

Eine Vermutung von Trèves und ihre Verallgemeinerung auf Ultradistributionen

Thomas Kalmes

Technische Universität Chemnitz,
Fakultät für Mathematik,
09107 Chemnitz

e-mail: thomas.kalmes@mathematik.tu-chemnitz.de

Abstract:

Ein klassisches Resultat von Malgrange [3, Chapitre 1, Théorème 4] besagt, dass ein linearer partieller Differentialoperator mit konstanten Koeffizienten $P(D)$ für $X \subseteq \mathbb{R}^d$ offen genau dann surjektiv auf $C^\infty(X)$ ist, wenn X P -konvex für Träger ist. Hörmander [1] hat gezeigt, dass $P(D)$ genau dann surjektiv auf $\mathcal{D}'(X)$ ist, wenn X stark P -konvex für Träger ist. Die Existenz partieller Differentialoperatoren mit konstanten Koeffizienten, die surjektiv auf $C^\infty(X)$ aber nicht surjektiv auf $\mathcal{D}'(X)$ sind, ist hinlänglich bekannt. Allerdings gilt für diese Beispiele allesamt $d \geq 3$.

Trèves [4] vermutete, dass für offenes $X \subseteq \mathbb{R}^2$ die Surjektivität von $P(D)$ auf $C^\infty(X)$ bzw. $\mathcal{D}'(X)$ sehr wohl äquivalent sind. Unter Verwendung von Resultaten von Hörmander [2] über die Fortsetzung von Regularität von Lösungen partieller Differentialgleichungen beweisen wir diese Vermutung. Außerdem zeigen wir, dass eine entsprechende Verallgemeinerung auf Ultradistributionen vom Beurlingschen Typ zu nicht-quasianalytischen Gewichtsfunktionen gilt. Für offenes $X \subseteq \mathbb{R}^2$ und einen linearen partiellen Differentialoperator mit konstanten Koeffizienten $P(D)$ sind daher äquivalent:

- i) $P(D)$ ist surjektiv auf $C^\infty(X)$.
- ii) $P(D)$ ist surjektiv auf $\mathcal{D}'(X)$.
- iii) $P(D)$ ist surjektiv auf $\mathcal{D}'_{(\omega)}(X)$ für eine/alle nicht-quasianalytischen Gewichtsfunktionen ω .

References

- [1] L. Hörmander, *On the range of convolution operators*, Ann. of Math. 76 (1962), 148-170
- [2] L. Hörmander, *The Analysis of Linear Partial Differential Operators I and II*, Springer-Verlag, Berlin, 1983.
- [3] B. Malgrange, *Existence et approximation des solutions des équations aux dérivées partielles et des équations de convolution*, Ann. Inst. Fourier Grenoble, 6 (1955-1956), 271-355
- [4] F. Trèves, *Linear Partial Differential Operators with Constant Coefficients*, Mathematics and its Applications. 6. New York etc.: Gordon and Breach Science Publishers. X, 1966