Delta + \nu + \lambda)^{-1} \right) \chi_C \| \leq \varepsilon + C_\varepsilon e^{-\eta \cdot \delta^2}.$$

Insbesondere folgt $\| \left((-\frac{1}{2}\Delta + \mu + \lambda)^{-1} - (-\frac{1}{2}\Delta + \nu + \lambda)^{-1} \right) \chi_C \| \to 0$ gleichmäßig für dist$(B,C) \to \infty$.

Beweis:
Sei $\gamma < \overline{\gamma} < 1$, $p := \overline{\gamma}/\gamma$ und q der zu p konjugierte Exponent. Für $f \in L^p$ mit $\|f\|_p \leq 1$ können wir mit Hilfe der Hölderungleichung wie folgt abschätzen:

$$\begin{aligned}
&|\chi_C(x) \left(e^{-(-\frac{1}{2}\Delta + V)t} - e^{-(-\frac{1}{2}\Delta + V + \infty_B)t} \right) f(x)|^p \\
\leq\ & \chi_C(x) \left(\mathbb{P}^x\{\tau_B \leq t\} \right)^{p/q} \mathbb{E}^x \{ e^{-p\int_0^t V \circ X_s ds} \cdot |f|^p \circ X_t \} \\
=\ & \chi_C(x) \left(\mathbb{P}^x\{\tau_B \leq t\} \right)^{p/q} \left(e^{-(-\frac{1}{2}\Delta + pV)t}(|f|^p) \right)(x).
\end{aligned}$$

Da $|f|^p$ in der Einheitskugel von L^1 liegt, folgt

$$\|\chi_C \left(e^{-(-\frac{1}{2}\Delta + V)t} - e^{-(-\frac{1}{2}\Delta + V + \infty_B)t} \right) \|_{p,p} \leq \left(\sup_{x \in C} \mathbb{P}^x\{\tau_B \leq t\} \right)^{1/q} \cdot \|e^{-(-\frac{1}{2}\Delta + pV)t}\|_{1,1} \quad (\heartsuit).$$

Mit 7.1 erhalten wir

$$\left(\sup_{x \in C} \mathbb{P}^x\{\tau_B \leq t\} \right)^{1/q} \leq C \cdot e^{-\frac{\eta\delta^2}{t}} \qquad (\diamondsuit)$$

Für geeignetes $C, \eta > 0$. Wir wollen nun aus der letzten Ungleichung den gewünschten exponentiellen Abfall herleiten, indem wir ausnutzen, daß sich die Resolvente als Integral über die Halbgruppe schreiben läßt, für das $(\diamondsuit)$ die gewünschte Ungleichung für beschränkte t–Intervalle liefert, und bei ∞ wegen der Voraussetzung an die Potentiale eine gemeinsame integrierbare Majorante existiert.

Aus 2.2 folgt, daß

$$\|e^{-(-\frac{1}{2}\Delta + pV)t}\|_{1,1} \leq M e^{\omega t} \qquad (\square)$$

mit Konstanten, die nur von $a, \overline{\gamma}$ also von a, γ abhängen (denn $k(a, pV^-) = pk(a, V^-) \leq \overline{\gamma}$). Für $\lambda > -\omega$ sind die Operatoren $-\frac{1}{2}\Delta + pV + \lambda$ gleichmäßig mit positiver Schranke nach unten beschränkt und

$$\|e^{-(-\frac{1}{2}\Delta + pV)t}\|_{2,2} \leq M e^{(\omega - \lambda)t} \qquad (t \geq 0).$$

Für geeignetes $t_0 = t_0(a, \gamma, \varepsilon)$ ist

$$\int_{t_0}^\infty \|\chi_C \left(e^{-(-\frac{1}{2}\Delta + V + \lambda)t} - e^{-(-\frac{1}{2}\Delta + V + \infty_B + \lambda)t} \right) \|_{2,2} dt < \varepsilon \qquad (\bigcirc)$$

gleichmäßig für $V^- \in \hat{\mathcal{S}}_K(a,\gamma)$. Mit Riesz–Thorin (siehe A5) (und eventuell Dualität) erhält man aus $(\heartsuit), (\Box)$ und $(\Diamond)$ ein (neues) η und $C = C(t_0)$ mit

$$\|\chi_C \left(e^{-(-\frac{1}{2}\Delta+V+\lambda)t} - e^{-(-\frac{1}{2}\Delta+V+\infty_B+\lambda)t}\right)\|_{2,2} \leq Ce^{-\eta\delta^2} \qquad (t \leq t_0).$$

Zusammen mit $(\bigcirc)$ erhält man

$$\begin{aligned}
&\|\chi_C \left((-\tfrac{1}{2}\Delta + V + \lambda)^{-1} - (-\tfrac{1}{2}\Delta + V + \infty_B + \lambda)^{-1}\right)\|_{2,2} \\
= \;& \|\int_0^\infty \chi_C \left(e^{-(-\frac{1}{2}\Delta+V+\lambda)t} - e^{-(-\frac{1}{2}\Delta+V+\infty_B+\lambda)t}\right) dt\|_{2,2} \\
\leq \;& \int_0^{t_0} \|\chi_C \left(e^{-(-\frac{1}{2}\Delta+V+\lambda)t} - e^{-(-\frac{1}{2}\Delta+V+\infty_B+\lambda)t}\right)\|_{2,2} dt \\
& + \int_{t_0}^\infty \|\chi_C \left(e^{-(-\frac{1}{2}\Delta+V+\lambda)t} - e^{-(-\frac{1}{2}\Delta+V+\infty_B+\lambda)t}\right)\|_{2,2} dt \\
\leq \;& C_\varepsilon e^{-\eta\delta^2} + \varepsilon
\end{aligned}$$

Wie im Beweis von 5.3 sieht man, daß es genügt, diesen Fall, $\mu = V$ und $\nu = V + \infty_B$ zu betrachten. $\Box$

Es ist interessant, an dieser Stelle zu rekapitulieren, worauf sich die beiden Hilfsmittel Lemma 7.6 und Proposition 7.7 stützen. Das Combes–Thomas–Argument basiert auf der Tatsache, daß $-\frac{1}{2}\Delta$ ein Differentialoperator ist, dessen intrinsische Metrik gerade der euklidische Abstand ist (siehe die Bemerkung im Anschluß an 10.6). Im Beweis von 7.7 haben wir auf das Spiegelungsprinzip für die Brownsche Bewegung zurückgegriffen. Damit erkennt man die Chancen, aber auch die Grenzen möglicher Verallgemeinerungen der eben genannten Resultate und des "lokalen Tests".

Beweis von Satz 7.5:
(ii)$\Longrightarrow$(iii):
Sei $L > 0$ und $\varepsilon > 0$. Für $C \in \Gamma_L$ wähle einen Würfel W mit demselben Mittelpunkt, dessen Kanten zu denen von C parallel sind mit Abstand $\mathrm{dist}(C, W^c) =: R$ (den man sich als groß vorzustellen hat). Nun stimmen μ_n und $\mu_n\chi_W$ außerhalb von $B := W^c$ überein; es gilt, wegen Proposition 7.7,

$$\|\left((-\tfrac{1}{2}\Delta + \mu_n + \lambda)^{-1} - (-\tfrac{1}{2}\Delta + \mu_n\chi_W + \lambda)^{-1}\right)\chi_C\| \leq \varepsilon + C_\varepsilon e^{-\eta R^2}$$

und

$$\|\left((-\tfrac{1}{2}\Delta + \mu + \lambda)^{-1} - (-\tfrac{1}{2}\Delta + \mu\chi_W + \lambda)^{-1}\right)\chi_C\| \leq \varepsilon + C_\varepsilon e^{-\eta R^2}$$

mit Konstanten, die nicht von n oder der Lage des Würfels abhängen. Wählt man zuerst W (und damit R) groß und läßt dann $n \to \infty$ gehen, so folgt die gewünschte Konvergenz mit

$$\begin{aligned}
&\|\left((-\tfrac{1}{2}\Delta + \mu_n + \lambda)^{-1} - (-\tfrac{1}{2}\Delta + \mu + \lambda)^{-1}\right)\chi_C\| \leq \\
&2\left(\varepsilon + C_\varepsilon e^{-\eta R^2}\right) + \|(-\tfrac{1}{2}\Delta + \mu_n\chi_W + \lambda)^{-1} - (-\tfrac{1}{2}\Delta + \mu\chi_W + \lambda)^{-1}\|.
\end{aligned}$$

(ii')$\Longrightarrow$(iii):
Hier kann man analog verfahren, denn

$$(-\tfrac{1}{2}\Delta + \mu_n + \lambda)_W^{-1} = (-\tfrac{1}{2}\Delta + \mu_n + \infty_B + \lambda)^{-1}$$

mit den Bezeichnungen von oben, so daß man beim Vergleich von

$$(-\tfrac{1}{2}\Delta + \mu_n + \lambda)_W^{-1}\chi_C$$

und

$$(-\tfrac{1}{2}\Delta + \mu_n + \lambda)^{-1}\chi_C$$

wieder Proposition 7.7 verwenden kann.
(iii)$\Longrightarrow$(i):
Dafür benutzen wir den exponentiellen Abfall aus dem Lemma 7.6. Wir schreiben χ_k für die charakteristische Funktion des achsenparallelen Würfels mit Kantenlänge 1 um $k \in \mathbb{Z}^d$. Es folgt

$$(-\tfrac{1}{2}\Delta + \mu_n + i)^{-1} - (-\tfrac{1}{2}\Delta + \mu + i)^{-1} = \sum_{k,l\in\mathbb{Z}^d} \chi_l \left((-\tfrac{1}{2}\Delta + \mu_n + i)^{-1} - (-\tfrac{1}{2}\Delta + \mu + i)^{-1}\right)\chi_k.$$

Mit $\chi_l\left((-\tfrac{1}{2}\Delta + \mu_n + i)^{-1} - (-\tfrac{1}{2}\Delta + \mu + i)^{-1}\right)\chi_k =: C_{k,l}(n)$ gilt für f, g in der Einheitskugel von L^2:

$$\begin{aligned}(f|\left((-\tfrac{1}{2}\Delta + \mu_n + i)^{-1} - (-\tfrac{1}{2}\Delta + \mu + i)^{-1}\right)g) &= \sum_{k,l\in\mathbb{Z}^d} (\chi_l f|C_{k,l}(n)\chi_k g)\\ &\leq \sum_{k,l\in\mathbb{Z}^d} \|\chi_l f\|_2 \|C_{k,l}(n)\chi_k g\|_2\\ &\leq \|C(n)\|,\end{aligned}$$

wobei $C(n)$ die $\mathbb{Z}^d \times \mathbb{Z}^d$-Matrix $(\|C_{k,l}(n)\|)_{k,l}$ (als Operator auf $l^2(\mathbb{Z}^d)$) bezeichnet, denn die Folgen $(\|\chi_l f\|_2)$ und $(\|\chi_k g\|_2)$ sind in der Einheitskugel von $l^2(\mathbb{Z}^d)$. Es bleibt also zu zeigen, daß $\|C(n)\| \to 0$ für $n \to \infty$, wofür wir den Schur–Test (siehe [89], Satz 6.23) verwenden, das heißt wir zeigen

$$\sup_k \sum_{k,l} \|C_{k,l}(n)\| \to 0 \text{ für } n \to \infty \qquad (\heartsuit).$$

Dazu schreiben wir

$$\|C_{k,l}(n)\| = \|C_{k,l}(n)\|^{1/2}\|C_{k,l}(n)\|^{1/2},$$

und wenden auf einen der Faktoren die Voraussetzung an. Die andere Wurzel fällt für $|l| \to \infty$ gemäß Lemma 7.6 exponentiell, was zusammen die Konvergenz $(\heartsuit)$ impliziert.
Es bleibt die Implikationen (i)$\Longrightarrow$(ii),(ii') zu zeigen, falls für $n \in \mathbb{N}$ jeweils $\mu \leq \mu_n$ oder $\mu \geq \mu_n$ ist. Wir betrachten den ersten Fall. Es folgt ähnlich wie im Beweis von 3.3, daß für $f \geq 0$

$$0 \leq \left(e^{-(-\frac{1}{2}\Delta+\mu+\infty_B+\lambda)t} - e^{-(-\frac{1}{2}\Delta+\mu_n+\infty_B+\lambda)t}\right) f \leq \left(e^{-(-\frac{1}{2}\Delta+\mu+\lambda)t} - e^{-(-\frac{1}{2}\Delta+\mu_n+\lambda)t}\right) f,$$

woraus man mit Integration, für λ genügend groß, die Ungleichung

$$0 \leq \left((-\tfrac{1}{2}\Delta + \mu + \infty_B + \lambda)^{-1} - (-\tfrac{1}{2}\Delta + \mu_n + \infty_B + \lambda)^{-1}\right) f \leq$$

$$\left((-\tfrac{1}{2}\Delta + \mu + \lambda)^{-1} - (-\tfrac{1}{2}\Delta + \mu_n + \lambda)^{-1}\right) f$$

erhält. Die Normkonvergenz unter (i) impliziert damit (ii'). Analog verfährt man, falls $\mu \geq \mu_n$ und für den Beweis von (i)$\Longrightarrow$(ii). $\square$

Für das direkte Argument mit dem Schur–Test im Beweis der Implikation (iii)$\Longrightarrow$(i) hat mir E. Mourre einen wichtigen Hinweis gegeben; merci beaucoup. In diesem Zusammenhang könnte man auch das Cotlar–Stein–Lemma (siehe [26]) verwenden, wie B. Helffer bemerkt hat. Auch ihm merci beaucoup. (Bei letzterer Methode würde der Beweis aber letztendlich etwas komplizierter.)

Auf den ersten Blick könnte man vermuten, daß (ii), (ii') trivialerweise aus (i) folgen, und die zusätzliche Voraussetzung in diesem Fall unnötig ist. Das folgende Beispiel zeigt jedoch, daß im allgemeinen die Implikation (i)$\Longrightarrow$(ii) falsch ist. Der Grund sind starke Oszillationen, die dazu führen können, daß die "Konvergenz der ganzen Potentiale" sich nicht auf die "Teile" überträgt.

7.8. Beispiel. Setze $V_n := (-1)^n n(\chi_{(-n^{-1},0)} + \chi_{(0,n^{-1})})$ in $\mathbb{R}^d$. Da die vage Konvergenz der Maße in einer Dimension die Normresolventenkonvergenz impliziert (siehe [8], Satz 4.4), folgt, daß

$$-\tfrac{1}{2}\Delta + V_n \xrightarrow{nrs} -\tfrac{1}{2}\Delta,$$

während für $C = (0,1)$ die Folge $-\frac{1}{2}\Delta + V_n\chi_C$ nicht konvergiert. Dazu bemerkt man (wieder mit vager Konvergenz), daß für die Teilfolge der geraden und die der ungeraden Zahlen verschiedene Limiten existieren.

Dieses Beispiel hat uns auch der Hoffnung beraubt, daß im allgemeinen (i)$\Longrightarrow$(ii') gilt.

Als Folgerung aus dem lokalen Test beweisen wir nun eine Kriterium für die Kompaktheit von Resolventendifferenzen:

7.9. Satz. *Seien $\mu, \nu \in \mathcal{M}_0 - \hat{\mathcal{S}}_K$ mit $k(\mu^-), k(\nu^-) < 1/2$ und $\mu \sim \nu$ außerhalb $B \in \mathfrak{B}$. Sei W_0 der Einheitswürfel. Gilt*

$$\operatorname{cap}(B \cap (W_0 + x)) \to 0 \text{ für } |x| \to \infty,$$

so ist $(-\frac{1}{2}\Delta + \mu + i)^{-1} - (-\frac{1}{2}\Delta + \nu + i)^{-1} \in \mathfrak{K}(L^2)$.

Beweis:
Für $R > 0$ setzen wir χ_R für die charakteristische Funktion der Kugel $K(0,R)$ um 0 mit Radius R. Dann sind nach 5.4

$$(-\tfrac{1}{2}\Delta+(1-\chi_R)\mu+i)^{-1}-(-\tfrac{1}{2}\Delta+\mu+i)^{-1}, (-\tfrac{1}{2}\Delta+(1-\chi_R)\nu+i)^{-1}-(-\tfrac{1}{2}\Delta+\nu+i)^{-1} \in \mathfrak{K}(L^2),$$

es bleibt also zu zeigen

$$\|(-\tfrac{1}{2}\Delta + (1-\chi_R)\mu + i)^{-1} - (-\tfrac{1}{2}\Delta + (1-\chi_R)\nu + i)^{-1}\| \to 0 \text{ für } R \to \infty.$$

Das folgt nun aber aus dem lokalen Test. Nach Voraussetzung konvergiert für alle $L > 0$

$$\sup_{W \in \Gamma_L, W \not\subset K(0,R)} \operatorname{cap}(B \cap W) \to 0 \text{ für } R \to \infty. \qquad (\spadesuit)$$

Da

$$\sup_{C \in \Gamma_L} \|(-\tfrac{1}{2}\Delta + (1-\chi_R)\mu + i)_C^{-1} - (-\tfrac{1}{2}\Delta + (1-\chi_R)\nu + i)_C^{-1}\| =$$

$$= \sup_{W \in \Gamma_L, W \not\subset K(0,R)} \|(-\tfrac{1}{2}\Delta + (1-\chi_R)\mu + i)_W^{-1} - (-\tfrac{1}{2}\Delta + (1-\chi_R)\nu + i)_W^{-1}\|$$

folgt die Behauptung, wenn man für letztere Differenz die Abschätzung aus 6.4 von der Halbgruppendifferenz auf die Resolventendifferenz überträgt, und ($\spadesuit$) dabei ausnutzt. Genauer erhält man aus Satz 5.3 mit ähnlichen Argumenten wie im Beweis von Proposition 7.7, daß für $\varepsilon > 0$ eine Konstante C_ε existiert,so daß für Maße $\mu_1, \mu_2 \in \mathcal{M}_0 - \hat{\mathcal{S}}_K(a, \gamma)$, $a > 0, \gamma < 1/2$ mit $\mu_1 \sim \mu_2$ außerhalb einer Menge $A \in \mathfrak{B}$, und $\varepsilon > 0$ die folgende Ungleichung gilt

$$\|(-\tfrac{1}{2}\Delta + \mu_1 + \lambda)^{-1} - (-\tfrac{1}{2}\Delta + \mu_2 + \lambda)^{-1}\| \leq \varepsilon + C_\varepsilon \operatorname{cap}(A)^{1/2}.$$

Das wird im nächsten Abschnitt noch einmal benutzt und in Lemma 8.5 gezeigt. Damit ist die Behauptung bewiesen. □

Es ist wohl nicht allzu schwierig, die Bedingung an die Katokonstanten im letzten Satz auf $k(\mu), k(\nu) < 1$ abzuschwächen, indem man wieder ein Holomorphie–Argument wie im Beweis von 5.4 verwendet. Wir vermuten, daß man für allgemeine Dirichletformen ein Analogon des letzten Satzes erhält, bei dem man fordert, daß man E so in "Scheiben" S_n (eventuell mit Zusatzbedingungen) zerschneiden kann, daß die Kapazitäten $\operatorname{cap}(B \cap S_n)$ für $n \to \infty$ gegen Null gehen. Für allgemeine Dirichletformen fehlt uns bis jetzt der Maßstab, an dem eine gleichmäßige (im $\mathbb{R}^d$ liefern das die Würfel gleicher Kantenlänge) lokale Konvergenz (ähnlich den Bedingungen (ii) und (ii') aus dem lokalen Test) gemessen werden könnte. Überlegungen in dieser Richtung sind wohl a priori auf lokale Dirichletformen beschränkt, und sollten die intrinsische Metrik berücksichtigen. Beiträge zu diesen Fragen halten wir für sehr wertvoll, da sie eine Verbindung zwischen der Geometrie des Zustandsraums und der Operator- beziehungsweise Spektraltheorie liefern.

8. Stetige Abhängigkeit vom Gebiet

Zusammenfassung: Es wird untersucht, inwiefern H_G stetig von G abhängt. Als Hilfsmittel wird dafür ein Kriterium für Normresolventenkonvergenz von Maßstörungen bewiesen.

Für Schrödingeroperatoren ist die Frage nach der Konvergenz $H_{G_n} \xrightarrow{srs} H_G$ bereits intensiv untersucht worden; siehe [53, 60, 90]. Im abstrakten Rahmen von 1.1 können wir ein sehr befriedigendes Resultat beweisen, welches die eben genannten Ergebnisse umfaßt und zudem sehr leicht zu beweisen ist. Wir schreiben

$$\overline{\lim} B_n := \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{k \geq n} B_k \,, \underline{\lim} B_n := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcap_{k \geq n} B_k$$

für Folgen (B_n) in $\mathfrak{B}$, und

$$G \sim G' \Longleftrightarrow D_0(G) = D_0(G').$$

(Siehe Abschnitt 1 für die Definition.)

8.1. Satz. *Sei $\mu \in \mathcal{M}_0 - \hat{\mathcal{S}}_K$ mit $k(\mu^-) < 1$. Seien $G_n \in \mathfrak{B}$ für $n \in \mathbb{N}$ mit $\overline{\lim}\, G_n \sim \underline{\lim}\, G_n$. Dann folgt*

$$(H + \mu)_{G_n} \xrightarrow{srs} (H + \mu)_G$$

für jedes $G \sim \overline{\lim}\, G_n$.

Da wir für die Konvergenz nur A2 benutzen, könnten wir den Negativteil μ^- durch eine beliebige Störung mit Formschranke kleiner Eins ersetzen.

Beweis:
Wir arbeiten mit $B_n := G_n^c$ und der Darstellung

$$(H + \mu)_G = H + \mu + \infty_B.$$

Um Schreibarbeit zu sparen, führen wir nur den Fall $\mu = 0$ aus. Setze

$$A_n := \bigcap_{k \geq n} B_k, \; C_n := \bigcup_{k \geq n} B_k$$

und bemerke, daß $A_n \nearrow \underline{\lim}\, B_n =: A$, $C_n \searrow \overline{\lim}\, B_n =: C$. Wir verwenden nun Sätze über monotone Formkonvergenz A2, um

$$\mathfrak{h} + \infty_{A_n} \xrightarrow{srs} \mathfrak{h} + \infty_A \qquad (\Diamond)$$

und

$$\mathfrak{h} + \infty_{C_n} \xrightarrow{srs} \mathfrak{h} + \infty_C \qquad (\Box)$$

zu beweisen. Mit A_n ist auch $\mathfrak{h} + \infty_{A_n}$ monoton steigend und A2 (1) liefert die Behauptung $(\Diamond)$, wenn man benutzt, daß $g = 0$ q.ü. auf A_n $(n \in \mathbb{N})$ genau dann, wenn $g = 0$ q.ü. auf A. Der

Beweis von (□) ist etwas schwieriger. Dazu bemerkt man, daß $\bigcup_n D(\mathfrak{h} + \infty_{C_n}) = \bigcup_n D_0(C_n^c)$ ein Ideal ist. Nach Bemerkung 1.8 und Satz 1.7 ist der Abschluß

$$\bigcup_n D_0(C_n^c) = D_0(M)$$

für geeignetes M. Aus A2 folgt, daß der Grenzwert von $\mathfrak{h} + \infty_{A_n}$ gerade $\mathfrak{h}|D_0(M)$ ist. Nach Voraussetzung ist

$$D_0(C_n) \subset D_0(M) \subset D_0(C) \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Deshalb können wir M so äquivalent modifizieren, daß $C_n \subset M \subset C$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist. Wegen $\bigcup_n C_n = C$ folgt die Behauptung. □

In diesem Beweis hat sich wieder die Nützlichkeit von Satz 1.7 gezeigt. Der letzte Satz wurde in [72] bewiesen, wo auch ausgeführt wird, wie man die Ergebnisse aus [53, 90] daraus folgern kann. Wir wenden uns nun der schwierigeren Frage zu, wann Normresolventenkonvergenz $H_{G_n} \xrightarrow{nrs} H_G$ vorliegt. Während man aus der starken Resolventenkonvergenz im wesentlichen Konvergenz der Eigenwerte unterhalb des wesentlichen Spektrums erhält (siehe [90]), folgt aus der Normresolventenkonvergenz die Stetigkeit des Spektrums und damit die Konvergenz aller isolierten Eigenwerte.

Wir setzen nun zusätzlich voraus, daß die Halbgruppe $(\exp(-Ht))$ ultrakontraktiv ist, da wir wesentlich Ergebnisse aus Abschnitt 5 benutzen wollen. Das folgende Kriterium ist von eigenständiger Bedeutung. Wir nennen dabei (μ_n) monoton, falls $\mu_n \le \mu_{n+1}$ oder $\mu_n \ge \mu_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ (siehe auch 2.7).

8.2. Satz. *Seien $a > 0, \gamma < 1/2$ und $\mu_n \in \mathcal{M}_0 - \hat{\mathcal{S}}_K(a,\gamma)$. Wir setzen voraus, daß (μ_n) monoton ist, und $\mu_n \sim \mu_1$ außerhalb einer Menge B_n, für die $\sup \operatorname{cap}(B_n) < \infty$ gilt. Dann folgt für alle $t > 0$*

$$\|e^{-(H+\mu_n)t} - e^{-(H+\mu_m)t}\|_{HS} \to 0 \text{ für } n, m \to \infty,$$

insbesondere konvergiert $(H + \mu_n)$ im Normresolventensinn.

Beweis:
Wegen 5.3 ist $D_n(t) = e^{-(H+\mu_n)t} - e^{-(H+\mu_1)t}$ eine beschränkte Folge in $\mathfrak{H}\mathfrak{S}$, deren zugehörige Kerne nach 2.7 monoton sind. Als beschränkte monotone Folge in L^2 besitzen die zugehörigen Kerne einen Grenzwert in L^2. Damit konvergiert D_n in $\mathfrak{H}\mathfrak{S}$. Die Normresolventenkonvergenz folgt dann aus der Darstellung der Resolvente als Laplacetransformierte der Halbgruppe. □

Für die symmetrische Differenz benutzen wir die Schreibweise

$$A \triangle B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

Damit können wir folgendes allgemeine Resultat über stetige Abhängigkeit vom Gebiet im Normresolventensinn formulieren:

8.3. Satz. *Sei* $\mu \in \mathcal{M}_0 - \hat{\mathcal{S}}_K$ *mit* $k(\mu^-) < 1/2$. *Für* $G_n \in \mathfrak{B}$ *nehmen wir an, daß* $\overline{\lim}\, G_n \sim \underline{\lim}\, G_n \sim G$, *und daß eine Menge* Σ *endlicher Kapazität existiert, mit* $G \triangle G_n \subset \Sigma$ *für* $n \in \mathbb{N}$. *Dann folgt* $(H+\mu)_{G_n} \xrightarrow{nrs} (H+\mu)_G$.

Beweis:
Mit den Bezeichnungen aus dem Beweis von Satz 8.1 können wir Satz 8.2 auf

$$\mu_n = \mu + \infty_{A_n}$$

anwenden und erhalten

$$H + \mu + \infty_{A_n} \xrightarrow{nrs} H + \mu + \infty_A.$$

Analog folgt

$$H + \mu + \infty_{C_n} \xrightarrow{nrs} H + \mu + \infty_C,$$

und mit

$$H + \mu + \infty_{A_n} \leq H + \mu + \infty_{B_n} \leq H + \mu + \infty_{C_n}$$

und

$$H + \mu + \infty_A = H + \mu + \infty_C = (H+\mu)_G$$

folgt die Behauptumg. □

Ein Nachteil des vorherigen Satzes ist die Tatsache, daß die Differenzen $G_n \triangle G$ in einer Menge endlicher Kapazität enthalten sein müssen, und somit bei Unendlich klein sein müssen. Dies schließt periodische Situationen aus. So kann man für $G_n := \mathbb{R}^d \setminus \bigcup_{k\in\mathbb{Z}^d} K(k, n^{-1})$ in Dimension $d \geq 2$ leicht erraten, daß

$$-\tfrac{1}{2}\Delta_{G_n} \xrightarrow{nrs} -\tfrac{1}{2}\Delta.$$

Dieses Beispiel können wir mit dem nächsten Satz behandeln, der speziell auf den Fall $\mathbb{R}^d$ zugeschnitten ist und auf dem "lokalen Test", 7.5 beruht.

8.4. Satz. *Sei* $\mu \in \mathcal{M}_0 - \hat{\mathcal{S}}_K$ *mit* $k(\mu^-) < 1/2$. *Seien* $G, G_n \in \mathfrak{B}$ $(n \in \mathbb{N})$ *und schreibe* Γ_L *für die Menge aller Würfel der Kantenlänge* L. *Gilt für ein (alle)* $L > 0$

$$\sup_{C\in\Gamma_L} \operatorname{cap}((G \triangle G_n) \cap C) \to 0 \text{ für } n \to \infty,$$

so folgt

$$(-\tfrac{1}{2}\Delta + \mu)_{G_n} \xrightarrow{nrs} (-\tfrac{1}{2}\Delta + \mu)_G \text{ für } n \to \infty.$$

Beweis:
Nach Definition von $k(\mu^-)$ existieren $a > 0$ und $\gamma < 1/2$ mit $\mu^- \in \hat{\mathcal{S}}_K(a, \gamma)$. Wir setzen

$$\nu_n := \mu + \infty_{B_n},\ \nu := \mu + \infty_G$$

(wobei $B_n := G_n^c$) und wollen die Implikation (ii)$\Longrightarrow$(i) aus dem "lokalen Test", Satz 7.5 auf ν_n und ν anwenden. Wir müssen also zeigen, daß

$$\sup_{C\in\Gamma_L} \|(-\tfrac{1}{2}\Delta + \chi_C \nu_n + \lambda)^{-1} - (-\tfrac{1}{2}\Delta + \chi_C \nu + \lambda)^{-1}\| \to 0.$$

Das folgt aus dem nächsten Lemma, denn $\chi_C \nu_N \sim \chi_C \nu$ außerhalb der Menge $(G \triangle G_n) \cap C$.
□

8.5. Lemma. *Sei $a > 0$, $\gamma < 1/2$. Dann gibt es $\lambda(a,\gamma)$, und für $\varepsilon > 0$ eine Konstante C_ε so, daß für alle $\mu, \nu \in \mathcal{M}_0 - \hat{\mathcal{S}}_K(a,\gamma)$ mit $\mu \sim \nu$ außerhalb einer Menge B mit* $\mathrm{cap}(B) < \infty$ *und alle $\lambda > \lambda(a,\gamma)$ die Ungleichung*

$$\|(-\tfrac{1}{2}\Delta + \mu + \lambda)^{-1} - (-\tfrac{1}{2}\Delta + \nu + \lambda)^{-1}\| \le \varepsilon + C_\varepsilon \mathrm{cap}(B)^{1/2}$$

gilt.

Beweis:
Nach 5.3 können wir

$$\|e^{-(-\frac{1}{2}\Delta+\mu)t} - e^{-(-\frac{1}{2}\Delta+\nu)t}\|_{HS} \le c(t,a,\gamma)\mathrm{cap}(B)^{1/2} \qquad (\circ)$$

abschätzen. Ein Blick auf den Beweis zeigt zudem, daß man für $s > 0$ (welches wir später geeignet wählen) die Ungleichung

$$c(t,a,\gamma) \le Me^{t\omega} \qquad (t \ge s) \qquad (\diamondsuit)$$

erhält, mit Konstanten, die nur von a, γ und s abhängen. Aus 2.2 wissen wir außerdem, daß

$$\|e^{-(-\frac{1}{2}\Delta+\mu)t} - e^{-(-\frac{1}{2}\Delta+\nu)t}\| \le M(a,\gamma)e^{t\omega(a,\gamma)} \quad (t \ge 0).$$

Für $\lambda > -\omega(a,\gamma)$ können wir also $s = s(\varepsilon)$ so klein wählen, daß

$$\int_0^s \|e^{-(-\frac{1}{2}\Delta+\mu+\lambda)t} - e^{-(-\frac{1}{2}\Delta+\nu+\lambda)t}\|dt \le \varepsilon$$

ist. Für $t \ge s$ wenden wir $(\circ)$ und $(\diamondsuit)$ an, um

$$\int_s^\infty \|e^{-(-\frac{1}{2}\Delta+\mu+\lambda)t} - e^{-(-\frac{1}{2}\Delta+\nu+\lambda)t}\|dt \le C_\varepsilon \mathrm{cap}(B)^{1/2}$$

zu erhalten. Mit der Darstellung der Resolvente als Laplacetransformierte der Halbgruppe folgt die Behauptung. □

Wir wollen nun noch bemerken, daß Satz 8.4 die Ergebnisse von 8.3 nicht umfaßt und aus diesem Grund in gewissem Sinne nicht optimal ist. So kann man aus 8.4 die Konvergenz für $G_n := K(0, 1 - \frac{1}{n})$ nicht herleiten. Andererseits liefert 8.4 die beste Aussage, die man sich erhoffen kann, will man die Konvergenz mit Hilfe einer "einfachen" Mengenfunktion beschreiben. So kann man sich recht leicht davon überzeugen, daß 8.4 falsch wird, wenn man die Kapazität durch das Maß ersetzt. Die "nächst-einfachere" Mengenfunktion ist (in den Augen des Autors) die Kapazität.

Eine schöne Arbeit von Gesztesy und Zhao [37] bietet Resultate, welche die hier untersuchten Stetigkeitseigenschaften ergänzen und mit ähnlichen Techniken erzielt wurden.

9. Abwesenheit absolutstetigen Spektrums für Schrödingeroperatoren mit Potentialbarrieren

In diesem Abschnitt stellen wir überblicksartig Resultate aus [74, 50] vor, die singuläres Spektrum für Schrödingeroperatoren garantieren, deren Potentiale gewissen geometrischen Bedingungen genügen. Der Ausgangspunkt ist dabei die folgende heuristische Betrachtung: Besitzt ein Schrödingeroperator absolutstetiges Spektrum, also Streuzustände, so verhalten sich die zugehörigen Wellenfunktionen im Unendlichen wie die freier Teilchen. Ein Potentialwall bremst diese Bewegung ab, und so stellt man sich vor, daß genügend viele, genügend massive (in Höhe und Breite) Potentialwälle die Existenz von Streuzuständen und damit das Auftreten absolutstetigen Spektrums verhindern. Die Resultate, die wir in diesem Abschnitt vorstellen, machen präzise, was "genügend viele, genügend massive " Barrieren genau sind. Wir folgen dabei der Strategie der Arbeit [64] von Simon und Spencer, in der die entsprechenden Aussagen für eindimensionale beziehungsweise diskrete Schrödingeroperatoren bewiesen wurden. Die Grundidee ist einfach (und doch genial): Man vergleicht Schrödingeroperatoren mit Barrieren mit solchen, bei denen die Potentialbarrieren durch Dirichlet–Randbedingungen, also unendlich hohe, undurchdringbare Barrieren ersetzt werden. Mit Hilfe von Methoden aus der Streutheorie zeigt man dann, daß sich dabei das absolutstetige Spektrum nicht ändert, und erhält leeres absolutstetiges Spektrum, weil der Vergleichsoperator in eine direkte Summe von Operatoren mit kompakter Resolvente zerfällt. Bemerkenswert ist diese Idee deshalb, weil normalerweise Wellenoperatoren benutzt werden, um die Existenz absolutstetigen Spektrums zu zeigen. Das technische Hauptproblem bei dieser Methode ist, gute Spurnormabschätzungen für die Differenz der Halbgruppen zu finden, wenn man einen Schrödingeroperator mit einer zusätzlichen Dirichlet–Randbedingung stört. Das ist der Punkt, an dem unsere Faktorisierungsmethode ansetzt, und der Grund, warum in [64] nur eindimensionale und diskrete Schrödingeroperatoren betrachtet werden: für letztere sind die zu betrachtenden Störungen von endlichem Rang, und die Spurnorm läßt sich deutlich einfacher abschätzen als im höherdimensionalen Fall.

Die folgenden beiden Sätze sind als Vergleichskriterien formuliert. Dafür fixieren wir $V, V_0 \in L^1_{loc}$, wobei wir für die Anwendung annehmen, daß wir das wesentliche Spektrum von $-\frac{1}{2}\Delta + V_0$ bereits gut kennen.

Um die Geometrie bequem beschreiben zu können, führen wir folgende Bezeichnung ein: Für $A \subset \mathbb{R}^d$ nennen wir eine Folge (S_n) kompakter Teilmengen des $\mathbb{R}^d$ eine *Zerlegung* von A, falls jedes S_n Lebesguemaß Null hat, und für die offenen Zusammenhangskomponenten U_i von $\mathbb{R}^d \setminus \bigcup_n S_n = \bigcup_i U_i$ gilt, daß für alle i mit $A \cap U_i \neq \emptyset$ das Maß von U_i endlich sein muß. Wir sprechen von einer *totalen Zerlegung*, wenn alle U_i endliches Maß haben (dabei spielt A also keine Rolle mehr). Bevor wir das erste Vergleichskriterium formulieren, erinnern wir an den Begriff der verallgemeinerten Oberfläche aus Abschnitt 7.

9.1. Satz. (Siehe [74], Theorem 4.1.) *Die Menge $\{V_0 \neq V\}$ erlaube eine Zerlegung (S_n) mit $\delta_n := \operatorname{dist}(S_n, \{V_0 \neq V\}) \geq \delta_0 > 0$ und verallgemeinerter Oberfläche $\sigma_n = \sigma(S_n)$. Ist*

$$\sum_n \sigma_n e^{-\varepsilon\delta_n} < \infty \text{ für alle } \varepsilon > 0,$$

so ist $\sigma_{ac}(-\frac{1}{2}\Delta + V) \cap (-\infty, \inf \sigma_{ess}(-\frac{1}{2}\Delta + V_0)) = \emptyset$.

Ein typisches Vergleichspotential wäre $V_0 = E$ konstant. In diesem Fall liefert der Satz, daß $\sigma_{ac}(-\frac{1}{2}\Delta + V) \cap (-\infty, E) = \emptyset$. Dabei erlauben die Voraussetzungen des Satzes natürlich Situationen, für die unterhalb der Energie E wesentliches Spektrum vorliegt, denn die Ausnahmemenge $\{V \neq E\}$ kann zum Beispiel beliebig große Kugeln enthalten. Wie läßt sich 9.1 nun als Resultat über Potentialbarrieren deuten? Dazu stellt man sich den Bereich $W_n := \{\text{dist}(x, S_n) \leq \delta_n\}$ auf dem $V = E$ sein muß als Wall der Breite δ_n und Höhe E vor. Im Gegensatz zu klassischen Teilchen können quantenmechanische Teilchen mit Energie kleiner als E diesen Wall überwinden, oder besser untertunneln. Verhalten sich die Breiten δ_n zu der "Länge" (der entspricht σ_n in zwei Dimensionen etwa) des Walls wie in 9.1 gefordert, so verhindern die unendlich vielen Wälle Streuzustände mit Energie kleiner als E. Die Leser mögen sich mit Hilfe der Abschätzung $\sigma_n \leq R_n^{d-1}$ im Falle von Kugelschalen S_n mit Radius R_n davon überzeugen, daß die Wachstumsbedingung an δ_n aus dem Satz nicht besonders einschränkend ist.

Ähnliche Resultate wie Satz 9.1 findet man in [12]. Die dort verwendeten Methoden (Agmon–Metrik) sind jedoch nicht geeignet, Aussagen vom folgenden Typ zu beweisen, bei denen man auch die Lücken im wesentlichen Spektrum des Vergleichsoperators betrachtet:

9.2. Satz. (Siehe [74], Theorem 4.2.) *Die Menge $\{V_0 \neq V\}$ erlaube eine totale Zerlegung (S_n) mit $\delta_n := \text{dist}\,(S_n, \{V_0 \neq V\}) \geq \delta_0 > 0$ und verallgemeinerter Oberfläche $\sigma_n := \sigma(S_n)$. Ist*

$$\sum_n \sigma_n e^{-\varepsilon\delta_n} < \infty \text{ für alle } \varepsilon > 0,$$

so ist $\sigma_{ac}(-\frac{1}{2}\Delta + V) \subset \sigma_{ess}(-\frac{1}{2}\Delta + V_0)$.

Für den Beweis verwendet man unter anderem die in Abschnitt 5 vorgestellten Techniken. Umgekehrt wurden die Ergebnisse der vorherigen Abschnitte durch die Zusammenarbeit mit meinem Kollegen und Kodauerläufer G. Stolz stark beeinflußt; thanks, Gunter. Wir verweisen denn auch auf [77], wo Leser weitere Informationen zum "verbleibenden" Spektrum mit ausführlichen Literaturhinweisen finden.

Wir wenden uns nun "hohen Barrieren" zu.

9.3. Satz. (Siehe [50].) *Sei (S_n) eine totale Zerlegung, $h_n > 0, b_n > 0$ für $n \in \mathbb{N}$, und $V \in L^1_{loc} - K_d$ erfülle $V(x) \geq h_n$ für alle $x \in \mathbb{R}^d$ mit dist$(x, S_n) \leq \frac{1}{2}b_n$. Gilt*

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{b_n}{\sqrt{h_n}} < \infty$$

und

$$\sum_n \sigma(S_n) \exp\left(-\eta w_n \sqrt{h_n}\right) < \infty$$

für ein $\eta < \frac{1}{8\sqrt{2}}$, so ist

$$\sigma_{ac}(-\tfrac{1}{2}\Delta + V) = \emptyset.$$

Dabei bedeutet die Bedingung an V natürlich, daß um die Mengen S_n das Potential eine Barriere der Höhe h_n und Breite b_n (mindestens) bildet. Diese Barrieren schließen Streuzustände jeglicher Energie aus. Unter zusätzlichen Einschränkungen an die Geometrie der Barrieren (zum Beispiel für konzentrische Kugelschalen) kann man die Bedingungen in den obigen Sätzen noch dadurch abschwächen, daß man die Summationsbedingung nur für geeignete Teilfolgen fordern muß. Bemerkungen in dieser Richtung findet man in [74, 50]. Ein Resultat für die Brownsche Bewegung, das beim Beweis von 9.3 eine wichtige Rolle spielt, wollen wir hier noch erwähnen: Es liefert Abschätzungen für die sogenannten "hit and run"–Wahrscheinlichkeiten (zum Beweis siehe [50]):

9.4. Lemma. *Sei $T_{S,\delta}(\omega) := \lambda\{u \in (0,t); dist(X_u(\omega), S) \le \delta\}$ und $t > 0, \varepsilon > 0$. Dann existiert ein $C = C(d,t,\varepsilon)$, so daß für alle $0 < \alpha < t$ und $S \subset \mathbb{R}^d$ kompakt,*

$$\mathbb{P}^x[\tau_S \le t, T_{S,\delta} \le \alpha] \le C \exp\left(-\frac{\delta^2}{4(2+\varepsilon)\alpha}\right).$$

Die Bedeutung dieses Lemmas liegt darin, daß man beim Vergleich einer Dirichlet–Randbedingung bei S mit einem Potential der Höhe h in einer δ–Umgebung von S in der Feynman–Kac–Formel einen Term der Form

$$\mathbb{E}^x\{e^{-h\cdot T_{S,\delta}}, \tau_S \le t\}$$

erhält und nach oben abschätzen muß. Ungünstig sind dabei die Teilchen ω, die S treffen, deren Aufenthaltsdauer $T_{S,\delta}(\omega)$ in der δ–Umgebung jedoch klein ist. Die Wahrscheinlichkeit, daß wir es mit solchen "fahrerflüchtigen" Teilchen (kollidieren mit S und entfernen sich schnell vom Unfallort) zu tun haben, wird durch das Lemma abgeschätzt.

10. Subelliptische Operatoren in Divergenzform

Zusammenfassung: Sektorielle Formen vom Typ $\int(a(x)\nabla u(x)|\nabla v(x))$ werden auf Stabilität des wesentlichen Spektrums bei Variation der Matrix–wertigen Funktion $a(x)$ untersucht.

Die Formen in diesem Abschnitt sind im Hilbertraum $L^2(\mathbb{R}^d, dx)$ definiert. Wie wir in Kürze sehen werden, bilden sie eine interessante Klasse, auf die sich die Analysis aus den bisherigen Abschnitten anwenden läßt. Darüber hinaus wollen wir zeigen, daß die Faktorisierungstechnik sehr robust ist, und vielfältige Anwendungsmöglichkeiten außerhalb der bisher gezeigten bietet. So werden wir in diesem Paragraphen hauptsächlich der Frage nachgehen, wann man bei Variation des Hauptteils eines elliptischen Operators in Divergenzform erwarten kann, daß das wesentliche Spektrum invariant bleibt. Anders als bei den Ergebnissen aus den Abschnitten 4 und 5, wo es um singuläre Störungen des Terms nullter Ordnung ging, können wir nun nicht mehr auf probabilistische Hilfsmittel zurückgreifen, da wir kein Äquivalent für die Feynman–Kac–Formel kennen. Erstmals wollen wir in diesem Abschnitt auch nicht–symmetrische Formen betrachten. Wir führen allerdings die Kompaktheitsbeweise durch einen einfachen Trick (siehe den 2. Schritt im Beweis von 10.5) auf den symmetrischen Fall zurück. Wir schreiben im folgenden $\|\cdot\|_{s,p}$ für die Norm im Sobolevraum $W^{s,p}$. Obwohl dieses Zeichen auch für die Norm eines Operators von L^s nach L^p verwendet wird, dürften keine Mißverständnisse auftauchen. Wir definieren nun die Operatoren, mit denen wir uns in diesem Abschnitt beschäftigen.

10.1. Sei $a : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}^{d\times d}$ (komponentenweise) lokal integrierbar. Für den Real– und Imaginärteil

$$\hat{a}(x) := \frac{1}{2}(a(x) + a^*(x)), \check{a}(x) := \frac{1}{2i}(a(x) - a^*(x))$$

gelte

$$(\hat{a}(x)\xi|\xi) \geq 0 \quad (x \in \mathbb{R}^d, \xi \in \mathbb{C}^d) \tag{10.5}$$

und es existiere $K > 0$ mit

$$|(\check{a}(x)\xi|\xi)| \leq K \cdot (\hat{a}(x)\xi|\xi) \quad (x \in \mathbb{R}^d, \xi \in \mathbb{C}^d). \tag{10.6}$$

Ferner existiere ein $s = s_a > 0, c > 0$ mit

$$\int(\hat{a}\nabla u|\nabla u)dx + \|u\|^2 \geq c \cdot \|u\|_{s,2}^2 \quad (u \in C_c^\infty). \tag{10.7}$$

Weiterhin setzen wir voraus, daß die Form

$$\mathfrak{a}[u,v] := \int(a(x)\nabla u(x)|\nabla v(x))dx$$

auf C_c^∞ abschließbar ist, und wir bezeichnen ihren Abschluß wieder mit $\mathfrak{a}$ und den zugehörigen sektoriellen Operator mit $A = \nabla \cdot a\nabla$. Wir nennen A *subelliptisch*, wenn diese Bedingungen erfüllt sind. Ist anstelle von (10.7) die stärkere Bedingung

$$(\hat{a}(x)\xi|\xi) \geq \eta\|\xi\|^2 \quad (x \in \mathbb{R}^d, \xi \in \mathbb{C}^d) \tag{10.8}$$

für ein $\eta > 0$ erfüllt, so sprechen wir von einem *strikt elliptischen* Operator.

Die Bedingung (10.6) stellt sicher, daß $\mathfrak{a}$ eine sektorielle Form im Sinne von [47], S. 310f ist. Für hermitesches a ist sie natürlich erfüllt, und A ist in diesem Falle selbstadjungiert. Will man sich auf Räume reellwertiger Funktionen einschränken, so kann man wie in [49], S. 43f anstelle von $\check{a}$ die antihermitesche Matrix $\frac{1}{2}(a(x) - a(x)^*)$ benutzen.

10.2. Bemerkung. (1) $A = \nabla \cdot a\nabla$ sei subelliptisch, symmetrisch und es gelte $d/s > 2$. Dann ist $\dim_{loc}(\exp(-tA)) = d/s$, insbesondere ist die Halbgruppe ultrakontraktiv.
(2) Aus (10.8) folgt die Abschließbarkeit von $\mathfrak{a}$ auf C_c^∞. Für dieses und weitere Abschließbarkeitskriterien siehe [49], S. 43ff.

Beweis von (1): Die Sobolev–Ungleichung (siehe z.B. [1], 7.57, S. 217) liefert

$$\mathfrak{a}[u] + \|u\|_2^2 \geq c \cdot \|u\|_{s,2}^2 \geq C' \cdot \|u\|_{\frac{2\delta}{\delta-2}}^2$$

mit $\delta = d/s$. Aus dieser Nash–Ungleichung folgt mit [15], Corollary 2.4.3, S. 77 die Behauptung. $\square$

Die Form, die zu einem symmetrischen subelliptischen Operator gehört ist also eine reguläre Dirichletform (siehe [49]) in $L^2(\mathbb{R}^d)$ mit ultrakontraktiver Halbgruppe. Damit können wir die Ergebnisse aus den Paragraphen 5 und 6 anwenden. Wir notieren dazu noch eine einfache Folgerung aus Satz 6.4:

10.3. Proposition. *Seien $A = \nabla \cdot a\nabla$ und $B = \nabla \cdot b\nabla$ subelliptisch und symmetrisch mit $d/s_a, d/s_b > 2$. Ferner sei M abgeschlossen, nrs–regulär für $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ und es gelte $a(x) = b(x)$ für $x \notin M$. Dann ist $(A+1)^{-1} - (B+1)^{-1} \in \mathfrak{K}$.*

Beweis:
Sei $G := M^c$. Aus Satz 6.4 folgt, daß $(A+1)^{-1} - (A_G+1)^{-1}$ und $(B+1)^{-1} - (B_G+1)^{-1}$ kompakt sind. Es genügt also, $A_G = B_G$ zu beweisen. Das ist zwar zu erwarten, da die Koeffizienten von A und B auf G übereinstimmen, aber da die Formen jeweils durch Abschließung gebildet werden, ist noch etwas zu zeigen. Wir erinnern daran, daß $\mathfrak{a}_G = \overline{(\mathfrak{a}|D(\mathfrak{a}) \cap C_c(G))}$. Da wir $\mathfrak{a}[f]$ explizit nur für $f \in C_c^\infty$ kennen, zeigen wir

$$\mathfrak{a}_G = \overline{(\mathfrak{a}|C_c^\infty(G))}. \qquad (\triangle)$$

Mit der entsprechenden Aussage für $\mathfrak{b}$ folgt dann offenbar $\mathfrak{a}_G = \mathfrak{b}_G$. Zum Beweis von $(\triangle)$ müssen wir $f \in D(\mathfrak{a}) \cap C_c(G)$ durch $C_c^\infty(G)$–Funktionen approximieren. O.E. sei $0 \leq f \leq 1$; sei $g \in C_c^\infty(G)$, $g = 1$ auf einer Umgebung von $\text{supp}(f)$. Nach Definition von $\mathfrak{a}$ gibt es eine Folge $(g_n) \in C_c^\infty$ mit $\mathfrak{a}[g_n - f] \to 0$. Ist Φ_ε eine glatte Abschneidefunktion wie in A3, so folgt $f_n := g \cdot \Phi_\varepsilon \circ g_n \in C_c^\infty(G)$ und $\mathfrak{a}[\Phi_\varepsilon \circ g_n] \leq \mathfrak{a}[g_n]$. Damit erhalten wir (siehe A3)

$$\mathfrak{a}[f_n] \leq \|g\|_\infty \cdot \mathfrak{a}[g_n] + \mathfrak{a}[g] \cdot \|\Phi_\varepsilon \circ g_n\|_\infty,$$

also insbesondere

$$\sup_n \mathfrak{a}[f_n] < \infty. \qquad (\square)$$

Offenbar konvergiert f_n in L^2 gegen f, woraus mit ($\square$) die schwache Konvergenz von f_n gegen f in $D(\mathfrak{a})$ folgt (wegen der Beschränktheit der Folge müssen wir die schwache Konvergenz nämlich nur auf dem dichten Teilraum D(A) nachrechnen, wo sie aus der L^2-Konvergenz folgt). Damit ist f im schwachen Abschluß von $C_c^\infty(G)$, der wegen Konvexität mit dem Normabschluß übereinstimmt. $\square$

Wir wollen nun Integrabilitätsbedingungen an $a-b$ suchen, die die Kompaktheit der Differenz $(A+1)^{-1} - (B+1)^{-1}$ sicherstellen. Dazu benötigen wir etwas Notation:
Ist F ein Funktionenraum, so bedeutet $a - b \in F^{d\times d}$ natürlich, daß jede Komponente der Matrixfunktion in diesem Raum liegt. Für $F = L^p$ ist dies dazu äquivalent, daß $\|a-b\| \in F$, wobei man die Norm auch noch durch die Spurnorm etc. ersetzen kann.

Wir schreiben

$$c_0(L^1) := \{f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}; \int_{|x-y|\leq 1} |f(y)|dy \to 0 \text{ für } x \to \infty\}.$$

10.4. Satz. *Seien $A = \nabla\cdot a\nabla$, $B = \nabla\cdot b\nabla$ strikt elliptisch, a, b beschränkt und hermitesch. Für $p \in [0,\infty]$ und q mit $\frac{1}{2p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{2} = 1$ gelte $b - a \in c_0(L^p)^{d\times d}$ und $(A+1)^{-1}L^q \subset W^{1,q}$. Dann ist $(A+1)^{-1} - (B+1)^{-1} \in \mathfrak{K}$, insbesondere ist $\sigma_{ess}(B) = \sigma_{ess}(A)$.*

Im Spezialfall $A = -\Delta$ ist die Bedingung des Satzes mit $p = 1$ und $q = \infty$ erfüllt. Die entsprechende Aussage wurde in [40] gezeigt. Dort wird im Beweis verwendet, daß $D(A^m) \subset W^{k,m}$ für $k > d$ und genügend großes m. Die üblichen Kriterien, die eine solche Inklusion sicherstellen, benötigen starke Differenzierbarkeitforderungen an die Koeffizientenfunktion a (die außerdem mit der Dimension steigen). Damit liegen die Vorteile des obigen Satzes und des folgenden Korollars, in dem auch nichtsymmetrische Formen zugelassen sind, auf der Hand.

10.5. Korollar. *Seien $A = \nabla\cdot a\nabla$, $B = \nabla\cdot b\nabla$ strikt elliptisch, $a \in W^{3,\infty}$, b beschränkt und $b - a \in c_0(L^1)$. Dann ist $(A+1)^{-1} - (B+1)^{-1} \in \mathfrak{K}$.*

Wir wollen hier noch ein Resultat von Ouhabaz erwähnen, der im wesentlichen die Aussage von 10.5 für $a_{ij} = \nu_i\delta_{ij}$, ν_i Konstanten und $b - a \in \overline{(L^2\cap L^\infty)}$ beweist. Er benutzt dabei eine Faktorisierungstechnik, die es ihm erlaubt für hermitesches b auf die Beschränktheit von b zu verzichten. Da diese Beschränktheit für viele Autoren eine Standardvoraussetzung ist, sind die Ergebnisse und Methoden aus [40] denen aus [51] im Kontext gleichmäßig elliptischer Operatoren überlegen. Trotzdem werden wir auf diesen Punkt später genauer eingehen, und zwar aus folgenden Gründen: Zum einen ist es interessant zu verfolgen, wo wir im Beweis die Beschränktheit verwendet haben. Zum anderen wollen wir eine Verfeinerung der Methoden von Ouhabaz und Anwendungsmöglichkeiten vorstellen, bei denen wir die Techniken aus [40] nicht verwenden konnten.

Den etwas langen *Beweis von 10.4* haben wir in mehrere Schritte gegliedert. Die beiden folgenden Lemmata sind dabei von eigenständigem Interesse (das erste wurde im Spezialfall bereits als Lemma 7.6 formuliert und im Beweis von Satz 7.5 verwendet).

10.6. Lemma. *Für $k \in \mathbb{N}$ existieren C und $\eta > 0$ so, daß für alle $\chi, \tilde{\chi} \in L^\infty$ mit $\|\chi\|_\infty, \|\tilde{\chi}\|_\infty \leq 1$ und dist(suppχ, supp$\tilde{\chi}$) $= \delta$ die folgenden Abschätzungen gelten:*

$$\|\chi(A+1)^{-k}\tilde{\chi}\|_{2,2} \leq C \cdot \exp(-\eta \cdot \delta),$$

$$\|\chi\partial_i(A+1)^{-k}\tilde{\chi}\|_{2,2} \leq C \cdot \exp(-\eta \cdot \delta) \qquad (i = 1, \ldots, d).$$

Zum Beweis kombinieren wir Ideen aus [76] und [83] mit einem einfachen Induktionsargument. Statt $\||\|a(\cdot)\||\|_\infty$ verwenden wir zur Abkürzung $\|a\|_\infty$:

Beweis:
Sei zunächst $k = 1$ und $w \in C^1_+$ mit ∇w beschränkt. Wir definieren eine Form $\mathfrak{a}_w$, deren zugehöriger Operator formal durch $e^w A e^{-w}$ gegeben ist:

$$\mathfrak{a}_w[u, v] := \mathfrak{a}[e^{-w}u, e^w v] \quad \text{ für } u, v \in C_c^\infty.$$

Es folgt

$$\begin{aligned}
\mathfrak{a}_w[u, v] &= \int (a(x)\nabla e^{-w}u(x)|\nabla e^w v(x))dx \\
&= \mathfrak{a}[u, v] + \int (a(x)\nabla u|\nabla w)\overline{v}dx \\
&\quad - \int (a(x)\nabla w|\nabla v)u dx - \int (a(x)\nabla w|\nabla w)u\overline{v}dx
\end{aligned}$$

und setzen $\mathfrak{c}[u, v] := \mathfrak{a}_w[u, v] - \mathfrak{a}[u, v]$. Man sieht, daß

$$\mathfrak{c}[u, v] \leq \|a\|_\infty\|\nabla w\|_\infty^2\|u\|_2\|v\|_2 + \|a\|_\infty\|\nabla w\|_\infty \cdot (\|\nabla u\|_2\|v\|_2 + \|\nabla v\|_2\|u\|_2).$$

Wegen der strikten Elliptizität gibt es für alle $\gamma < 1$ ein $\varepsilon > 0$ und K mit

$$\mathfrak{c}[u] \leq \gamma\mathfrak{a}[u] + K\|u\|_2^2$$

für alle w mit $\|\nabla w\|_\infty \leq \varepsilon$. Nach [47], VI.3.1 können wir

$$\mathfrak{c}[u, v] = (CA^{1/2}|A^{1/2})$$

mit einem Operator $C \in \mathfrak{L}$ schreiben, dessen Norm durch 2γ beschränkt ist. Den zu $\mathfrak{a}_w$ gehörigen sektoriellen Operator bezeichnen wir mit A_w. Für kleines γ existiert dann

$$(A_w + 1)^{-1} = (A+1)^{-1/2}(1 + C)^{-1}(A+1)^{-1/2} \qquad (\spadesuit)$$

und ist gleichmäßig beschränkt für w mit $\|\nabla w\|_\infty \leq \varepsilon$ mit geeignetem ε.

Mit einer leichten Rechnung überlegt man sich, daß $(A_w + 1)^{-1}$ die Gestalt hat, die durch "$A_w = e^w A e^{-w}$ nahegelegt wird, genauer:

$$(A_w + 1)^{-1} = e^w(A+1)^{-1}e^{-w}. \qquad (\circ)$$

Als Gewichtsfunktion wählen wir im wesentlichen den regularisierten Abstand (siehe [65], S. 170f) w_S von $S = \text{supp}(\tilde{\chi})$, wobei für geeignetes $K > 0$ unabhängig von S die Ungleichung

$(1/K)\mathrm{dist}(x,S) \leq w_S(x) \leq K\mathrm{dist}(x,S)$ gilt, und die Ableitungen von w_S unabhängig von S beschränkt sind. Für η klein genug und $w := \eta \cdot w_S$ ist also

$$\begin{aligned} \chi(A+1)^{-1}\tilde{\chi} &= \chi e^{-w} e^{w} (A+1)^{-1} e^{-w} e^{w} \tilde{\chi} \\ &\mathrel{\overset{\circ}{=}} \chi e^{-w} (A_w+1)^{-1} e^{w} \tilde{\chi}, \end{aligned}$$

und damit

$$\|\chi(A+1)^{-1}\tilde{\chi}\| \leq \exp\left(-\eta \cdot \delta \frac{1}{K}\right) \cdot \mathrm{const},$$

mit von S unabhängiger Konstante. Das zeigt die erste Ungleichung im Fall $k=1$. Für die Abschätzung von $\partial_i(A+1)^{-1}$ können wir analog verfahren:
Aus ($\spadesuit$) folgt wegen der gleichmäßigen Elliptizität von A, daß $\partial_i(A_w+1)^{-1}$ sich gleichmäßig in der Norm von w abschätzen läßt. Aus

$$\chi\partial_i(A+1)^{-1}\tilde{\chi} = (\chi\partial_i e^{w})(A_w+1)^{-1}e^{w}\tilde{\chi} + \chi e^{-w}\partial_i(A_w+1)^{-1}e^{w}\tilde{\chi}$$

kann man die gewünschte Abschätzung leicht herleiten.

Wir benutzen nun vollständige Induktion, um die entsprechenden Aussagen für allgemeines k zu erhalten. Zum Beweis des Induktionsschritts sei $\hat{\chi}$ die charakteristische Funktion der Menge $\{\mathrm{dist}(\cdot, \mathrm{supp}\chi) \leq \frac{\delta}{2}\}$. Dann ist $\mathrm{dist}(\mathrm{supp}\hat{\chi}, \mathrm{supp}\tilde{\chi}) \geq \frac{\delta}{2}$ und $\mathrm{dist}(\mathrm{supp}\chi, \mathrm{supp}(1-\hat{\chi})) \geq \frac{\delta}{2}$. Damit folgt

$$\begin{aligned} \|\chi(A+1)^{-k}\tilde{\chi}\| &= \|\chi(A+1)^{-1}\hat{\chi}(A+1)^{-(k-1)}\tilde{\chi}\| \\ &+ \|\chi(A+1)^{-1}(1-\hat{\chi})(A+1)^{-(k-1)}\tilde{\chi}\| \\ &\leq c_{k-1}\exp(-\eta_k\frac{\delta}{2}) + c_1\exp(-\eta_1\frac{\delta}{2}), \end{aligned}$$

woraus die behauptete Abschätzung folgt. □

Wir haben im Beweis mehrfach $\|a\|_\infty < \infty$ benutzt. Mit etwas mehr Aufwand hätten wir die entsprechenden Abschätzungen auch ohne diese Einschränkung, aber für die *intrinsische Metrik*

$$\rho(x,y) := \sup\{w(x) - w(y);\, w \in C_c^1 \text{ mit } \|a(\cdot)^{1/2}\|_\infty \leq 1\}$$

erhalten. (Die Details der nötigen Modifikationen kann man [83] entnehmen.)

Nun werden wir mit Hilfe von 10.6 eine Kompaktheitsaussage beweisen, die den eigentlichen Unterschied zu den Argumenten aus [40] darstellt. Dort wird für die entsprechende Aussage ausgenutzt, daß $(A+1)^{-m}$ in einen Sobolevraum genügend hoher Ordnung abbildet.

10.7. Lemma. *Sei $h \in c_0(L^{2p})$ und $(A+1)^{-1}L^q \subset W^{1,q}$ mit $\frac{1}{2p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{2} = 1$. Dann ist, für m genügend groß,*

$$h\partial_i(A+1)^{-m} \in \mathfrak{K}(L^2).$$

Beweis:
Wir verwenden hier eine Strategie wie im Beweis von 7.5: Man sieht relativ leicht ein, daß die Aussage für supp$h$ kompakt wahr ist. Dann zerlegt man $h\partial_i(a+1)^{-m}$ mittels charakteristischer Funktionen von Würfeln und benutzt $h \in c_0(L^{2p})$, um die Beiträge der Würfel weit draußen in der Norm abzuschätzen.

Sei also zunächst supp$h$ kompakt. Da $\dim_{loc}(e^{-tA}) = d$ ist $(A+1)^{-m+2}L^2 \subset L^q$ für genügend großes m (genauer siehe 2.8). Für solche m folgt dann nach Voraussetzung

$$(A+1)^{-m+1}L^2 \subset W^{1,q}$$

und daraus

$$\partial_i(A+1)^{-m+1}L^2 \subset L^q,$$

woraus mit der Hölderschen Ungleichung schließlich

$$\|h\partial(A+1)^{-m}\|_{2,2} \leq c(m,q)\|h\|_{2p}\|(A+1)^{-1} : L^q \to W^{1,q}\| \qquad (\clubsuit)$$

folgt. Nach Lemma 10.6 ist

$$h\partial_i(A+1)^{-m} = \|\cdot\| - \lim_{n\to\infty} h\partial_i(A+1)^{-m+1}(A+1)^{-1}\chi_{K(0,n)},$$

und da $(A+1)^{-1}\chi_{K(0,n)} \in \mathfrak{K}$ nach 6.1 folgt die Kompaktheit im Falle daß h kompakten Träger besitzt. Sei nun χ_n die charakteristische Funktion des Würfels um $n \in \mathbb{Z}^d$ mit Kantenlänge 1, $C = h\partial_i(A+1)^{-m}$ und $C_{n,k} = \chi_n C \chi_k$. Dann ist $C = \sum_{n,k} C_{n,k}$. Da $h \in c_0(L^{2p})$ folgt aus $(\clubsuit)$, daß

$$\sup_k \|C_{n,k}\|_{2,2} \longrightarrow 0 \text{ für } |n| \to \infty. \qquad (\diamondsuit)$$

Aus Lemma 10.6 folgt, für $|i| \geq N$ und geeignetes $\eta > 0$ die Ungleichung

$$\begin{aligned} \|C_{i,k}\| &\leq \|C_{i,k}\|^{1/2}\|C_{i,k}\|^{1/2} \\ &\leq \text{const}(\sup_{|i|\geq N, k\in\mathbb{Z}^d} \|C_{i,k}\| \cdot \exp(-\eta|i-j|) \quad (\spadesuit) \end{aligned}$$

Wie im Beweis von 7.5 folgt aus $(\spadesuit)$ und $(\diamondsuit)$ mit dem Schurtest, daß

$$\|\sum_{|i|\geq N, k\in\mathbb{Z}^d} C_{i,k}\| \longrightarrow 0 \text{ für } N \to \infty.$$

Da andererseits

$$\sum_{|i|<N, k\in\mathbb{Z}^d} C_i = (\sum_{|i|<N} \chi_i) h\partial_i(A+1)^{-m} \in \mathfrak{K}$$

nach dem ersten Teil des Beweises, ist die Behauptung des Lemmas gezeigt. □

Beweis von Satz 10.4 :
Wir folgen nun der Argumentation von [40], Section 3, Example 1 und wollen Theorem 1 aus [40] anwenden, wobei $\mathfrak{t} = \mathfrak{a}$ und $\mathfrak{s} = \mathfrak{b}$. Weiterhin setzen wir $d_{ij}(\cdot) = b_{ij}(\cdot) - a_{ij}(\cdot)$ und

$n(x) := -\|d(x)\|$. Mit d_{ij} ist auch $n \in c_0(L^p)$ und wegen der Beschränktheit von n folgt sogar $n \in c_0(L^{2p})$. Wir setzen

$$\begin{aligned} \mathfrak{t}_1[u] &:= \mathfrak{a}[u] + \int n(x)|\nabla u|^2 dx \\ &\leq \mathfrak{a}[u] + \int (d(x)\nabla u|\nabla u) dx = \mathfrak{b}[u]. \end{aligned}$$

Um die Behauptung des Satzes aus [40], Theorem 1 zu folgern müssen wir zwei Bedingungen nachprüfen:

- $(A+1)^{-1} - (T_1+1)^{-1} \in \mathfrak{K}$ folgt wie in [40], S. 286 aus $n\partial_i(A+1)^{-m} \in \mathfrak{K}$, was wiederum aus Lemma 10.7 folgt.
- Auch mit Lemma 10.7 folgt die Kompaktheit von $|d_{ij}|^{1/2}\partial_i(A+1)^{-m}$ woraus man mit den Argumenten aus [40], S. 286 die Bedingung (1.2) aus [40], Theorem 1 nachprüft.

Damit ist Satz 10.4 gezeigt. □

Beweis von Korollar 10.5:
1. Schritt: Sind a, b hermitesch, so folgt die Behauptung mit Satz 10.4, denn nach [58], Theorem 2.1, S. 390 ist die Bedingung des Satzes für $p = 1, q = \infty$ erfüllt.
2. Schritt:
Mit Hilfe "holomorpher Deformation" soll nun der allgemeine auf den symmetrischen Fall zurückgeführt werden. Dazu seien $\hat{a}, \hat{b}$ (wie in 10.1 definiert) die Realteile von a und b. Wir setzen

$$a_z(\cdot) := \hat{a}(\cdot) + z\check{a}(\cdot), \qquad b_z(\cdot) := \hat{b}(\cdot) + z\check{b}(\cdot).$$

Man kann leicht nachrechnen, daß die zugehörigen Formen $\mathfrak{a}_z$, $\mathfrak{b}_z$ sektoriell sind, falls $|\mathrm{Re} z|$ genügend klein ist. Sei $\varepsilon > 0$ so gewählt, daß dies für $z \in U = \{|\mathrm{Re} z| < \varepsilon\}$ der Fall ist. Offenbar sind $\mathfrak{a}_z$, $\mathfrak{b}_z$, $z \in U$ holomorphe Familien vom Typ (a) im Sinne von [47],VII 4.2, S. 395f und für $z \in U \cap \mathbb{R}$ sind a_z, b_z hermitesch. Mit $b - a$ sind auch die zugehörigen Real- und Imaginärteile und schließlich auch $b_z - a_z$ in $c_0(L^1)^{d\times d}$. Wir können damit das Ergebnis des ersten Schrittes anwenden und erhalten

$$\forall z \in U \cap \mathbb{R}: \quad (A_z + 1)^{-1} - (B_z + 1)^{-1} \in \mathfrak{K}.$$

Nun ist $z \mapsto (A_z + 1)^{-1} - (B_z + 1)^{-1}$ eine holomorphe Funktion gemäß [47], loc. cit. Da $\mathfrak{K} \subset \mathfrak{L}$ ein abgeschlossener Teilraum ist, folgt aus dem Identitätssatz, daß für **alle** $z \in U$ die Resolventendifferenz kompakt ist. Da für $z = i$ nach Konstruktion $A_z = A$ und $B_z = B$ ist, folgt die Behauptung. □

Wir stellen nun eine L^p- Version der Methode aus [51] vor.

10.8. Proposition. *Seien $A = \nabla \cdot a\nabla$, $B = \nabla \cdot b\nabla$ subelliptisch mit a hermitesch und beschränkt, $(A+1)^{-1}C_c^\infty, (B+1)^{-1}C_c^\infty \subset W^{1,2}$ und $(A+1)^{-1}L^\infty \subset W^{1,\infty}$. Ist*

(i) *b hermitesch und beschränkt, $(B+1)^{-1}L^p \subset W^{1,p}$ und $b-a \in (L^p)^{d\times d}$ für ein $p>1$*
oder
(ii) *b strikt elliptisch und $b-a \in (L^2)^{d\times d}$*
so ist $(A+1)^{-1}-(B+1)^{-1}$ kompakt.

Beweis:
q bezeichnet natürlich den zu p konjugierten Exponenten. Sei (i) vorausgesetzt. Wir bemerken zunächst, daß für $f,g \in C_c^\infty$ die Gleichung

$$([(A+1)^{-1}-(B+1)^{-1}]f|g) = \int([b(x)-a(x)]\nabla(A+1)^{-1}f|\nabla(B+1)^{-1}g)dx \qquad (\diamondsuit)$$

gilt. Dazu verwenden wir, daß wegen der Beschränktheit von a und b die Inklusionen $W^{1,2} \subset D(\mathfrak{a}), D(\mathfrak{b})$ bestehen und nach Voraussetzung an die Resolventen (Definitionsbereiche!!) die folgendende Rechnung “stimmt”.

$$\begin{aligned}([(A+1)^{-1}-(B+1)^{-1}]f|g) &= \mathfrak{b}[(A+1)^{-1}f,(B+1)^{-1}g] - \mathfrak{a}[(A+1)^{-1}f,(B+1)^{-1}g] \\ &= \int([b(x)-a(x)]\nabla(A+1)^{-1}f(x)|\nabla(B+1)^{-1}g(x))dx\end{aligned}$$

Aus ($\diamondsuit$) folgt mit der Hölderungleichung

$$|([(A+1)^{-1}-(B+1)^{-1}]f|g)| \le \|b-a\|_p \|\nabla(A+1)^{-1}\|_{\infty,\infty}\|f\|_\infty \|\nabla(B+1)^{-1}\|_{q,q}\|g\|_q$$

und damit mit Dichtheit und Dualität

$$\|(A+1)^{-1}-(B+1)^{-1}\|_{\infty,p} \le \|b-a\|_p\|\nabla(A+1)^{-1}\|_{\infty,\infty}\|\nabla(B+1)^{-1}\|_{q,q} \qquad (\heartsuit)$$

Wegen der endlichen lokalen Dimension der von A und B erzeugten Halbgruppen können wir n so groß wählen, daß $(A+1)^{-\frac{n}{2}+1}: L^p \to L^\infty$ und $(B+1)^{-n}: L^p \to L^\infty$ (siehe 2.8). Wie in [51] betrachten wir die folgende Summe:

$$D := (A+1)^{-n}-(B+1)^{-n} = \sum_{k=0}^{n-1} \underbrace{(A+1)^{k+1-n}[(A+1)^{-1}-(B+1)^{-1}](B+1)^{-k}}_{S_k}$$

Für $k \le n/2$ faktorisiert $S_k : L^p \to L^\infty \to L^p$ wegen ($\heartsuit$) und der Tatsache, daß $k+1-n \le -n/2+1$. Für diese k ist wegen 4.6 der Operator $S_k \in \mathfrak{K}(L^p)$. Um daraus die Kompaktheit auf L^2 zu folgern, schreiben wir χ_R für die charakteristische Funktion der Kugel um 0 mit Radius R, und bemerken, daß aus A6 die Normkonvergenz

$$\|(\chi_R-1)S_k\|_{p,p} \to 0 \text{ für } R\to\infty$$

folgt. Riesz–Thorin (siehe A5) liefert

$$\|(\chi_n-1)S_k\|_{2,2} \to 0 \text{ für } R\to\infty.$$

Diese Konvergenz wollen wir auch für $k > n/2$ zeigen. Für solche k ist, mit Dualität,

$$\|(\chi_R-1)S_k\|_{q,q} = \|(B+1)^{-k}[...](A+1)^{k+1-n}(\chi_R-1)\|_{p,p} \to 0 \text{ für } R\to\infty,$$

mit derselben Argumentation wie oben. Auch für diese k erhalten wir die L^2–Konvergenz, und insgesamt folgt:

$$\|(1-\chi_R)D\|_{2,2} \to 0 \text{ für } R \to \infty.$$

Da nach 6.1 stets $\chi_R D \in \mathfrak{K}(L^2)$ ist, folgt die Kompaktheit von D auf L^2. Dieselben Argumente implizieren für $t > 0$:

$$(A+1+t)^{-n} - (B+1+t)^{-n} \in \mathfrak{K}(L^2),$$

woraus mit der Formel

$$(A+1)^{-1} - (B+1)^{-1} = (n-1)\int_0^\infty t^{n-2}\left((A+1+t)^{-n} - (B+1+t)^{-n}\right) dt$$

die Kompaktheit der Resolventendifferenz (als starkes Integral kompakter Operatoren) folgt. Der Schluß von $(A+1+t)^{-n} - (B+1+t)^{-n} \in \mathfrak{K}$ auf $(A+1)^{-1} - (B+1)^{-1} \in \mathfrak{K}(L^2)$ ist Standard und findet sich so ähnlich in [14, 19, 51]. Wir betrachten nun Voraussetzung (ii).
Sei zunächst b hermitesch. Nach Voraussetzung ist $b(x) \geq \eta > 0$ für ein geeignetes η, woraus insbesondere die Beschränktheit von $\nabla(B+1)^{-1}$ folgt, wobei man die Norm durch $\sqrt{\eta}$ abschätzen kann. Indem man in der Eigenbasis von $b(x)$ die Eigenwerte "abschneidet", erhält man eine Folge b_n von beschränkten Matrizenfunktionen mit $\eta < b_n(\cdot) \leq b_{n+1}(\cdot) \leq b(\cdot)$ und $b_n \to b$ punktweise f.ü.
Mit Sätzen über monotone Formkonvergenz folgt

$$(B_n+1)^{-1} \stackrel{srs}{\longrightarrow} (B+1)^{-1}.$$

Für B_n können wir ($\heartsuit$) anwenden und erhalten mit den obigen Bemerkungen über die Beschränktheit von $\nabla(B_n+1)^{-1}$:

$$(A+1)^{-1} - (B+1)^{-1} : L^2 \longrightarrow L^1.$$

Wie beim Beweis im ersten Fall folgt die Kompaktheit der Resolventendifferenz. Für nicht-hermitesches b können wir die Methode der holomorphen Deformation aus dem Beweis von Korollar 10.5 verwenden. $\square$

Für $A = -\Delta$ sind die entsprechenden Bedingungen aus der letzten Proposition erfüllt. Mit Fall (ii) erhält man daraus leichte Verbesserungen der Aussagen aus [51], aus der wesentliche Ideen zum Beweis stammen. Es ist gewiß ein schwieriges Problem, die in der letzten Proposition vorausgesetzten L^p-Aussagen über subelliptische Operatoren zu verifizieren. Abgesehen vom strikt elliptischen Fall, für den man in [58] Resultate findet, die wir bereits im Beweis von 10.5 ausgenutzt haben, können wir dazu auch keine Zitate angeben. In der Arbeit [59] von Rothschild und Stein finden sich jedoch Abschätzungen der Form $(A+1)^{-1}L^p \subset W^{1,p}_{loc}$, also die lokale Version der von uns benötigten Aussagen, für eine interessante Klasse von subelliptischen Operatoren, die Operatoren vom Hörmandertyp (siehe [59], Theorem 16, S. 310). Wir vermuten, daß ein genaues Studium der Analysis von [59] (in der sich die Autorin und der Autor auf kompakte Mannigfaltigkeiten konzentrieren, daher das "loc") die gewünschten L^p-Ergebnisse bringen wird. Wir verweisen interessierte Leser auf die Arbeiten [43, 59, 27, 46, 58] als Hintergrundlektüre.

A Einige Grundlagen

Zusammenfassung: Formen, Resolventenkonvergenz, Dirichletformen, Kapazität werden definiert und mit einigen Ergebnissen illustriert.

Hier sollen einige Begriffe und Fakten gesammelt werden, die im Text häufiger benutzt werden, beziehungsweise von grundlegender Bedeutung sind.

Wir beginnen mit einigen Bemerkungen über *abgeschlossene Formen* und fixieren einen komplexen (!) Hilbertraum H. (Wir verweisen die Leser auf [47] als Standardreferenz für Formen; dort findet man eine ausführliche Einführung in die Theorie mit sämtlichen Aussagen, die wir im folgenden ohne Beweis angeben.) Eine abgeschlossene Form $\mathfrak{t}$ mit Definitionsbereich $D(\mathfrak{t})$ ist eine sesquilineare Abbildung (im ersten Argument linear, im zweiten antilinear) $\mathfrak{t} : D(\mathfrak{t}) \times D(\mathfrak{t}) \to \mathbb{C}$, mit

$$\mathfrak{t}[u,u] =: \mathfrak{t}[u] \geq C\|u\|^2 \quad (u \in D(\mathfrak{t}))$$

für geeignetes $C \in \mathbb{R}$ (das ist die Halbbeschränktheit), für die das Skalarprodukt

$$(\cdot|\cdot) := \mathfrak{t}[\cdot,\cdot] + (1-C)(\cdot|\cdot)$$

auf $\mathsf{H}_\mathfrak{t} := D(\mathfrak{t})$ eine vollständige Norm $\|\cdot\|_\mathfrak{t}$ erzeugt. Insbesondere haben wir also die Symmetrie $\mathfrak{t}[u,v] = \overline{\mathfrak{t}[v,u]}$ vorausgesetzt. Der Hilbertraum $\mathsf{H}_\mathfrak{t}$ ist dann stetig in H eingebettet. Die zu $\mathfrak{t}$ gehörige quadratische Form $\mathfrak{t}[\cdot] : D(\mathfrak{t}) \to \mathbb{R}$ legt $\mathfrak{t}$ eindeutig fest (Parallelogramm–Gleichung), weshalb man Formen nur durch die zugehörige quadratische Form definieren kann (das benutzen wir zum Beispiel in A2).

Der Hauptgrund für die Beschäftigung mit Formen ist der fundamentale Zusammenhang mit halbbeschränkten selbstadjungierten Operatoren. So gibt es zu jeder abgeschlossenen Form $\mathfrak{t}$ einen selbstadjungierten Operator T im Hilbertraum $\overline{D(\mathfrak{t})}^{\mathsf{H}}$, der zu $\mathfrak{t}$ vermöge

$$D(T) \subset D(\mathfrak{t}), \quad \mathfrak{t}[u,v] = (Tu|v) \quad (u \in D(T),\, v \in D(\mathfrak{t}))$$

assoziiert ist. Ist $\mathfrak{t}$ dicht definiert, das heißt ist $\overline{D(\mathfrak{t})}^{\mathsf{H}} = \mathsf{H}$, so ist T also ein selbstadjungierter Operator in H, und nur für diesen Fall wird der Zusammenhang normalerweise formuliert. Man kann statt halbbeschränkten Formen auch *sektorielle Formen* betrachten, wovon wir im Text (vor allem im Kontext analytischer Störungstheorie) gelegentlich Gebrauch machen.

Ist $\mathfrak{t}$ eine abgeschlossene Form in H, so setzen wir die Resolvente $(T+\lambda)^{-1}$ für $\lambda \in \rho(T)$ von $\overline{D(\mathfrak{t})}^{\mathsf{H}}$ auf $\mathsf{H} = \overline{D(\mathfrak{t})}^{\mathsf{H}} \oplus D(\mathfrak{t})^\perp$ als $(T+\lambda)^{-1} \oplus 0$ fort und lassen gewöhnlich das $\oplus 0$ weg. Diese Konvention ist sinnvoll, wenn man sich vorstellt, daß $\mathfrak{t}$ beziehungsweise T auf dem orthogonalen Komplement des Definitionsbereichs gleich ∞ sind. Damit können wir die Begriffe der starken Resolventenkonvergenz auch auf Formen ausweiten, die nicht dicht definiert sind (siehe auch [60, 90, 92]). Sind $\mathfrak{t}, \mathfrak{t}_n$ für $n \in \mathbb{N}$ abgeschlossene Formen mit zugehörigen Operatoren T, T_n so schreiben wir

$$T_n \xrightarrow{srs} T \text{ oder } \mathfrak{t}_n \xrightarrow{srs} \mathfrak{t},$$

falls für ein (alle) $\lambda \in \bigcap_n \rho(T_n) \cap \rho(T)$ die (fortgesetzten) Resolventen $(T_n+\lambda)^{-1}$ stark gegen $(T+\lambda)^{-1}$ konvergieren und sprechen von Konvergenz im *starken Resolventensinn.* Analog bedeutet

$$T_n \xrightarrow{nrs} T \text{ oder } \mathfrak{t}_n \xrightarrow{nrs} \mathfrak{t},$$

daß die Resolventen in der Operatornorm konvergieren . Wir benutzen im Text des öfteren die Tatsache, daß man diese Konvergenz nur für ein λ nachprüfen muß (siehe [54], VIII). So ist es für die Formulierung mancher Sätze (zum Beispiel 7.5) bequem, $\lambda = i$ zu setzen, da dieser Punkt im Durchschnitt der Resolventenmengen liegen muß, während man im Beweis dann besser andere Werte von λ betrachtet. Zwei einfache Kriterien für Resolventenkonvergenz wollen wir hier erwähnen. Dabei benutzen wir die folgende Ordnungsrelation zwischen Formen:

$$\mathfrak{s} \leq \mathfrak{t} :\Longleftrightarrow D(\mathfrak{t}) \subset D(\mathfrak{s}) \text{ und } \mathfrak{s}[u] \leq \mathfrak{t}[u] \quad (u \in D(\mathfrak{t})).$$

A1. Satz. *Seien $0 \leq \mathfrak{t}, \mathfrak{t}_n$ für $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ abgeschlossene Formen und es gebe $c > 0$ mit $c\mathfrak{t} \leq \mathfrak{t}_n \leq c^{-1}\mathfrak{t}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Sei $B = \{u \in D(\mathfrak{t}); (\mathfrak{t}+1)[u] \leq 1\}$ die Einheitskugel von $\mathsf{H}_\mathfrak{t}$.*

(1) *Für $u \in D(\mathfrak{t})$ gelte*

$$\sup_{v \in B} |\mathfrak{t}_n[u,v] - \mathfrak{t}_\infty[u,v]| \to 0 \text{ für } n \to \infty.$$

Dann folgt $\mathfrak{t}_n \xrightarrow{srs} \mathfrak{t}_\infty$.

(2) *Aus*

$$\sup_{u \in B} |\mathfrak{t}_n[u] - \mathfrak{t}_\infty[u]| \to 0 \text{ für } n \to \infty$$

folgt $\mathfrak{t}_n \xrightarrow{nrs} \mathfrak{t}_\infty$.

Der erste Teil wurde in [75], Appendix A bewiesen, und den zweiten Teil findet man in [54], Theorem VIII.25 (c). Siehe auch [8] für eine sehr ausführliche Darstellung. Die Beschreibung und Untersuchung von Operatoren mit Hilfe von Formen ist wohl aus drei Gründen besonders praktikabel: Die Definitionsbereiche der Formen kann man in vielen Fällen leichter bestimmen, die Summe abgeschlossener Formen ist wieder eine abgeschlossene Form, und man kann für manche Betrachtungen die Ordnungsrelation zwischen Formen benutzen. So ist das wichtigste Kriterium für starke Resolventenkonvergenz die Monotonie. Genauer erhält man folgenden Satz, wobei wir den *regulären Teil* $\mathfrak{t}_r$ einer halbbeschränkten (nicht notwendig abschließbaren) Form $\mathfrak{t}$ benutzen: Dies ist nach [60] die größte abschließbare Form, die von $\mathfrak{t}$ majorisiert wird (siehe auch Satz 1.10). Für den nächsten Satz siehe [60, 90].

A2. Satz. *Seien $\mathfrak{t}, \mathfrak{t}_n$ $(n \in \mathbb{N})$ abgeschlossene Formen.*

(1) *Ist $\mathfrak{t}_n \leq \mathfrak{t}_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $D(\mathfrak{t}_\infty) := \{u \in \bigcap_n D(\mathfrak{t}_n); \sup_n \mathfrak{t}_n[u] =: \mathfrak{t}_\infty[u] < \infty\}$, so konvergiert $\mathfrak{t}_n \xrightarrow{srs} \mathfrak{t}_\infty$.*

(2) *Ist $\mathfrak{t}_0$ eine abgeschlossene Form mit $\mathfrak{t}_0 \leq \mathfrak{t}_{n+1} \leq \mathfrak{t}_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $D(\mathfrak{t}_{-\infty}) := \bigcup_n D(\mathfrak{t}_n)$, $\mathfrak{t}_{-\infty}[u] := \inf_n \mathfrak{t}_n[u]$, so konvergiert $\mathfrak{t}_n \xrightarrow{srs} \overline{(\mathfrak{t}_{-\infty})_r}$. Ist $\mathfrak{t}_{-\infty}$ abschließbar, so ist der Grenzwert gleich $\overline{\mathfrak{t}_{-\infty}}$.*

Wir wenden uns nun Dirichletformen zu, wobei wir hier natürlich nur sehr knapp die Definitionen und die wichtigsten Eigenschaften darstellen können. Die Standardreferenz ist wohl nach wie vor die Monographie [34] von Fukushima, obwohl gerade die für uns wichtigen

Grundtatsachen aus der Potentialtheorie in [49] zum Teil besser (weil einfacher) dargestellt sind. Diese Vereinfachungen erlauben dann auch eine substantielle Erweiterung der Theorie auf nicht lokalkompakte Räume, die es erlaubt, die in der Quantenfeldtheorie auftretenden Distributionenräume (zum Beispiel) zu behandeln. Diese mögliche Erweiterung ist für uns hier nicht von großer Bedeutung: im größten Teil der Arbeit setzen wir die Ultrakontraktivität der Halbgruppe voraus, wodurch wir uns, zumindest in konkreten Beispielen, auf endlich-dimensionale Situationen einschränken. Als neuere Referenz sei auch [7] erwähnt.

A3. Sei E ein lokalkompakter Hausdorffraum, $\mathfrak{B}$ seine Borel-σ-Algebra, und m ein Radonmaß auf E dessen Träger E ist. Eine abgeschlossene Form $\mathfrak{h} \geq 0$ in $L^2(E)$ (komplexwertige Funktionen!) mit Definitionsbereich D heißt *Dirichletform*, wenn für alle $u \in D$ auch $|u|$ in D ist, für reellwertiges $f \in D$ auch $f^+ \wedge 1 \in D$ ist, und folgende Ungleichungen erfüllt sind:

$$\mathfrak{h}[|u|] \leq \mathfrak{h}[u] \text{ und } \mathfrak{h}[f^+ \wedge 1] \leq \mathfrak{h}[f].$$

Dabei schreiben wir $f \wedge g$, $f \vee g$ für das punktweise Maximum beziehungsweise Minimum von Funktionen. Die Beurling–Deny–Kriterien (siehe [57], Theorem XIII.50 und Theorem XIII.51) liefern eine äquivalente Beschreibung dieser "Abschneide–Eigenschaften" mit Hilfe der Halbgruppe: $\mathfrak{h}$ ist Dirichletform genau dann, wenn

$$0 \leq f \leq 1 \Longrightarrow 0 \leq e^{-Ht} f \leq 1 \qquad (t \geq 0),$$

wobei wir mit H den zu $\mathfrak{h}$ gehörigen selbstadjungierten Operator bezeichnet haben. Ist $\mathfrak{h}$ eine Dirichletform und $\Phi_\varepsilon : \mathbb{R} \to [-\varepsilon, 1+\varepsilon]$ mit $\Phi_\varepsilon(t) = t$ für $t \in [0,1]$ und $0 \leq \Phi_\varepsilon(t) - \Phi_\varepsilon(s)$ für $s \leq t$, so ist für reellwertiges $f \in D$ auch $\Phi_\varepsilon \circ f \in D$ und $\mathfrak{h}[\Phi_\varepsilon] \leq \mathfrak{h}[f]$.

Für reellwertige $f, g \in D$ sieht man mit

$$f \wedge g = \frac{1}{2}(f + g - |f-g|), \, f \vee g = \frac{1}{2}(f + g + |f-g|)$$

insbesondere, daß $f \wedge g$, $f \vee g$ wieder in D liegen, und $\mathfrak{h}[f \wedge g], \mathfrak{h}[f \vee g] \leq \mathit{const} \cdot \max\{\mathfrak{h}[f], \mathfrak{h}[g]\}$ gilt.

Auch das Produkt beschränkter Elemente aus D liegt wieder in D und man hat folgende Abschätzung für die Norm: Für $f, g \in D \cap L^\infty$ gilt

$$\mathfrak{h}[f \cdot g] \leq \|f\|_\infty \mathfrak{h}[g] + \mathfrak{h}[f] \|g\|_\infty.$$

Eine Dirichletform $\mathfrak{h}$ mit Definitionsbereich D heißt *regulär*, falls

$$\overline{D \cap C_c(E)}^{\|\cdot\|_{\mathfrak{h}}} = D \text{ und } \overline{D \cap C_c(E)}^{\|\cdot\|_\infty} = C_0(E)$$

.

Eine wichtige Eigenschaft regulärer Dirichletformen sieht man der Definition bereits an: man kann Elemente im Definitionsbereich abschneiden und mit geeigneten reellen Funktionen komponieren, ohne durch diese Manipulationen den Definitionsbereich zu verlassen. Die Dichtheit von $D \cap C_c(E)$ gewährleistet außerdem genügend viele Funktionen, um damit "lokalisieren" zu können.

Wir werden nun ein wichtiges Hilfsmittel bereitstellen, das reguläre Dirichletformen bieten: die Kapazität. Auf einfachen Tatsachen aus der zugehörigen Potentialtheorie basiert die gesamte vorliegende Arbeit.

A4. Für $U \subset E$ offen heißt

$$\operatorname{cap}(U) := \inf\{\mathfrak{h}[f] + \|f\|_2^2; f \geq \chi_U\}$$

(mit der Konvention $\inf \emptyset = \infty$) die *Kapazität* von U. Wir setzen sie auf beliebiges $A \subset E$ fort, indem wir

$$\operatorname{cap}(A) := \inf\{\operatorname{cap}(U); A \subset U, U \text{ offen }\}$$

definieren. Wir sagen eine Eigenschaft gilt *quasi überall*, abgekürzt q.ü., wenn sie außerhalb einer Menge mit Kapazität Null gilt. Entsprechend heißt eine Funktion f *quasistetig*, wenn es für jedes $\varepsilon > 0$ eine offene Menge U_ε gibt, so daß $f|U_\varepsilon^c$ stetig ist. Ist $u \in D$, so gibt es einen quasistetigen Repräsentanten $\tilde{u}$ von u, der q.ü. eindeutig bestimmt ist. Dies folgt letztlich aus der Tatsache (angewandt auf Folgen in $D \cap C_c(E)$), daß eine in D bezüglich $\|\cdot\|_{\mathfrak{h}}$ konvergente Folge (u_n) eine Teilfolge besitzt, deren quasistetige Repräsentanten $\tilde{u}_{n_k}$ q.ü. konvergieren (siehe [34], §3.1). Mit quasistetigen Funktionen kann man die Kapazität für Borelmengen B wie folgt berechnen

$$\operatorname{cap}(B) = \inf\{\mathfrak{h}[u] + \|u\|_2^2; u \in D, \tilde{u} \geq \chi_B\},$$

und für $B \in \mathfrak{B}$ mit endlicher Kapazität wird das eindeutige minimierende Element e_B als *1-Gleichgewichtspotential* von B bezeichnet. Es gibt dazu ein eindeutig bestimmtes Maß $\nu_B \in \mathcal{S}_0$, das *Gleichgewichtsmaß* von B mit der Eigenschaft

$$\mathfrak{h}[e_B, u] = \int_E \tilde{u}(x) d\nu_B(x) \qquad (u \in D),$$

da $\mathfrak{h}[e_B, \cdot]$ ein positives Funktional (!) auf $C_c(E)$ induziert (siehe dazu [34], §3.3). Mit Hilfe des zu $\mathfrak{h}$ assoziierten Prozesses (siehe Abschnitt 3) erhält man eine quasistetige Version von e_B durch

$$e_B(x) := \mathbb{E}^x\{e^{-\tau_B}\},$$

wobei τ_B die in Abschnitt 3 definierte Treffzeit bezeichnet (siehe [34], §4.3, insbesondere Theorem 4.3.5).

A5. Konvexitätssatz von Riesz–Thorin.
Seien $1 \leq p_0, p_1, q_0, q_1 \leq \infty$ und sei $T : L^{p_0} \cap L^{p_1} \to L^{q_0} + L^{q_1}$ linear mit

$$\|Tf\|_{q_i} \leq M_i \|f\|_{p_i}$$

für alle f und $i = 1, 2$. Für $0 < t < 1$ seien p_t, q_t definiert durch

$$\frac{1}{p_t} = \frac{t}{p_1} + \frac{1-t}{p_0}, \frac{1}{q_t} = \frac{1}{q_1} + \frac{1-t}{q_0}.$$

Dann folgt

$$\|Tf\|_{q_t} \leq M_0^{1-t} M_1^t \|f\|_{p_t},$$

insbesondere induziert T einen stetigen linearen Operator von L^{p_t} nach L^{q_t}, falls $p_t < \infty$. Zum Beweis siehe [55]

Wir stellen nun noch zwei Argumente im Zusammanhang mit kompakten Operatoren vor, welche wir im Text verwenden.

A6. Sei E ein Banachraum mit der Approximationseigenschaft (siehe [16], §5). Dann sind kompakte Operatoren $K \in \mathfrak{K}(E)$ in der Norm durch endlichdimensionale approximierbar. Damit ist auch $K' \in \mathfrak{K}(E')$, und für $T_n, T \in \mathfrak{L}$ mit $T_n \xrightarrow{s} T$ folgt

$$\|(T_n - T)K\|, \|K(T_n - T)\| \to 0 \text{ für } n \to \infty.$$

Ist H ein Hilbertraum, $0 \leq T_n \leq K$, $T_n, K \in \mathfrak{K}(\mathsf{H})$, so folgt aus $T_n \xrightarrow{s} 0$ bereits $\|T_n\| \to 0$. Dazu benutzt man, daß für beliebiges $\varepsilon > 0$ eine endlichdimensionale Orthogonalprojektion P existiert mit $\|(1 - P)K\| < \varepsilon$.

Literaturverzeichnis

[1] R. ADAMS: “Sobolev Spaces”. Academic Press, New York, 1975.

[2] S. ALBEVERIO UND Z. MA: Perturbation of Dirichlet forms–Lower semiboundedness, Closability, and Form Cores. *J. Funct. Anal.* **99** (1991), 332–356.

[3] H. BAUER: “Maß- und Integrationstheorie”. W. de Gruyter, Berlin, 1990.

[4] BAUMGÄRTEL UND M. DEMUTH: Decoupling by a projection. *Rep. Math. Phys.* **15** (1979), 173–186.

[5] J. BAXTER, G. DALMASO UND U. MOSCO: Stopping times and Γ–convergence. *Trans. Amer. Math. Soc.* **303** (1987), 1–38.

[6] P. BLANCHARD UND Z.–M. MA: Semigroup of Schrödinger operators with potentials given by Radon measures. In: Stochastic Processes - Physics and Geometry, S. Albeverio et al. (Hrsg.), Proceedings, Ascona, World Sci., Singapore, 1990.

[7] N. BOULEAU UND F. HIRSCH: “Dirichlet forms and analysis on Wiener space”. De Gruyter, Berlin, 1991.

[8] J. BRASCHE: Verallgemeinerte Schrödingeroperatoren. Skript einer Vorlesung im Wintersemester 1993/94, Universität Frankfurt am Main.

[9] J. Brasche, P. Exner, Yu. Kuperin und P. Seba: Schrödinger operators with singular interactions. SFB 237-Preprint Nr. 132, Bochum, 1991.

[10] J.A. VAN CASTEREN: Sur des différences de semi–groupes de Feynman–Kac: une propriété de trace. *C. R. Acad. Sci. Paris*, t. 314, SÉrie I (1992), 997–1002.

[11] ________________: On trace class properties of singularly perturbed Feynman–Kac semigroups. Preprint, 1992.

[12] J.M. COMBES UND P.D. HISLOP: Some Transport and Spectral Properties of Disordered Media. In: Proceedings from the workshop on Schrödinger operators Aarhus 1991, E. Balslev (Hrsg.), Berlin, Springer–Verlag 1992.

[13] J.M. COMBES UND R. WEDER: New criterion for the existence and completeness of wave operators and applications to scattering by unbounded obstacles. *Comm. Partial Differential Equations* **6** (1981), 1179–1223.

[14] E.B. DAVIES: On Enss' approach to scattering theory. *Duke Math. J.* **47** (1980), 171–185.

[15] ____________: “Heat kernels and spectral theory”. Cambridge University Press, Cambridge, 1989.

[16] A. DEFANT UND K. FLORET: “Tensor Norms and Operator Ideals”. North Holland, Amsterdam, 1993.

[17] P. DEIFT UND B. SIMON: On the decoupling of finite singularities from the question of asymptotic completeness in two body quantum systems. *J. Funct. Anal.* **23** (1976), 218–238.

[18] M. DEMUTH: On topics in spectral and stochastic analysis for Schrödinger operators. Proceedings “Recent Developments in Quantum Mechanics”, A. Boutet de Monvel et al. (eds.), Kluwer, 1991.

[19] __________: On large coupling operator norm convergence of resolvent differences. *J. Math. Phys.* **32** (1991), 1522–1530.

[20] M. Demuth und J. van Casteren: On spectral theory of selfadjoint Feller generators. *Rev. Math. Phys.* **1**, 4 (1989), 325–414.

[21] __________: Framework and Results of Stochastic Spectral Analysis. Preprint 93-61, MPI Mathematik, Bonn, 1993.

[22] M. Demuth, P. Stollmann, G. Stolz und J. vanCasteren: Trace norm estimates for products of integral operators and diffusion semigroups. Preprint 93-84, MPI Mathematik, Bonn, erscheint in *Int. Equ. Operator Theory.*

[23] M. Demuth, P. Stollmann und J. vanCasteren: ..

[24] J. Diestel und J.J. Uhl: "Vector Measures". AMS Mathematical Surveys **15**, Providence, 1977.

[25] D.E. Edmunds und W.D. Evans: "Spectral theory and differential operators". Clarendon Press, 1987.

[26] C. Fefferman: Recent progress in classical Fourier Analysis. Proc. Int. Congr. Math., Vancouver 1974.

[27] C. Fefferman und A. Sanchez–Callé: Fundamental solutions for second order subelliptic operators. *Ann. of Math.* **124** (1986), 247–272.

[28] D. Feyel: Ensembles singuliers associées aux espaces de Banach réticules. *Ann. Inst. Fourier* **31**, 1 (1981), 192-223.

[29] D. Feyel und A. de la Pradelle: Espaces de Sobolev sur les ouvert fins. *C. R. Acad. Sci.* **280**, série A (1975), 1125–1127.

[30] P. Fitzsimmons und R. Getoor: A Weak Quasi–Lindelöf Property and Quasi–fine Supports of Measures. Preprint 1993.

[31] R.L. Ford: Generalized potentials and obstacle scattering. *Trans. Amer. Math. Soc.* **329** (1992), 415–431.

[32] __________: The scattering matrix for singular Schrödinger operators. Erscheint in *J. Math. An. and Appl.*

[33] B. Fuglede: The quasi–topology associated with a countably subadditive set–function. *Ann. Inst. Fourier* **21** (1971), 123–179.

[34] M. Fukushima: "Dirichlet Forms and Markov Processes". North Holland, Amsterdam, 1980.

[35] M. Fukushima und Y. Le Jan: On quasi–supports of smooth measures and closability of pre–Dirichlet forms. *Osaka J. Math.* **28** (1991), 837–845.

[36] M. Fukushima, K.-J. Sato und S. Taniguchi: On the closable parts of pre-Dirichlet forms and the fine supports of underlying measures. *Osaka J. Math.* **28** (1991), 517-538.

[37] F. Gesztesy und Zh. Zhao: Domain perturbations, Brownian motion, capacities, and ground states of Dirichlet Schrödinger operators. *Math. Z.* **215** (1994), 143–150.

[38] A. Grothendieck: Produit tensoriels topologiques et espaces nucléaires. Mem. Amer. Math. Soc. No. 16, 1955.

[39] L. Hedberg: Spectral synthesis and stability in Sobolev spaces. In: Euclidean Harmonic analysis, Proceedings Maryland, LNM **779** (1980), 73–103.

[40] R. Hempel: Perturbation by quadratic forms and invariance of essential spectra. *Math. Z.* **185** (1984), 281-289.

[41] R. Hempel und I. Herbst: Strong magnetic fields, Dirichlet boundaries, and spectral gaps. Preprint 1994.

[42] I. Herbst und Zh. Zhao: Sobolev spaces, Kac regularity, and the Feynman–Kac formula. In: Seminar on Stochastic Processes, Birkhäuser, Boston 1987.

[43] L. Hörmander: Hypoelliptic second order differential equations. *Acta Math.* **119** (1967), 147–171.

[44] N. Jacob: Local Regularity of Solutions of a Class of Pseudo Differential Equations in Dirichlet Spaces. *Math. Nachr.* **164** (1994), 63–89.

[45] A. Jensen und T. Kato: Asymptotic behavior of the scattered phase for exterior domains. *Comm. Partial Differential Equations* **3** (1978), 1165–1195.

[46] D. Jerison und A. Sanchez–Calle: Subelliptic, second order differential operators. LNM 1277, Springer–Verlag, Berlin, 1984, 46–77.

[47] T. Kato: "Perturbation Theory for Linear Operators". 2nd ed. Springer–Verlag, Berlin, 1976.

[48] K. Kuwae: Permanent Sets of Measures Charging No Exceptional Sets and the Feynman–Kac Formula. Erscheint in *Forum Math.*

[49] Z.M. Ma und M. Röckner: "Introduction to the theory of (non–symmetric) Dirichlet forms". Springer, Berlin, 1992.

[50] I. McGillivray, P. Stollmann und G. Stolz: Absence of absolutely continuous spectra for multidimensional Schrödinger operators with high barriers. Erscheint in *Bull. London Math. Soc.*

[51] E.M. Ouhabaz: Second order elliptic equations with no gap in the essential spectrum on L^p. Preprint, 1993.

[52] A. Pietsch: "Operator ideals". North Holland, Amsterdam, 1980.

[53] J. Rauch und M. Taylor: Potential and Scattering Theory on Wildly perturbed domains. *J. Funct. Anal.* **18** (1975), 27–59.

[54] M. Reed und B. Simon: "Methods of Modern Mathematical Physics", vol. I. Academic Press, New York, 1972.

[55] __________: "Methods of Modern Mathematical Physics", vol. II. Academic Press, New York, 1975.

[56] __________: "Methods of Modern Mathematical Physics", vol. III. Academic Press, New York, 1979.

[57] __________: "Methods of Modern Mathematical Physics", vol. IV. Academic Press, New York, 1978.

[58] D.W. Robinson: "Elliptic Operators and Lie Groups". Oxford University Press, Oxford, 1991.

[59] L. Rothschild und E.M. Stein: Hypoelliptic differential operators and nilpotent groups. *Acta Math.* **137** (1976), 247–320.

[60] B. Simon: A canonical decomposition for quadratic forms with applications to monotone convergence theorems. *J. Funct. Anal.* **28** (1978), 377–385.

[61] ________: "Functional Integration and Quantum Physics". Academic Press, New York, 1979.

[62] ________: Trace ideals and their applications. London Mathematical Society Lecture Notes, Nr. 35, Cambridge University Press, Cambridge, 1979.

[63] ________: Schrödinger semigroups. *Bull. Amer. Math. Soc.* **7** (1982) 447–526.

[64] B. Simon und T. Spencer: Trace Class Perturbations and the Absence of Absolutely Continuous Spectra. *Commun. Math Phys.* **125** (1989) 113–125.

[65] E.M. Stein: "Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions". Princeton University Press, Princeton, 1970.

[66] P. Stollmann: Admissible and regular potentials for regular Dirichlet forms. *J. Operator Theory* **18** (1987), 139–151.

[67] ________: Representation of operators by kernels. *Collect. Math.* **42**, 3 (1991), 285–292.

[68] ________: Smooth perturbations of regular Dirichlet forms. *Proc. Amer. Math. Soc.* **117** (1992), 747–752.

[69] ________: Closed ideals in Dirichlet spaces. *Potential Analysis* **2** (1993), 263–268.

[70] ________: Closed ideals in Dirichlet spaces. Preprint, 1991.

[71] ________: Scattering by obstacles of finite capacity. *J. Funct. Anal.* **121** (1994), 416–425.

[72] ________: A convergence theorem for Dirichlet forms with applications to boundary value problems with varying domains. Erscheint in *Math. Z.*

[73] ________: Trace ideal properties of perturbed diffusion semigroups. Operator Theory: Advances and Applications, Vol. 70, M. Demuth et al. (Hrsg.), Birkhäuser Verlag, Basel, 1993, 153–158.

[74] P. Stollmann und G. Stolz: Singular spectrum for multidimensional Schrödinger operators with potential barriers. Erscheint in *J. Operator Theory.*

[75] P. Stollmann und J. Voigt: Perturbation of Dirichlet forms by measures. erscheint in*Potential Analysis.*

[76] G. Stolz: Spectral Theory for Slowly Oscillating Potentials: II. Schrödinger operators. Preprint 1992.

[77] ________: Schrödinger operators with barriers. Habilitationsschrift, Frankfurt am Main, 1994.

[78] T. Sturm: Schrödinger equations with discontinuous solutions. In: Potential Theory, J. Kral et al. (Hrsg.), Plenum Press, 1988, 333–337.

[79] ________: Störung von Hunt–Prozessen durch signierte additive Funktionale. Dissertation, Erlangen, 1989.

[80] ________: Schrödinger operators with highly singular, oscillatory potentials. *Manuscripta Math.* **76** (1992), 367–395.

[81] ———: Measures charging no polar sets and additive functionals of Brownian motion. *Forum Math.* **4** (1992), 257–297.

[82] ———: Schrödinger semigroups on manifolds. *J. Funct. Anal.* **118** (1993), 309–350.

[83] ———: On the L^p-Spectrum of Uniformly Elliptic Operators on Riemannian Manifolds. *J. Funct. Anal.* **118** (1993), 442–453.

[84] M. Takesaki: "Theory of Operator Algebras, I". Springer–Verlag, New York, 1979.

[85] N. Varopoulos: Hardy–Littlewood theory for semigroups. *J. Funct. Anal.* **63** (1985), 240-260.

[86] J. Voigt: Absorption semigroups, their generators, and Schrödinger semigroups. *J. Funct. Anal.* **67** (1986), 167–205.

[87] ———: On the convex compactness property for the strong operator topology. *Note Mat.* Vol. XII (1992), 259–269.

[88] R. Weder: Scattering theory for high order operators in domains with infinite boundary. *J. Funct. Anal.* **57** (1984), 207–231.

[89] J. Weidmann: "Lineare Operatoren in Hilberträumen". B.G. Teubner, Stuttgart, 1976.

[90] ———: Stetige Abhängigkeit der Eigenwerte und Eigenfunktionen elliptischer Differentialoperatoren vom Gebiet. *Math. Scand.* **54** (1984), 51–69.

[91] ———: Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik II. Skript einer Vorlesung im Sommersemester 1988, Universität Frankfurt am Main.

[92] ———: Unveröffentlicht. 1992.

[93] P. Wojtaszczyk: "Banach Spaces for Analysts". Cambridge University Press, Cambridge, 1991.

Index