Ideale und Bänder in prä-Riesz-Räumen

Anke Kalauch

TU Dresden

Drei-Städte-Seminar 06.02.2015

Ziel:

Übertragung von Strukturen aus der Vektorverbandstheorie auf halbgeordnete Vektorräume

- Disjunktheit, Ideale, Bänder in prä-Riesz-Räumen
- Darstellung von prä-Riesz-Räumen und Eigenschaften von Idealen und Bändern
- disjunktheitserhaltende und banderhaltende Operatoren

Outline

Halbgeordnete Vektorräume

X Vektorraum, $X_+ \subseteq X$ heißt Kegel, falls

(a) $\forall x, y \in X_+, \lambda \in [0, \infty) \Rightarrow \lambda x + y \in X_+$

(b) $x, -x \in X_+ \Rightarrow x = 0$

Die Relation $\leq$ definiert durch $x \leq y :\Leftrightarrow y - x \in X_+$ ist eine Vektorraumhalbordnung, d.h.

(i) $\forall x, y, z \in X$ mit $x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z$

(ii) $\forall x \geq 0, \lambda \in [0, \infty) \Rightarrow \lambda x \geq 0$

Der halbgeordnete Vektorraum $(X, \leq)$ ist gerichtet genau dann wenn der Kegel X_+ generierend ist, d.h. $X = X_+ - X_+$.

X heißt Archimedisch, falls

$$\forall x, y \in X \text{ mit } (\forall n \in \mathbb{N} : \; nx \leq y) \Longrightarrow x \leq 0.$$

Beispiele halbgeordneter Vektorräume

1. Funktionen- und Folgenräume mit der "natürlichen" (punktweisen) Halbordnung, z.B. $C[0,1]$, c, ℓ^2, ...

   Diese Räume sind oft Vektorverbände, d.h.

   $$\forall x, y \in X \; \exists x \vee y := \sup\{x, y\} \quad (\text{und } x \wedge y := \inf\{x, y\}),$$

   mit Verbandsnorm, d.h. $|x| \leq |y| \;\Rightarrow\; \|x\| \leq \|y\|$

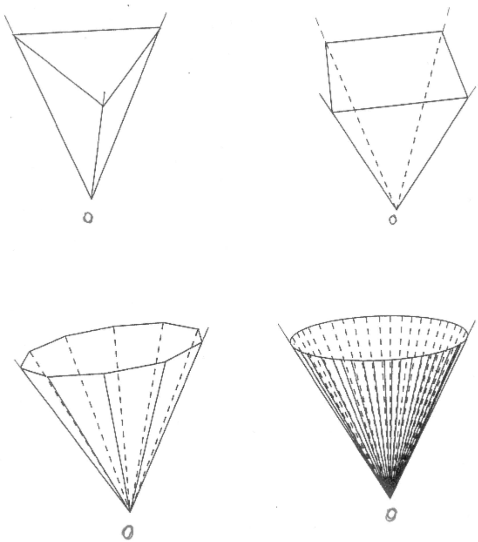
   Teilräume von Vektorverbänden mit der induzierten Halbordnung sind im Allg. keine Vektorverbände. Bsp.: $C^1[0,1]$

2. Räume von Operatoren zwischen halbgeordneten Vektorräumen (X, X_+), (Y, Y_+): Für $S, T \in L(X, Y)$ definiere

   $$S \leq T \;:\Longleftrightarrow (T-S)[X_+] \subseteq Y_+, \quad L_+(X, Y) := \{T \in L(X, Y) \colon \; T \geq 0\}$$

   Selbst wenn X, Y Vektorverbände sind, liefert die Halbordung in $L^r(X, Y) := L_+(X, Y) - L_+(X, Y)$ im Allg. keinen Vektorverband.

Kegel im $\mathbb{R}^3$ – von Verband bis Anti-Verband



Strukturen in Vektorverbänden

(X, X_+) Vektorverband, $|x| := x \vee (-x)$. $M \subseteq X$ heißt

- solid, falls $\forall x \in X$, $m \in M$ mit $|x| \leq |m|$ gilt $x \in M$
- Ideal, falls M solider Teilraum von X ist

Disjunktheit:

$$x \perp y \quad :\Leftrightarrow \quad |x| \wedge |y| = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad |x+y| = |x-y|$$

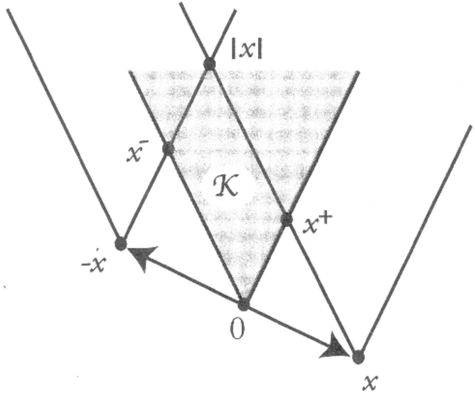
Disjunktes Komplement: $M^{\mathrm{d}} := \{x \in X; \forall m \in M\colon\, x \perp m\}$

Ordnungskonvergenz: $x_\alpha \to x$, falls $\exists\, y_\alpha \downarrow 0$ mit $\forall \alpha$: $\pm(x - x_\alpha) \leq y_\alpha$.

Falls X ein Archimedischer Vektorverband ist, gilt:

$$\boxed{M \text{ ist ordnungsabgeschlossenes Ideal} \iff M = M^{\mathrm{dd}}}$$

Modul $|x|$ versus $\{x, -x\}^u$



Strukturen in halbgeordneten Vektorräumen

(X, X_+) halbgeordneter Vektorraum.

Disjunktheit:

$$x \perp y \quad :\Longleftrightarrow \quad \{x+y, -(x+y)\}^{\mathrm{u}} = \{x-y, -(x-y)\}^{\mathrm{u}}$$

$M \subseteq X$ heißt

- solid, falls $\forall x \in X$, $m \in M$ mit $\{x, -x\}^{\mathrm{u}} \supseteq \{m, -m\}^{\mathrm{u}}$ gilt $x \in M$
- Ideal, falls M solider Teilraum von X ist
- Band, falls $M = M^{\mathrm{dd}}$.

Beispiel:

$X = \mathrm{span}\{c_{00}, \mathbf{1}\}$ – Vektorverband
$\mathrm{L}^{\mathrm{r}}(X)$ – halbgeordneter Vektorraum, kein Vektorverband [Wickstead]
Menge aller ordnungsstetigen Operatoren in $\mathrm{L}^{\mathrm{r}}(X)$ ist ein Band
[van Gaans, K., 2008]

Kooperation

Onno van Gaans, Universität Leiden

Strukturen in prä-Riesz-Räumen: Teilprojekt des **VIDI-Projekts Stationary dynamics in infinite dimensions**, 2006-2010, der Niederländischen Forschungsorganisation NWO

Prä-Riesz-Räume: Motivation

Sei X ein halbgeordneter Vektorraum.
Falls ein Vektorverband Y und eine Abbildung $i\colon X \to Y$ linear, bipositiv (d.h. für $x \in X$ gilt $x \geq 0 \iff i(x) \geq 0$) existieren, war folgendes Problem offen:

Wann gilt für alle $x, y \in X$: $\quad x \perp y :\iff i(x) \perp i(y)$?

$i[X]$ muss ordnungsdicht in Y sein, d.h.

$$\forall y \in Y\colon\ y = \inf\{i(x); x \in X,\ i(x) \geq y\}$$

Definition (van Haandel, 1993)

Ein halbgeordneter Vektorraum heißt prä-Riesz-Raum, falls es einen Vektorverband Y und eine lineare bipositive Abbildung $i\colon X \to Y$ gibt, für die $i[X]$ ordnungsdicht in Y ist.

Prä-Riesz-Räume: Eigenschaften

Theorem (van Haandel, 1993)

- *Ein halbgeordneter Vektorraum X ist eine prä-Riesz-Raum $\iff$ $\forall x, y, z \in X$ mit $\{x+y, x+z\}^{\mathrm{u}} \subseteq \{y, z\}^{\mathrm{u}}$ gilt $x \geq 0$.*
- *Jeder Archimedische gerichtete halbgeordnete Vektorraum ist ein prä-Riesz-Raum.*
- *Jeder prä-Riesz-Raum ist gerichtet.*

Bezeichnung: Y heißt Vektorverbandsüberdeckung von X, der von $i[X]$ erzeugte Vektorverband in Y heißt Riesz-Vervollständigung.

Beispiel: Ist X ein Banachraum und X_+ ein abgeschlossener generierender Kegel in X, dann ist (X, X_+) ein prä-Riesz-Raum. Insbesondere: Ist $X = \mathbb{R}^n$ und X_+ ein abgeschlossener Kegel in $\mathbb{R}^n$ mit nicht-leerem Inneren, dann ist (X, X_+) ein prä-Riesz-Raum.

Disjunktheit unter Einbettung

Proposition (van Gaans, K., 2006)

Seien X ein prä-Riesz-Raum, Y ein Vektorverband und $i\colon X \to Y$ eine lineare bipositive Abbildung so, dass $i[X]$ ordnungsdicht in Y ist. Dann gilt für alle $x, y \in X$

$$x \perp y \iff i(x) \perp i(y).$$

Die Ordnungsdichtheit braucht man für '$\Longrightarrow$'.

Proposition

Für $M \subseteq X$ gilt $M^{\mathrm{d}} = \left[i[M]^{\mathrm{d}}\right] i$

Wie verhalten sich Ideale und Bänder unter der Einbettung?

Ideale und Bänder unter Einbettung

(R) Wenn $J \subseteq Y$ ein Ideal (Band, ...) ist, ist dann auch $[J]i := \{x \in X;\ i(x) \in J\}$ ein Ideal (Band, ...)?

(E) Wenn $I \subseteq X$ ein Ideal (Band, ...) ist, gibt es dann ein Ideal (Band, ...) J in Y mit $I = [J]i$?

(R) für Ideale:

Proposition (v. Gaans, K., 2008)

Sei X ein prä-Riesz-Raum.

- *Wenn $J \subseteq Y$ solid (bzw. ein Ideal) ist, dann auch $[J]i$.*
- *Wenn $J \subseteq Y$ ordnungsabgeschlossen ist, dann auch $[J]i$.*

(E) für Bänder

Proposition (van Gaans, K., 2008, 2012)

Sei I Band in X, dann sind die Mengen

(I) $J := \left(i\left[I^{\mathrm{d}}\right]\right)^{\mathrm{d}}$, *und*

(II) $J := (i\,[I])^{\mathrm{dd}}$

Bänder in Y, wobei jeweils $I = [J]i$ gilt.

J in (II) ist das kleinste Erweiterungsband für I (ein größtes existiert im Allg. nicht).

(I):

$$[J]i = \left[i\left[I^{\mathrm{d}}\right]^{\mathrm{d}}\right]i = \left(I^{\mathrm{d}}\right)^{\mathrm{d}} = I$$

Für welche Ideale gelten (R) und (E)?

Solvexe Mengen

Definition (van Gaans, 1999)

Sei X ein halbgeordneter Vektorraum. $M \subseteq X$ heißt solvex, falls für jedes $x \in X$, $x_1, \ldots, x_n \in M$ und $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in (0,1]$ mit $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 1$ und

$$\{x, -x\}^{\mathrm{u}} \supseteq \left\{ \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k \lambda_k x_k ;\ \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n \in \{1, -1\} \right\}^{\mathrm{u}}$$

gilt $x \in M$.

Proposition (van Gaans, 1999)

- *Jede solvexe Menge ist solid und konvex.*
- *Ist X ein Vektorverband, dann ist $M \subseteq X$ solvex $\iff$ M ist solid und konvex. Insbesondere ist jedes Ideal solvex.*

(R) und (E) für solvexe Ideale

Proposition (van Gaans, K., 2008)

Sei X ein prä-Riesz-Raum.

(i) *Wenn $J \subseteq Y$ solvex ist, dann auch $[J]i$.*

(ii) *Ist I solvex in X und J ist die solvexe Hülle von $i[I]$ in Y, dann gilt $I = [J]i$.*

[van Gaans, K., 2008]	(R)	(E)
Ideal	ja	nein
ordnungsabgeschlossenes Ideal	ja	nein
solvexes Ideal	ja	ja
Band	nein	ja

Theorem (van Gaans, K., 2008)

In einem prä-Riesz-Raum ist jedes Band ein ordnungsabgeschlossenes solvexes Ideal.

Archimedische Vektorverbände versus prä-Riesz-Räume

Archimedean vector lattice

$$
\begin{tikzcd}
\boxed{\text{band} = \text{o-closed ideal}} \arrow[d, Rightarrow, shift right] \\
\boxed{\text{ideal} = \text{solvex ideal}} \arrow[u, Rightarrow, shift right, "/" marking]
\end{tikzcd}
$$

pre-Riesz space

$$
\begin{tikzcd}
 & \boxed{\text{band}} \arrow[dl, Rightarrow, shift right] \arrow[dr, Rightarrow, shift left] & \\
\boxed{\text{o-closed ideal}} \arrow[ur, Rightarrow, shift right, "/" marking] \arrow[rr, Rightarrow, shift right, "/" marking] \arrow[dr, Rightarrow, shift right] & & \boxed{\text{solvex ideal}} \arrow[ul, Rightarrow, shift left, "/" marking] \arrow[ll, Rightarrow, shift right, "/" marking] \arrow[dl, Rightarrow, shift left] \\
 & \boxed{\text{ideal}} \arrow[ul, Rightarrow, shift right, "/" marking] \arrow[ur, Rightarrow, shift left, "/" marking] &
\end{tikzcd}
$$

Charakterisierung gerichteter Ideale

Theorem (K., van Gaans, 2014)

Seien (X, K) ein halbgeordneter Vektorraum und J ein gerichteter Teilraum von X. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

(i) *Für alle $y, z \in J$ gilt $[y, z] \subset J$.*

(ii) *J is solid (d.h. J ist ein Ideal).*

(iii) *J is solvex.*

(iv) *Es gibt einen halbgeordneten Vektorraum (Y, L) und einen positiven linearen Operator $T\colon X \to Y$ so, dass $J = \operatorname{Ker} T$.*

(v) *Es gibt einen halbgeordneten Vektorraum (Y, L) und einen Riesz*-Homomorphismus $T\colon X \to Y$ so, dass $J = \operatorname{Ker} T$.*

(vi) *Es gibt einen halbgeordneten Vektorraum (Y, L) und einen Riesz-Homomorphismus $T\colon X \to Y$ so, dass $J = \operatorname{Ker} T$.*

Funktionaldarstellung

Funktionaldarstellung [Kadison, 1951]:
Ist (X, X_+) ein Archimedischer halbgeordneter Vektorraum mit Ordnungseinheit u (d.h. $\forall x \in X \; \exists \, \alpha \geq 0$: $-\alpha u \leq x \leq \alpha u$), dann gibt es eine lineare bipositive Abbildung $\Phi \colon X \to \mathrm{C}(K)$, wobei K ein kompakter Hausdorff-Raum ist.

Vorteil: Punktweise Halbordnung in $\mathrm{C}(K)$!

Konstruktion von K:
Auf X wird die Norm $\|x\| := \inf\{\alpha \in \mathbb{R}_+; -\alpha u \leq x \leq \alpha u\}$ betrachtet.
Die Menge

$$\Sigma := \{\varphi \in X'; \; \varphi[X_+] \subseteq \mathbb{R}_+, \; \varphi(u) = 1\}$$

ist eine Basis des dualen Kegels. Sei Λ die Menge der Extremalpunkte von Σ. Setze $K = \overline{\Lambda}$ als den schwach*-Abschluß von Λ in Σ.

Funktionaldarstellung ist ordnungsdicht

Kadisons Einbettung: Die Abbildung

$$\begin{aligned} \Phi : X &\rightarrow \mathrm{C}(K), \\ x &\mapsto \Phi(x) : \varphi \mapsto \varphi(x) \end{aligned}$$

ist linear und bipositiv mit $u \mapsto 1$.

Theorem (Lemmens, van Gaans, K., 2014)

Ist X ein Archimedischer halbgeordneter Vektorraum mit Ordnungseinheit, dann ist $\Phi[X]$ ordnungsdicht in $\mathrm{C}(K)$, d.h. $\mathrm{C}(K)$ ist eine Vektorverbandsüberdeckung von X.

Funktionaldarstellung versus Riesz-Vervollständigung

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "i", "\text{order isomorphism}"'] \arrow[d, "\Phi"', "\text{order isomorphism}"] & & i[X] \arrow[r, phantom, "\subseteq", "\text{order dense}"'] & Y \arrow[d, "\pi", "\text{lattice isomorphism}"'] \\
\Phi[X] \arrow[r, phantom, "\subseteq"] & \mathrm{L}(X,K) \arrow[r, phantom, "\subseteq"] & \mathrm{C}(\overline{\Lambda}) & \pi[Y] \arrow[d, phantom, "\subseteq", "\text{norm dense}"'] \\
 & & & \mathrm{C}(\Omega) \arrow[ul, "A"', "\text{isometric lattice isomorphism}"]
\end{tikzcd}
$$

Bänder in $C(K)$

[Zaanen 1997]: Für eine offene Menge $M \subseteq K$ ist

$$I_M := \{x \in C(K);\ \forall \varphi \in K \setminus M\colon x(\varphi) = 0\}$$

ein Ideal.

Proposition

I_M ist ein Band $\iff$ M ist regulär offen, d.h. $M = \operatorname{int}(\overline{M})$.

Sei X ein Archimedischer halbgeordneter Vektorraum mit Ordnungseinheit und Vektorverbandsüberdeckung

$$\Phi : X \to C(K), \quad K = \overline{\Lambda}.$$

Können Bänder in X mittels Teilmengen von K charakterisiert werden?

Charakterisierung von Bändern mittels Funktionaldarstellung

$\Phi : X \to \mathrm{C}(K)$

Für $M \subseteq K$ setze $\mathrm{Z}(M) = \{x \in X;\ \forall \varphi \in M\colon \varphi(x) = 0\}$,
für $B \subseteq X$ setze $\mathrm{N}(B) := \{\varphi \in K;\ \forall b \in B\colon \varphi(b) = 0\}$.

Theorem (van Gaans, K., 2014)

Sei X ein Archimedischer halbgeordneter Vektorraum mit Ordnungseinheit.

- *Ist B ein Band in X, dann gilt $B = \mathrm{Z}(\mathrm{N}(B))$.*
- *Für $B \subseteq X$ gelte $B = \mathrm{Z}(\mathrm{N}(B))$. B ist ein Band genau dann wenn $N(B)$ bisaturiert ist.*

Eine Teilmenge $M \subseteq K$ heißt bisaturiert, falls $M = \mathrm{sat}(K \setminus \mathrm{sat}(K \setminus M))$, wobei $\mathrm{sat}(M) = \mathrm{N}(\mathrm{Z}(M)) = K \cap \overline{\mathrm{aff}(M)}$.

Disjunktheit in Anti-Verbänden

Sei (X, X_+) ein Anti-Verband (d.h. die Menge $\{x, y\}$ besitzt genau dann ein Supremum, wenn x und y vergleichbar sind).

[Kadison, 1951]
A moment's thought shows that this is as strongly nonlattice as a partially ordered vector space can be.

Theorem (Lemmens, van Gaans, K., 2014)

Ein Prä-Riesz-Raum (X, X_+) ist ein Anti-Verband $\Longleftrightarrow$ es gibt keine nicht-trivialen disjunkten Elemente in X_+.

Beispiel eines Anti-Verbandes mit disjunkten Elementen in [Lemmens, van Gaans, K., 2014]

A moment's thought shows that an anti-lattice is as strongly nonlattice as it can be if it contains no disjoint elements.

Disjunktheitserhaltende Operatoren

Sei X prä-Riesz-Raum. Ein Operator $T\colon X \supseteq \mathcal{D}(T) \to X$ heißt

- disjunktheitserhaltend, falls für alle $x, y \in \mathcal{D}(T)$ mit $x \perp y$ gilt $Tx \perp Ty$
- banderhaltend, falls für jedes Band B in X gilt $T(B \cap \mathcal{D}(T)) \subseteq B$ (äquivalent: Für alle $x \in \mathcal{D}(T)$, $y \in X$ mit $x \perp y$ gilt $Tx \perp y$)

Für Banach-Verbände wurde das folgende Resultat in [Arendt, 1986] bewiesen.

Theorem (van Gaans, K., 2013)

Sei (X, X_+) ein geordneter Banachraum mit abgeschlossenem generierendem Kegel und semimonotoner Norm, und sei $T\colon [0, \infty) \to \mathcal{L}(X)$ eine C_0-Halbgruppe mit Generator $A\colon X \supseteq \mathcal{D}(A) \to X$, wobei für jedes $t \in [0, \infty)$ der Operator $T(t)$ disjunktheitserhaltend ist. Dann ist A banderhaltend.

Beweisidee:

- Ordnungsdichte bipositive Einbettung in einen Vektorverband V: $i\colon X \to V$
- Es gibt eine Norm $\|\cdot\|_0$ auf X, die äquivalent ist zu $\|\cdot\|$ und die sich zu einer Vektorverbandshalbnorm ρ auf V erweitern lässt, d.h. $\forall x \in X\colon\ \rho(i(x)) = \|x\|_0$:

$$\rho\colon V \to \mathbb{R},\ y \mapsto \inf\{\|x\|_0;\ x \in X, |y| \le i(x)\}$$

- Für $x, y \in X$ mit $\rho(|i(x)| \wedge |i(y)|) = 0$ gilt $x \perp y$.

Disjunktheitserhaltende Operatoren - Beispiel

Definition (van Haandel, 1993)

Seien X, Y Prä-Riesz-Räume. Ein linearer Operator $T\colon X \to Y$ heißt Riesz*-Homomorphismus, wenn für alle $x, y \in X$ gilt
$T\left[(\{x, y\}^{\mathrm{u}})^{\ell}\right] \subseteq (\{Tx, Ty\}^{\mathrm{u}})^{\ell}$.

Jeder Riesz*-Homomorphismus ist ein positiver disjunktheitserhaltender Operator.

[Meyer, 1976]: Jeder ordnungsbeschränkte disjunktheitserhaltende Operator T zwischen Archimedischen Vektorverbänden besitzt einen Modul (insbesondere folgt daraus, dass T regulär ist, d.h. T ist die Differenz zweier positiver Operatoren).

[van Gaans, K., 2013]: Beispiel eines ordnungsbeschränkten disjunktheitserhaltenden Operator T zwischen Archimedischen Prä-Riesz-Räumen, wobei T nicht regulär ist.

Inverse disjunktheitserhaltender bijektiver Operatoren

[Huijsmans, de Pagter, 1993]:
Sind X, Y Banach-Verbände und $T : X \to Y$ bijektiv und disjunktheitserhaltend, dann ist T^{-1} auch disjunktheitserhaltend.

[Abramovich, Kitover, 2000]:
Für Vektorverbände X, Y gilt dies im Allg. nicht.

Theorem (K., van Gaans, 2013)

Seien X, Y prä-Riesz-Räume, X pervasiv, $T : X \to Y$ bijektiv und

$$\forall x, y \in X \text{ mit } \{x\}^{\mathrm{dd}} \subseteq \{y\}^{\mathrm{dd}} \Longrightarrow \{Tx\}^{\mathrm{dd}} \subseteq \{Ty\}^{\mathrm{dd}},$$

dann ist T^{-1} disjunktheitserhaltend.

Theorem (K., Lemmens, van Gaans, 2014)

Sei K ein abgeschlossener generierender Kegel in $\mathbb{R}^n$ und $T : (\mathbb{R}^n, K) \to (\mathbb{R}^n, K)$ bijektiv und disjunktheitserhaltend. Dann ist T^{-1} disjunktheitserhaltend.

Publikationen zu Strukturen in prä-Riesz-Räumen

O. van Gaans, A. Kalauch
Disjointness in partially ordered vector spaces
Positivity **10**(2006), no. 3, 573-589.

O. van Gaans, A. Kalauch
Ideals and bands in pre-Riesz spaces
Positivity **12**(2008), no. 4, 591–611.

O. van Gaans, A. Kalauch
Bands in pervasive pre-Riesz spaces
Operators and matrices **2**(2008), no. 2, 177–191.

A. Kalauch, B. Lemmens, O. van Gaans
Riesz completions, functional representations and anti-lattices
Positivity **18**(2014), no. 1, 201–218

O. van Gaans, A. Kalauch
Directed ideals in partially ordered vector spaces
Indag. Math. (N.S.) **25**(2014), no. 2, 296–304

A. Kalauch, B. Lemmens, O. van Gaans

Bands in partially ordered vector spaces with order unit, to appear in *Positivity*

Disjunktheit in Räumen mit RZE

Sei (X, X_+) halbgeordneter Vektorraum mit der Rieszschen Zerlegungseigenschaft (RZE), d.h.

$$\forall x, y \in X_+: \qquad [0, x] + [0, y] = [0, x + y]$$

In [Katsikis, Polyrakis, 2006] wird für $x, y \in X_+$ definiert:

$$x \tilde{\perp} y :\Longleftrightarrow [0, x] \cap [0, y] = \{0\}$$

Verallgemeinerung dieser Disjunktheit auf Räume ohne RZE ist nicht sinnvoll, da dort disjunkte Komplemente im Allg. nicht konvex sind. Beispiel: Kreiskegel.

Proposition (K., van Gaans, 2008)

Sei (X, X_+) ein prä-Riesz-Raum mit RZE. Für $x, y \in X_+$ gilt

$$x \perp y \Longleftrightarrow x \tilde{\perp} y.$$

Halbordnung in Tensorprodukten

Seien (X, K_X) und (Y, K_Y) gerichtete Archimedische halbgeordnete Vektorräume und $T = X \otimes Y$ ihr (algebraisches) Tensorprodukt.

Projektiver Kegel: $K_T := \left\{ \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i ; x_i \in K_X, y_i \in K_Y, n \in \mathbb{N} \right\}$

Ein Kegel K in T heißt Archimedischer Tensorkegel, falls für jeden gerichteten Archimedischen halbgeordneten Vektorraum (S, K_S) und jede positive bilineare Abbildung $\sigma : X \times Y \to S$ die induzierte lineare Abbildung $\sigma^* : (X \otimes Y, K) \to (S, K_S)$ positiv ist.

[Grobler, Labuschagne, 1988] Falls in $X \otimes Y$ ein Archimedischer Tensorkegel existiert, so ist dieser eindeutig.

Theorem (K., van Gaans, 2010)

Für einen Kegel K in $X \otimes Y$ sind äquivalent:
(i) K ist der Archimedische Tensorkegel.
(ii) K ist der kleinste Archimedische Kegel mit $K_T \subseteq K$.
(iii) K ist der relative uniforme Abschluss von K_T in $(X \otimes Y, K_T)$.

Disjunktheitserhaltende Inverse

Ein prä-Riesz-Raum X mit Vektorverbandsüberdeckung (V, i) erfüllt die Bedingung $(*)$, falls gilt

$$\forall v \in V,\ v \geq 0,\ \exists M \subseteq X \text{ mit } \{v\}^{\mathrm{d}} = i[M]^{\mathrm{d}}.$$

[Abramovich, Kitover, 2000]: Ein Operator $T\colon X \to Y$ erfüllt die Bedingung (β), falls

$$\forall x, y \in X \text{ mit } \{x\}^{\mathrm{dd}} \subseteq \{y\}^{\mathrm{dd}} \text{ gilt } \{Tx\}^{\mathrm{dd}} \subseteq \{Ty\}^{\mathrm{dd}}$$

Theorem (van Gaans, K., 2012)

Seien X, Y Prä-Riesz-Räume und $T\colon X \to Y$ linear und bijektiv.

(i) *Wenn X die Bedingung $(*)$ und T die Bedingung (β) erfüllen, dann ist T^{-1} disjunktheitserhaltend.*

(ii) *Wenn T und T^{-1} disjunktheitserhaltend sind, dann erfüllt T die Bedingung (β).*

Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit!