

Skript zur Vorlesung

Analysis partieller Differentialgleichungen

Marcel Hansmann

Stand vom 27. August 2025

Dies ist ein Skript zur gleichnamigen Vorlesung, die ich an der TU Chemnitz in den Sommersemestern 2024 und 2025 für Bachelor- und Masterstudierende gehalten habe. Zur Ausarbeitung der Vorlesung habe ich neben der Lehrbuchliteratur auch auf einige Skripte von Kollegen zurückgegriffen (siehe das Literaturverzeichnis).

Der Text dieses Manuskripts ist nur oberflächlich Korrektur gelesen und nur zum internen Gebrauch gedacht. Für Kommentare und Korrekturen bin ich dankbar.

Inhaltsverzeichnis

0. Prolog	1
I. Klassische Theorie	6
1. Harmonische Funktionen	7
2. Die Poisson-Gleichung	21
2.1. Lösungsdarstellungen	24
2.2. Das Dirichlet-Problem für die Laplace-Gleichung auf der Kugel	30
2.3. Das Newton-Potential	33
2.4. Der Satz von Perron	35
3. Die Wärmeleitungsgleichung	41
3.1. Maximumprinzip und Eindeutigkeit	42
3.2. Einschub: Die Fourier-Transformation	45
3.3. Die Fundamentallösung der Wärmeleitungsgleichung	54
3.4. Die Methode der Trennung der Variablen	58
4. Die Wellengleichung	64
4.1. Eindeutigkeit von Lösungen	65
4.2. Existenz von Lösungen	68
5. Klassifikation von partiellen Differentialgleichungen	73
II. Distributionen, Sobolev-Räume und funktionalanalytische Methoden	75
6. Distributionen	76
6.1. Zur Motivation: schwache Lösungen der Wellengleichung	76
6.2. Distributionen und verallgemeinerte Funktionen	78
6.3. Fundamentallösungen und Regularität	88
7. Sobolev-Räume und elliptische Randwertprobleme	96
7.1. Sobolev-Räume	96
7.2. Elliptische Randwertprobleme	99
8. Eigenwertprobleme für den Laplace-Operator	107
A. Anhang	116
A.1. Fakten aus der Vektoranalysis	117
A.2. Fakten aus der Maßtheorie	119
A.3. Herleitung der eindimensionalen Wellengleichung	121

A.4. Der Rieszsche Darstellungssatz	123
Endnoten	126
Symbolverzeichnis	138
Literaturverzeichnis	141

0. Prolog

Stichpunkte. Modellierung, Diffusions- und Wärmeleitungsgleichung, gewöhnliche Differentialgleichungen, lineare partielle Differentialgleichungen, homogen vs. inhomogen, Beispiel von Lewy, Inhalte der Vorlesung

Eine partielle Differentialgleichung drückt Zusammenhänge zwischen einer unbekanntem Funktion, mit mehreren Veränderlichen, und ihren partiellen Ableitungen aus. Ein Beispiel ist die sogenannte **Diffusions- oder Wärmeleitungsgleichung** für eine offene Menge $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$:

$$\partial_t u(x, t) - \Delta u(x, t) = f(x, t), \quad (x, t) \in \Omega \times \mathbb{R}.$$

Die Aufgabe besteht darin, bei gegebener rechter Seite $f : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion $u : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ zu finden, die die Gleichung erfüllt. Hierbei nennt man $x = (x_1, \dots, x_d) \in \Omega$ oft die **Orts-** und $t \in \mathbb{R}$ die **Zeitvariable**. Ferner ist

$$\partial_t := \frac{\partial}{\partial t} \quad \text{und} \quad \Delta := \Delta_x := \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_d^2} := \partial_1^2 + \dots + \partial_d^2.$$

Man nennt Δ den (auf der Ortsvariablen wirkenden) **Laplace-Operator**.¹

— Modellierung von partiellen Differentialgleichungen —

Wir wollen uns im Folgenden anhand der Diffusionsgleichung einmal exemplarisch ansehen, wie partielle Differentialgleichungen bei der Modellierung (z.B.) physikalischer Phänomene zustande kommen. Auf saubere mathematische Begründungen werden wir hierbei vorerst verzichten. Betrachten wir dazu den Transport eines Stoffes durch ein Gebiet $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$, etwa die Ausbreitung von Tinte in einem Wasserglas. Mit $u(x, t)$ bezeichnen wir die Dichte des Stoffes zum Zeitpunkt t am Ort $x \in \Omega$. Ist $B \subseteq \Omega$ eine Kugel, so ist die Masse des Stoffes in B zum Zeitpunkt t gegeben durch

$$M(t) := \int_B u(x, t) \, dx.^2$$

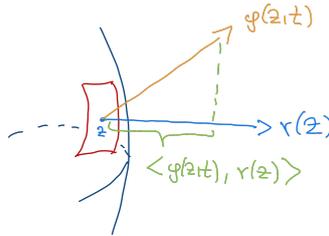
Für die Massendifferenz $M(t+h) - M(t)$, also die Änderung der Masse vom Zeitpunkt t zum Zeitpunkt $t+h$, erhalten wir dann mit dem Massenerhaltungssatz folgende Bilanzgleichung:

$$M(t+h) - M(t) = \text{Zustrom über } \partial B - \text{Abfluss über } \partial B + \text{Quellen in } B - \text{Senken in } B.$$

Den Zu- und Abfluss des Stoffes durch den Rand ∂B drücken wir durch eine (je nach Modell verschieden zu wählende) **Flussfunktion** $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_d) : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^d$ aus. Dies bedeutet, dass der Fluss des Stoffes durch ein kleines Flächenstück $F \subseteq \partial B$, mit $z \in F$, im Zeitintervall $[t, t+h]$ näherungsweise gegeben ist durch

$$h \cdot (\text{Fluss in } z \text{ senkrecht zu } F) \cdot (\text{Flächeninhalt von } F) = h \cdot \langle \varphi(z, t), \nu(z) \rangle \cdot \sigma(F).$$

Hierbei bezeichnet $\nu(z)$ die äußere Normale an B im Punkte z und σ ist das Oberflächenmaß auf ∂B , vergleiche Anhang A.1. Ferner ist $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das euklidische Skalarprodukt im \mathbb{R}^d .



Die im Zeitintervall $[t, t+h]$ durch die Oberfläche von B auf- bzw. abgegebene Stoffmenge ist damit gegeben durch

$$- \int_t^{t+h} \left(\int_{\partial B} \langle \varphi(z, s), \nu(z) \rangle d\sigma(z) \right) ds.$$

Das Minuszeichen ist hier unserer Wahl von ν als der **äußeren** Normalen geschuldet (wenn die Integrale positiv sind, nimmt die Stoffmenge in B ab).

Nun drücken wir noch analog mögliche Quellen oder Senken durch eine Funktion $f : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ aus, die angibt, wie viel des Stoffes pro Zeit- und Volumeneinheit in Ω erzeugt bzw. vernichtet wird. Aus der Bilanzgleichung folgt dann insgesamt:

$$M(t+h) - M(t) = - \int_t^{t+h} \left(\int_{\partial B} \langle \varphi(z, s), \nu(z) \rangle d\sigma(z) \right) ds + \int_t^{t+h} \left(\int_B f(x, s) dx \right) ds.$$

Teilen wir diese Gleichung durch h und lassen wir h gegen 0 gehen, so folgt unter Verwendung der Formel für $M(t)$ und mittels Vertauschung von Ableitung und Integral

$$\frac{d}{dt} M(t) = \int_B \partial_t u(x, t) dx = - \int_{\partial B} \langle \varphi(z, t), \nu(z) \rangle d\sigma(z) + \int_B f(x, t) dx.$$

Nun besagt der **Divergenzsatz**, siehe Anhang A.1, dass

$$\int_{\partial B} \langle \varphi(z, t), \nu(z) \rangle d\sigma(z) = \int_B \operatorname{div} \varphi(x, t) dx,$$

wobei $\operatorname{div} \varphi := \operatorname{div}_x \varphi := \sum_{i=1}^d \partial_i \varphi_i$ (d.h. wir betrachten die Divergenz in Bezug auf die Ortsvariable x). Aus der vorherigen Gleichung erhalten wir also

$$\int_B \partial_t u(x, t) dx = - \int_B \operatorname{div} \varphi(x, t) dx + \int_B f(x, t) dx$$

beziehungsweise

$$\int_B (\partial_t u(x, t) + \operatorname{div} \varphi(x, t)) dx = \int_B f(x, t) dx.$$

Da dies für jede Kugel $B \subseteq \Omega$ gelten muss, folgt schließlich

$$\partial_t u(x, t) + \operatorname{div} \varphi(x, t) = f(x, t).$$

In vielen Fällen ist es sinnvoll, anzunehmen, dass der Fluss proportional zum Gradienten

$$\nabla u = \nabla_x u = (\partial_1 u, \dots, \partial_d u)^T$$

ist, aber in die entgegengesetzte Richtung zeigt (Fluss von dichten Mengen zu weniger dichten Mengen). Setzen wir also zum Beispiel $\varphi(x, t) = -\nabla u(x, t)$, so folgt

$$\partial_t u(x, t) - \operatorname{div}(\nabla u(x, t)) = f(x, t).$$

Wegen $\Delta := \partial_1^2 + \dots + \partial_d^2 = \operatorname{div} \nabla$ erhalten wir schließlich die Diffusions- bzw. Wärmeleitungsgleichung

$$\partial_t u(x, t) - \Delta u(x, t) = f(x, t).$$

Der Name Wärmeleitungsgleichung ist der Tatsache geschuldet, dass die Gleichung auch beschreibt, wie sich die Temperatur in einem Körper mit der Zeit entwickelt.

— Partielle vs. gewöhnliche Differentialgleichungen —

Bevor wir weiter über partielle Differentialgleichungen sprechen, wollen wir kurz an ein paar Resultate über gewöhnliche Differentialgleichungen erinnern. Hier geht es bekanntlich darum, eine unbekannte Funktion von **nur einer Veränderlichen** zu finden, die in einer gewissen Relation zu endlich vielen ihrer Ableitungen steht.

Als erstes halten wir fest, dass jede skalare gewöhnliche Differentialgleichung der Ordnung n auf ein System von n Gleichungen erster Ordnung reduziert werden kann. Betrachten wir nun so ein System mit einer vorgegebenen Anfangsbedingung:

$$v'(t) = F(t, v(t)) \quad \text{und} \quad v(t_0) = x_0 \quad (\star)$$

mit $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ und $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. Dann besagt der

- **Satz von Peano**³, dass (\star) im Falle eines stetigen F stets eine lokale (d.h. in einer Umgebung von t_0 definierte) Lösung $v \in C^1(I; \mathbb{R}^n)$ besitzt, und
- der **Satz von Picard-Lindelöf**⁴, dass (\star) sogar eine eindeutige maximale Lösung $v_{\max} \in C^1(I_{\max}; \mathbb{R}^n)$ besitzt, falls die stetige Funktion F im 2. Argument eine lokale Lipschitz-Bedingung erfüllt.

Handelt es sich darüber hinaus um eine **lineare** gewöhnliche Differentialgleichung mit zugehörigem Anfangswertproblem

$$v'(t) = A(t)v(t) + b(t) \quad \text{und} \quad v(t_0) = x_0 \quad (\star\star)$$

mit stetigen $A : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ und $b : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, so folgt

- aus dem Satz von Picard-Lindelöf sofort, dass $(\star\star)$ eine eindeutige (wie man zeigen kann auf ganz \mathbb{R} definierte) maximale Lösung besitzt, und
- die Lösungsmenge $\mathcal{L} := \mathcal{L}(A, b)$ von $(\star\star)$ bildet einen n -dimensionalen affinen Unterraum von $C^1(\mathbb{R}; \mathbb{R}^n)$. Genauer ist $\mathcal{L}_0 := \mathcal{L}(A, 0) \subseteq C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ ein n -dimensionaler Unterraum und für ein beliebiges $v_p \in \mathcal{L}$ gilt $\mathcal{L} = v_p + \mathcal{L}_0$.

Fazit des Rückblicks: Gewöhnliche Differentialgleichungen besitzen eine gut ausgearbeitete allgemeine Theorie.

Gibt es eine ähnliche allgemeine Theorie für partielle Differentialgleichungen? Werfen wir dazu nur einmal einen Blick auf den linearen Fall.

Definition 0.1. (i) Wir setzen

$$\partial^\alpha := \partial_1^{\alpha_1} \dots \partial_d^{\alpha_d} := \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \dots \frac{\partial^{\alpha_d}}{\partial x_d^{\alpha_d}}$$

für einen Multiindex $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{N}_0^d$. Hierbei ist $\partial_i^0 u := u$ und die **Ordnung** von α ist definiert als $|\alpha| := \alpha_1 + \dots + \alpha_d$.

(ii) Es sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ offen. Ferner sei $m \in \mathbb{N}$ und für jedes $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$ mit $|\alpha| \leq m$ sei eine stetige Funktion $a_\alpha \in C(\Omega)$ gegeben. Weiterhin existiere mindestens ein $\alpha_0 \in \mathbb{N}_0^d$ mit $|\alpha_0| = m$, und ein $x_0 \in \Omega$ mit $a_{\alpha_0}(x_0) \neq 0$. Dann nennen wir die lineare Abbildung

$$L : C^m(\Omega) \rightarrow C(\Omega), \quad (Lu)(x) := \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) \partial^\alpha u(x)$$

einen **linearen partiellen Differentialoperator der Ordnung m** auf Ω . Ist ferner $f \in C(\Omega)$ gegeben, so nennt man die Gleichungen

$$Lu = 0 \quad \text{bzw.} \quad Lu = f \quad (***)$$

die zugehörige **homogene** bzw. **inhomogene lineare partielle Differentialgleichung**. Eine **klassische Lösung** dieser Gleichungen ist eine Funktion $u \in C^m(\Omega)$, die die jeweilige Gleichung auf ganz Ω erfüllt, d.h. im homogenen Fall etwa

$$\forall x \in \Omega : \quad (Lu)(x) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) \partial^\alpha u(x) \stackrel{!}{=} 0.$$

Bemerkung 0.2. (i) Wir werden später noch weitere Lösungsbegriffe kennenlernen (schwache bzw. distributionelle Lösungen).

(ii) Der Lösungsraum $\mathcal{L}_0 := \text{Ker}(L)$ der homogenen Gleichung ist ein linearer Unterraum von $C^m(\Omega)$ und ist $u_p \in C^m(\Omega)$ eine Lösung der inhomogenen Gleichung, so gilt $\mathcal{L} = u_p + \mathcal{L}_0$ für die Lösungsmenge der inhomogenen Gleichung. D.h. um alle Lösungen der inhomogenen Gleichung zu erhalten, genügt es, eine Lösung der inhomogenen und alle Lösungen der homogenen Gleichung zu finden.

Beispiel 0.3. Schreiben wir die Elemente von $\mathbb{R}^{d+1} = \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$ als (x_1, \dots, x_d, t) so erhalten wir den **Wärmeleitungsoperator** $L = \partial_t - \Delta_x$ mit der Wahl folgender konstanter Funktionen a_α :

$$a_\alpha = \begin{cases} 1, & \text{falls } \alpha = (0, \dots, 0, 1) \\ -1, & \text{falls } \alpha \in \{(2, 0, \dots, 0), \dots, (0, \dots, 2, 0)\} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Wie sieht es nun mit einer allgemeinen Lösungstheorie für die Gleichungen (***) aus? Leider schlecht!

- Lewy (bzw. Trèves)⁵ haben gezeigt, dass es einen linearen partiellen Differentialoperator L mit **glatten Koeffizienten-Funktionen** $a_\alpha \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ gibt, so dass die Gleichung $Lu = f$ für gewisse **glatte** rechte Seiten $f \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ keine klassischen (lokalen oder globalen) Lösungen besitzt.⁶

Wir können also keine analogen Existenzresultate wie die Sätze von Peano und Picard-Lindelöf für partielle Differentialgleichungen erwarten. Und auch bei der Eindeutigkeit von Lösungen sieht die Welt bei partiellen Differentialgleichungen deutlich anders aus.

Beispiel 0.4. Betrachten wir dazu auf \mathbb{R}^2 die lineare homogene partielle Differentialgleichung erster Ordnung

$$\frac{\partial}{\partial x_1} u(x_1, x_2) = 0.$$

Dann ist $u \in C^1(\mathbb{R}^2)$ genau dann eine klassische Lösung, wenn u die Gestalt

$$u(x_1, x_2) = g(x_2)$$

für eine beliebige stetig differenzierbare Funktion $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ hat. Insbesondere ist der Lösungsraum \mathcal{L} also ein **unendlich-dimensionaler** Unterraum von $C^1(\mathbb{R}^2)$. Um eine eindeutige Lösung zu erhalten, müssen wir die Werte der Lösung (beispielsweise) auf ganz $\{0\} \times \mathbb{R}$ vorgeben.

Man vergleiche dies mit der Lösung v der homogenen linearen gewöhnlichen Differentialgleichung erster Ordnung, $v'(t) = A(t)v(t)$, die schon durch die Vorgabe $v(t_0) \stackrel{!}{=} x_0$ eindeutig spezifiziert wird.

— Das Studium von partiellen Differentialgleichungen —

Da eine allgemeine Theorie nicht existiert, hat es sich als sinnvoll herausgestellt, partielle Differentialgleichungen in gewisse Klassen einzuteilen und zu versuchen, nur für diese Klassen eine Theorie zu entwickeln. Zunächst unterscheidet man zwischen linearen (wie oben definiert) und nicht-linearen Gleichungen, wie z.B. der Eikonal-Gleichung

$$(\partial_1 u(x))^2 + \dots + (\partial_d u(x))^2 = 1, \quad x = (x_1, \dots, x_d) \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^d$$

aus der geometrischen Optik. In dieser Vorlesung werden wir uns nur mit linearen partiellen Differentialgleichungen beschäftigen.

Die linearen Gleichungen werden nun noch weiter unterteilt: Die wohl wichtigsten Klassen bilden dabei die sogenannten

- **elliptischen, parabolischen und hyperbolischen** linearen partiellen Differentialgleichungen.

Auch in dieser Vorlesung werden wir uns auf diese Klassen konzentrieren (und später insbesondere auch angeben, wie sie genau definiert sind). Mehr noch, in dieser Vorlesung werden wir uns für jede dieser Klassen nur den wichtigsten Vertreter vornehmen, nämlich

- die elliptische **Laplace-Gleichung** $\Delta u = 0$ bzw. die **Poisson-Gleichung**⁷ $\Delta u = f$,
- die parabolische **Wärmeleitungsgleichung** $\partial_t u - \Delta u = f$, und
- die hyperbolische **Wellengleichung** $\partial_t^2 u - \Delta u = f$.

In der ersten Hälfte der Vorlesung werden wir uns intensiv mit diesen Gleichungen beschäftigen und ihre klassischen Lösungen studieren. Hierzu benötigen wir als Vorwissen nur einige Resultate aus der Vektoranalysis, an die wir im Laufe der Vorlesung erinnern werden.

In der zweiten Hälfte der Vorlesung gehen wir dann über den klassischen Lösungsbegriff hinaus und studieren auch sogenannte schwache und distributionelle Lösungen. Dies sind Lösungen, die nicht mehr im klassischen sondern nur noch in einem verallgemeinerten Sinne differenzierbar sind. Die Betrachtung von solchen Lösungen hat sich als sehr fruchtbar herausgestellt und öffnet insbesondere die Möglichkeit, abstrakte Werkzeuge aus der Hilbert-Raum-Theorie und der Funktionalanalysis zum Studium von partielle Differentialgleichungen einzusetzen.

Teil I.

Klassische Theorie

1. Harmonische Funktionen

Stichpunkte. Laplace-Gleichung, harmonische Funktionen, Mittelwerteigenschaft (MWE), Faltungen, Glättungskerne, MWE \Rightarrow glatt, subharmonische Funktionen, Maximumprinzipien, Harnacksche Ungleichung, Satz von Liouville, Harnacksches Prinzip

Betrachten wir die homogene Wärmeleitungsgleichung mit einer Funktion $v(x, t) = u(x)$, die nicht von der Zeit t abhängt, so gilt

$$\partial_t v(x, t) - \Delta v(x, t) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \Delta u(x) = 0.$$

Die sogenannte **Laplace-Gleichung** $\Delta u = 0$ beschreibt also (u.a.) die zeitlich stationären Lösungen der homogenen Wärmeleitungsgleichung.

Definition 1.1. Es sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ offen (und nicht-leer). Die klassischen Lösungen $u \in C^2(\Omega)$ der Laplace-Gleichung auf Ω werden **harmonische Funktionen** auf Ω genannt. Für diese gilt also

$$\forall x \in \Omega : \quad \Delta u(x) := \sum_{k=1}^d \partial_k^2 u(x) = 0.$$

Die Menge aller harmonischen Funktionen auf Ω bezeichnen wir auch mit $h(\Omega)$.

Bemerkung 1.2. (i) Da der Laplace-Operator $\Delta : C^2(\Omega) \rightarrow C(\Omega)$ linear ist, ist $h(\Omega) = \text{Ker}(\Delta)$ ein linearer Unterraum von $C^2(\Omega)$.

(ii) Im Falle $d = 1$ handelt es sich bei der Laplace-Gleichung um die gewöhnliche Differentialgleichung $u'' = 0$, die wir einfach durch Integration lösen können. Im Folgenden liegt der Fokus daher auf dem Fall $d \geq 2$.

Die Laplace-Gleichung ist die erste partielle Differentialgleichung, die wir in dieser Vorlesung detaillierter untersuchen wollen. Dabei sind etwa folgende Fragen von Interesse:

- Gibt es Lösungen?
- Unter welchen zusätzlichen Bedingungen sind Lösungen eindeutig?
- Können wir die Lösungen explizit beschreiben? Gibt es Lösungsformeln?
- Können wir (auch ohne Lösungsformel) Eigenschaften der Lösungen angeben?

Die erste Frage können wir für die Laplace-Gleichung sofort beantworten.

Beispiel 1.3. (i) Jede affin-lineare Funktion ist harmonisch. Dabei heißt $u : \Omega \subseteq \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ affin-linear, falls $a \in \mathbb{R}^d$ und $b \in \mathbb{R}$ existieren, so dass

$$u(x) = \langle a, x \rangle + b = a_1 x_1 + \dots + a_d x_d + b, \quad x \in \mathbb{R}^d.$$

(ii) In der Übung zeigen Sie, dass die auf $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ radialsymmetrischen harmonischen Funktio-

nen (deren Wert an der Stelle x also nur von $|x|$ abhängt) genau die Funktionen

$$u : \mathbb{R}^d \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad u(x) = \begin{cases} a + b \ln(|x|) & , \text{ falls } d = 2 \\ a + \frac{b}{|x|^{d-2}} & , \text{ falls } d \geq 3 \end{cases}$$

sind, wobei $a, b \in \mathbb{R}$ frei gewählt werden können.

Der nächste Satz zeigt, dass man die harmonischen Funktionen im **zweidimensionalen Fall** präzise charakterisieren kann.

Satz 1.4. Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$ offen. Dann ist $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ genau dann harmonisch, wenn u lokal der Realteil einer holomorphen Funktion ist. Letzteres bedeutet, dass für alle $p \in \Omega$ eine offene Kugel $B(p, r) \subseteq \Omega$ und eine holomorphe Funktion $f : B(p, r) \rightarrow \mathbb{C}$ existiert, so dass $u|_{B(p, r)} = \operatorname{Re}(f)$.

Beweis. In der Übung. □

Übung

Da holomorphe Funktionen glatt (d.h. beliebig oft komplex differenzierbar) und sogar analytisch sind, erhalten wir hieraus noch eine Folgerung.

Korollar 1.5. Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ offen. Dann ist jede harmonische Funktion $u \in h(\Omega)$ glatt (und sogar reell-analytisch).

Aufgrund von Satz 1.4 haben harmonische Funktionen im zweidimensionalen Fall also viele Eigenschaften mit holomorphen Funktionen gemeinsam. Im restlichen Teil dieses Abschnitts wollen wir nun zeigen, dass dies tatsächlich in jeder Dimension der Fall ist. Dazu müssen wir zunächst an ein paar Dinge erinnern.

Erinnerung 1.6. (i) Für $x \in \mathbb{R}^d$ und $r > 0$ sind

$$B(x, r) := \{y \in \mathbb{R}^d : |x - y| < r\} \quad \text{und} \quad B[x, r] := \{y \in \mathbb{R}^d : |x - y| \leq r\}$$

die offene bzw. abgeschlossene Kugel um x mit Radius r . Hier ist $|x| := \left(\sum_{k=1}^d x_k^2\right)^{1/2}$ die euklidische Norm von x .

(ii) **Transformationsformel für Sphären und Kugeln:** Ist $f : B[x, r] \subseteq \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, so gilt

$$\int_{B(x, r)} f(y) \, dy = r^d \int_{B(0, 1)} f(x + rz) \, dz \quad \text{und} \quad \int_{\partial B(x, r)} f(z) \, d\sigma(z) = r^{d-1} \int_{\partial B(0, 1)} f(x + r\xi) \, d\sigma(\xi).$$

Hierbei schreiben wir (wie im Prolog erwähnt) einfach dy statt $d\lambda^d(y)$, usw. Ferner ist σ das Oberflächenmaß auf den entsprechenden Sphären, siehe Anhang A.1.

(iii) **Schichtintegration:** Ist $f : B[x, r] \subseteq \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, so gilt

$$\int_{B(x, r)} f(y) \, dy = \int_0^r \left(\int_{\partial B(x, s)} f(z) \, d\sigma(z) \right) ds.$$

(iv) Für das d -dimensionale Volumen bzw. die $(d-1)$ -dimensionale Oberfläche der Einheitskugel in \mathbb{R}^d setzen wir

$$\omega_d := \lambda^d(B(0, 1)) \quad \text{und} \quad \sigma_{d-1} := \sigma(\partial B(0, 1)).$$

Dann folgt aus (ii) mit der Wahl $f = 1$, dass

$$\lambda^d(B(x, r)) = r^d \omega_d, \quad \sigma(\partial B(x, r)) = r^{d-1} \sigma_{d-1}$$

und aus (iii) folgt damit $\omega_d = \frac{\sigma_{d-1}}{d}$. Weiterhin erinnern wir daran, dass $\omega_d = \frac{\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2+1)}$.

Für die weitere Untersuchung der Laplace-Gleichung müssen wir nun sphärische und Kugelmittel von Funktionen betrachten.

Definition 1.7. Es sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ offen, $u \in C(\Omega)$, $x \in \Omega$ und $r_0 > 0$ so gewählt, dass $B[x, r_0] \subseteq \Omega$. Ferner sei $0 \leq r \leq r_0$.

(i) Wir definieren $S_u(x, 0) := u(x)$ und

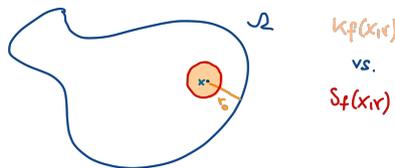
$$S_u(x, r) := \int_{\partial B(x, r)} u(\xi) d\sigma(\xi) := \frac{1}{r^{d-1} \sigma_{d-1}} \int_{\partial B(x, r)} u(\xi) d\sigma(\xi), \quad r > 0,$$

genannt das **sphärische Mittel** von u auf $\partial B[x, r]$.

(ii) Wir definieren $K_u(x, 0) := u(x)$ und

$$K_u(x, r) := \int_{B(x, r)} u(y) dy := \frac{1}{r^d \omega_d} \int_{B(x, r)} u(y) dy, \quad r > 0,$$

genannt das **Kugelmittel** von u auf $B(x, r)$.



Bemerkung 1.8. Die Transformationsformeln für Sphären und Kugeln nehmen mit der f -Notation folgende Form an:

$$\int_{B(x, r)} u(y) dy = \int_{B(0,1)} u(x + rz) dz \quad \text{und} \quad \int_{\partial B(x, r)} u(z) d\sigma(z) = \int_{\partial B(0,1)} u(x + r\xi) d\sigma(\xi).$$

Das nächste Resultat zeigt, warum sphärische Mittel bei der Untersuchung des Laplace-Operators helfen können.

Lemma 1.9. Es sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ offen und $u \in C^m(\Omega)$ für ein $m \in \mathbb{N}_0$. Ferner sei $x \in \Omega$ und $r_0 > 0$ so gewählt, dass $B[x, r_0] \subseteq \Omega$.

(i) Die Abbildungen $[0, r_0] \ni r \mapsto S_u(x, r) \in \mathbb{R}$ und $[0, r_0] \ni r \mapsto K_u(x, r) \in \mathbb{R}$ sind stetig. Im Falle $m \geq 1$ sind sie auch m -mal stetig differenzierbar.

(ii) Ist $u \in C^2(\Omega)$, so gilt

$$\partial_r S_u(x, r) = \frac{r}{d} K_{\Delta u}(x, r), \quad 0 \leq r \leq r_0$$

und

$$\Delta u(x) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{2d}{r^2} (S_u(x, r) - u(x)).$$

Bemerkung 1.10. Die letzte Gleichung zeigt, dass $\Delta u(x)$ (bis auf einen Skalierungsfaktor) ungefähr angibt, wie weit u auf kleinen Sphären um x im Mittel von $u(x)$ abweicht. Dies liefert eine weitere anschauliche Interpretation der Wärmeleitungsgleichung $\partial_t v(x, t) = \Delta_x v(x, t)$. Ist die mittlere Temperatur $v(\cdot, t)$ auf kleinen Sphären um x größer als die Temperatur $v(x, t)$ in x , so gilt nach vorheriger Formel, dass $\partial_t v(x, t) = \Delta_x v(x, t) \geq 0$, d.h. die Temperatur in x wird im nächsten Moment ansteigen. Das macht Sinn!

Beweis (von Lemma 1.9). (i) Wegen Bemerkung 1.8 gilt

$$S_u(x, r) = \int_{\partial B(0,1)} u(x + r\zeta) d\sigma(\zeta), \quad 0 \leq r \leq r_0.$$

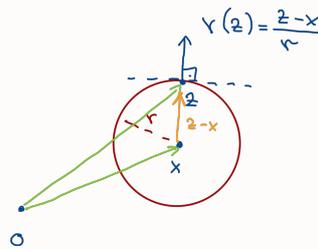
Damit folgt die behauptete Stetigkeit bzw. Differenzierbarkeit von $r \mapsto S_u(x, r)$ aus dem Satz über die Stetigkeit bzw. Differenzierbarkeit von Parameterintegralen (vergleiche Korollar A.2.2), denn die Funktion

$$f : \partial B(0,1) \times [0, r_0] \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(\zeta, r) := u(x + r\zeta)$$

ist genauso wie (im Falle $m \geq 1$) die partiellen Ableitungen $\partial_r^k f$, mit $1 \leq k \leq m$, stetig. Analog argumentiert man für das Kugelmittel.

(ii) Mit dem Argument in Teil (i) darf man Ableitung und Integral vertauschen und erhält

$$\begin{aligned} \partial_r S_u(x, r) &= \int_{\partial B(0,1)} \frac{d}{dr} u(x + r\zeta) d\sigma(\zeta) = \int_{\partial B(0,1)} \langle \nabla u(x + r\zeta), \zeta \rangle d\sigma(\zeta) \\ &\stackrel{\text{Bem. 1.8}}{=} \int_{\partial B(x,r)} \langle \nabla u(z), \frac{z-x}{r} \rangle d\sigma(z) = \int_{\partial B(x,r)} \langle \nabla u(z), \nu(z) \rangle d\sigma(z) \end{aligned}$$



Also folgt mit dem Divergenzsatz (Satz A.1.1), dass

$$\begin{aligned} \partial_r S_u(x, r) &= \frac{1}{r^{d-1} \sigma_{d-1}} \int_{B(x,r)} \operatorname{div}(\nabla u(y)) dy = \frac{1}{d \cdot r^{d-1} \cdot \omega_d} \int_{B(x,r)} \Delta u(y) dy \\ &= \frac{r}{d} \int_{B(x,r)} \Delta u(y) dy = \frac{r}{d} K_{\Delta u}(x, r). \end{aligned}$$

Im Folgenden schreiben wir $S(r) := S_u(x, r)$. Dann folgt aus der vorherigen Rechnung, dass $S'(0) = 0$ und genauso

$$S''(0) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{S'(r) - S'(0)}{r} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{S'(r)}{r} = \frac{1}{d} \lim_{r \rightarrow 0} K_{\Delta u}(x, r) \stackrel{(i)}{=} \frac{1}{d} K_{\Delta u}(x, 0) = \frac{1}{d} \Delta u(x).$$

Aber nach dem Satz von Taylor gilt

$$0 = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{r^2} \left(S(r) - S(0) - S'(0)r - \frac{S''(0)}{2} r^2 \right) = \lim_{r \rightarrow 0} \left(\frac{S(r) - u(x)}{r^2} - \frac{1}{2d} \Delta u(x) \right),$$

was den Beweis von Teil (ii) beschließt. □

Teil (ii) des vorherigen Lemmas zeigt, dass u harmonisch ist, falls u mit seinen sphärischen Mittelwerten übereinstimmt (d.h. $S_u(x, r) = u(x)$). Tatsächlich können harmonische Funktionen auf diese Weise sogar charakterisiert werden.

Satz 1.11. Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ offen.

(a) Für $u \in C(\Omega)$ sind äquivalent:

(i) Für alle $x \in \Omega$ und $r > 0$ mit $B[x, r] \subseteq \Omega$ gilt $u(x) = S_u(x, r)$.

(ii) Für alle $x \in \Omega$ und $r > 0$ mit $B[x, r] \subseteq \Omega$ gilt $u(x) = K_u(x, r)$.

Liegt eine (und dann beide) dieser Eigenschaften vor, so sagt man u besitze die **Mittelwert-eigenschaft** auf Ω .

(b) Im Falle $u \in C^2(\Omega)$ sind ferner äquivalent:

(i) u hat die Mittelwerteigenschaft auf Ω .

(ii) $u \in h(\Omega)$.

Beweis. (a) Dies ist eine Übungsaufgabe.

(b) (i) \Rightarrow (ii): Aus Lemma 1.9, Teil (ii), folgt

$$\Delta u(x) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{2d}{r^2} \underbrace{(S_u(x, r) - u(x))}_{=0} = 0.$$

(ii) \Rightarrow (i): Sei $x \in \Omega$ und $B[x, r_0] \subseteq \Omega$. Ist u harmonisch, also $\Delta u = 0$ auf Ω , so ist auch das Kugelmittel $K_{\Delta u}(x, r) = 0$ für alle $0 \leq r \leq r_0$. Aus Lemma 1.9, Teil (ii), folgt

$$\partial_r S_u(x, r) = \frac{r}{d} K_{\Delta u}(x, r) = 0, \quad 0 \leq r \leq r_0,$$

d.h. $r \mapsto S_u(x, r)$ ist auf $[0, r_0]$ konstant. Also folgt $S_u(x, r) = S_u(x, 0) = u(x)$ für alle $0 \leq r \leq r_0$. \square

Übung

Wir wollen als nächstes zeigen, dass stetige Funktionen mit der Mittelwerteigenschaft, und damit insbesondere auch harmonische Funktionen, automatisch beliebig oft differenzierbar sind. Damit wird die Äquivalenz aus Teil (b) des obigen Satzes dann sogar schon im Falle $u \in C(\Omega)$ gelten. Als Vorarbeit hierzu müssen wir uns allerdings zunächst etwas mit **Faltungen** befassen. Diese werden es erlauben, nicht-differenzierbare Funktionen zu **glätten**.

—Ende VL 2—

Erinnerung 1.12. Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ offen.

(i) Der **Träger** einer Funktion $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ist gegeben durch

$$\text{supp}(\varphi) := \overline{\{x \in \Omega : \varphi(x) \neq 0\}}^\Omega \subseteq \Omega.$$

Man beachte, dass der topologische Abschluss hier in Bezug auf Ω gebildet wird (d.h. zum Beispiel, dass für $\varphi : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$, $\varphi(x) = 1 - |x|$ gilt, dass $\text{supp}(\varphi) = (-1, 1)$ und **nicht** $[-1, 1]$).

(ii) Es sei $L^\infty(\Omega) := \{\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ messbar} \mid \|\varphi\|_\infty := \sup_{x \in \Omega} |\varphi(x)| < \infty\}^1$ und

$$l_c^\infty(\Omega) := \{\varphi \in L^\infty(\Omega) : \text{supp}(\varphi) \subseteq \Omega \text{ kompakt}\}.$$

Diese **beschränkten Funktionen mit kompaktem Träger** in Ω verschwinden also außerhalb einer kompakten Teilmenge von Ω . Insbesondere gilt für $\varphi \in l_c^\infty(\Omega)$, dass $\varphi = 0$ in einer Umgebung von $\partial\Omega$.² Schließlich setzen wir noch

$$C_c(\Omega) := C_c^0(\Omega) := l_c^\infty(\Omega) \cap C(\Omega) \quad \text{und} \quad C_c^k(\Omega) := C_c(\Omega) \cap C^k(\Omega), \quad k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}.$$

(iii) Eine messbare Funktion $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ heißt **lokal integrierbar**, falls $\int_K |f(x)| dx < \infty$ für alle kompakten Teilmengen $K \subseteq \Omega$. Die Menge aller dieser Funktionen bezeichnen wir mit $\mathcal{L}_1^{\text{loc}}(\Omega)$.

Vereinbarung 1.13. Jede Funktion $f \in l_c^\infty(\Omega)$ kann man mittels $f(x) := 0$ für $x \in \mathbb{R}^d \setminus \Omega$ zu einer Funktion $f \in l_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ fortsetzen. Dies werden wir im Folgenden stets stillschweigend so handhaben. Insbesondere gilt auf diese Weise für $\Omega \subseteq U \subseteq \mathbb{R}^d$ offen, dass

$$l_c^\infty(\Omega) \subseteq l_c^\infty(U) \subseteq l_c^\infty(\mathbb{R}^d)$$

und genauso

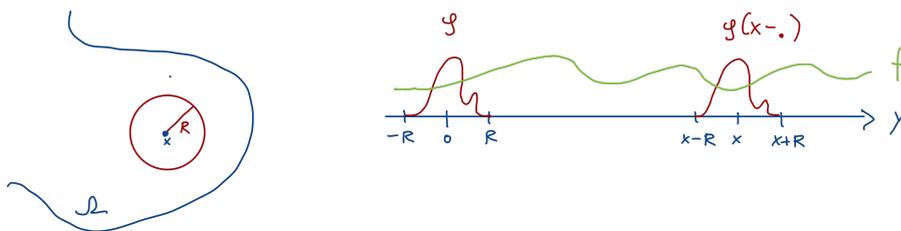
$$C_c^k(\Omega) \subseteq C_c^k(U) \subseteq C_c^k(\mathbb{R}^d).$$

Nun sei $R > 0$, $\varphi \in l_c^\infty(B(0, R))$ und $f \in \mathcal{L}_1^{loc}(\Omega)$. Wir möchten die sogenannte **Faltung** $(\varphi * f)(x)$ für $x \in \Omega$ gerne wie folgt definieren

$$(\varphi * f)(x) := \int_{\Omega} \varphi(x - y) f(y) dy. \quad (*)$$

Was passiert hier?

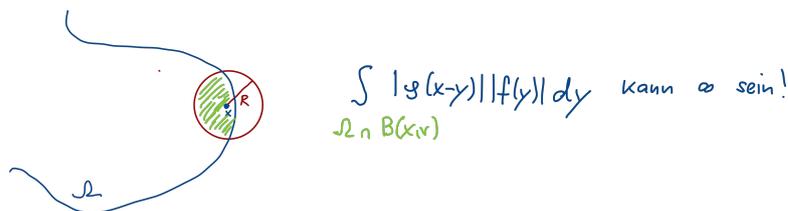
- Die Abbildung $\Omega \ni y \mapsto \varphi(x - y)$ ist nun ein Element von $l_c^\infty(B(x, R))$.
- Das Integral in $(*)$ ist also ein mittels $\varphi(x - \cdot)$ gewichteter Mittelwert von f auf $B(x, r)$.



- Ist $B[x, r] \subseteq \Omega$, so ist das Integral in $(*)$ definiert, denn da f auf Ω lokal integrierbar ist, gilt

$$\int_{\Omega} |\varphi(x - y) f(y)| dy = \int_{B[x, R]} |\varphi(x - y) f(y)| dy \leq \|\varphi\|_{\infty} \int_{B[x, R]} |f(y)| dy < \infty.$$

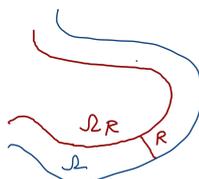
- Ist andererseits $B[x, r] \cap \Omega^c \neq \emptyset$, so muss das Integral nicht endlich sein, da f in Umgebungen von $\partial\Omega$ nicht integrierbar sein muss.



- Wir betrachten daher im Folgenden die Faltung nur auf der offenen Menge

$$\Omega_R := \{x \in \Omega : B[x, R] \subseteq \Omega\} = \{x \in \Omega : \text{dist}(x, \partial\Omega) > R\}.$$

Man beachte, dass $\Omega_R = \emptyset$ gelten kann. Im Falle $\Omega = \mathbb{R}^d$, andererseits, gilt für jedes $R > 0$ auch $\Omega_R = \mathbb{R}^d$, d.h. in diesem Fall kann die Faltung auf ganz \mathbb{R}^d definiert werden.



Damit ist die folgende Definition nun hinreichend erklärt.

Definition 1.14. Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ offen und nicht-leer. Für $\varphi \in l_c^\infty(B(0, R))$ und $f \in \mathcal{L}_1^{loc}(\Omega)$ definieren wir die **Faltung** $\varphi * f : \Omega_R \rightarrow \mathbb{R}$ als

$$(\varphi * f)(x) := \int_{\Omega} \varphi(x - y)f(y) dy, \quad x \in \Omega_R.$$

Für den wichtigen Fall $\Omega = \mathbb{R}^d$ notieren wir noch folgendes Resultat.

Proposition 1.15. Für $f \in \mathcal{L}_1^{loc}(\mathbb{R}^d)$ und $\varphi \in l_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ kann die Faltung auf ganz \mathbb{R}^d definiert werden, d.h. $\varphi * f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$. Ferner ist die Faltung in diesem Fall **kommutativ**, d.h. auch

$$f * \varphi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}, \quad (f * \varphi)(x) := \int_{\mathbb{R}^d} f(x - y)\varphi(y) dy$$

ist definiert und es gilt $f * \varphi = \varphi * f$.

Beweis. Wählt man $R > 0$ mit $\text{supp}(\varphi) \subseteq B(0, R)$, so ist nach obigem die Faltung auf $(\mathbb{R}^d)_R = \mathbb{R}^d$ definiert und eine einfache Substitution zeigt

$$(\varphi * f)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x - y)f(y) dy = \int_{\mathbb{R}^d} f(x - z)\varphi(z) dz = (f * \varphi)(x).$$

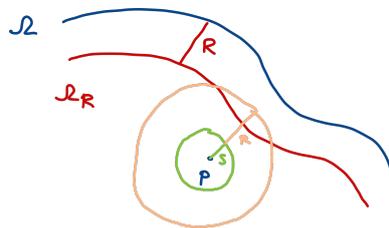
□

Nun wollen wir zeigen, dass das Falten mit einer glatten Funktion eine Glättung der Ausgangsfunktion bewirkt. Durch das Mitteln mit der glatten Funktion wird der Graph von f in gewissem Sinne glatt „geschmiert“.

Satz 1.16. Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ offen, $f \in \mathcal{L}_1^{loc}(\Omega)$ und $\varphi \in C_c^k(B(0, R))$ für ein $k \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt

$$\varphi * f \in C^k(\Omega_R) \quad \text{und} \quad \partial^\alpha(\varphi * f) = (\partial^\alpha \varphi) * f$$

für alle $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$ mit $|\alpha| \leq k$.



Skizze zum Beweis von Satz 1.16

Beweis. Sei $p \in \Omega_R$ und $0 < s < \text{dist}(p, \partial\Omega_R)$. Dann gilt $B[p, R + s] \subseteq \Omega$ und $B[p, s] \subseteq \Omega_R$.

(i) *Stetigkeit in p* : Für $x \in B[p, s]$ gilt $B[x, R] \subseteq B[p, R + s] \subseteq \Omega$ und somit

$$\begin{aligned} |(\varphi * f)(x) - (\varphi * f)(p)| &= \left| \int_{\Omega} \varphi(x - y) f(y) dy - \int_{\Omega} \varphi(p - y) f(y) dy \right| \\ &= \left| \int_{B[x, R]} \varphi(x - y) f(y) dy - \int_{B[p, R]} \varphi(p - y) f(y) dy \right| \\ &= \left| \int_{B[p, R+s]} (\varphi(x - y) - \varphi(p - y)) f(y) dy \right| \\ &\leq \sup\{|\varphi(z) - \varphi(z')| : |z - z'| \leq s\} \cdot \int_{B[p, R+s]} |f(y)| dy. \end{aligned}$$

Da $f \in \mathcal{L}_1^{loc}(\Omega)$ ist das letzte Integral endlich und da φ gleichmäßig stetig ist,³ konvergiert das Supremum für $s \rightarrow 0$ gegen 0, d.h. $\lim_{x \rightarrow p} (\varphi * f)(x) = (\varphi * f)(p)$.

(ii) *Partielle Differenzierbarkeit in p* : Es sei $k \geq 1$. Wir zeigen zunächst, dass $\varphi * f$ in p nach $x_j, 1 \leq j \leq d$, partiell differenzierbar ist. Sei $e_j \in \mathbb{R}^d$ der j -te Einheitsvektor und $|t| < s$. Nutzen wir, dass $\frac{d}{ds} \varphi(p + se_j - y) = \partial_j \varphi(p + se_j - y)$, folgt mit dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung (HDI), dass

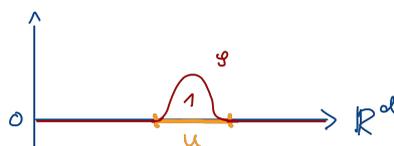
$$\begin{aligned} (\varphi * f)(p + te_j) - (\varphi * f)(p) &= \int_{\Omega} (\varphi(p + te_j - y) - \varphi(p - y)) f(y) dy \\ &= \int_{\Omega} \left(\int_0^t \partial_j \varphi(p + se_j - y) ds \right) f(y) dy \\ &\stackrel{\text{Fubini}}{=} \int_0^t \left(\int_{\Omega} \partial_j \varphi(p + se_j - y) f(y) dy \right) ds \\ &= \int_0^t ((\partial_j \varphi) * f)(p + se_j) ds. \end{aligned}$$

Wir haben in (i) gezeigt, dass der letzte Integrand stetig in s ist (denn $\partial_j \varphi$ erfüllt die gleichen Voraussetzungen wie φ), d.h. eine erneute Anwendung des HDI zeigt, dass $\partial_j(\varphi * f)$ existiert und dass $\partial_j(\varphi * f) = (\partial_j \varphi) * f$. Die allgemeine Aussage folgt nun per Induktion. \square

Eine besondere Rolle werden Faltungen mit sogenannten Glättungskernen spielen.

Definition 1.17. Sei $U \subseteq \mathbb{R}^d$ offen und nicht-leer. Eine Funktion $\varphi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ heißt **Glättungskern auf U** , falls

$$\varphi \in C_c^\infty(U), \quad \varphi \geq 0 \quad \text{und} \quad \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x) dx = \int_U \varphi(x) dx = 1.$$



Bemerkung 1.18. In den Übungen zeigen Sie:

- Für jedes $U \subseteq \mathbb{R}^d$ offen und nicht-leer existieren zugehörige Glättungskerne.
- Glättungskerne auf $B(0, R)$ können radialsymmetrisch gewählt werden.

Übung

Nach all diese Vorarbeiten können wir nun zeigen, dass stetige Funktionen mit der Mittelwerteigenschaft stets glatt sind.

Satz 1.19. Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ offen und $u \in C(\Omega)$ habe die Mittelwerteigenschaft. Dann gilt $u \in C^\infty(\Omega)$.

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$ und φ ein radialsymmetrischer Glättungskern auf $B(0, \varepsilon)$, d.h. $\varphi(x) = \rho(|x|)$ für eine Funktion $\rho \in C_c^\infty(\mathbb{R})$. Dann gilt mittels Schichtintegration

$$\begin{aligned} 1 &= \int_{B(0, \varepsilon)} \varphi(y) dy = \int_0^\varepsilon \left(\int_{\partial B(0, s)} \underbrace{\varphi(\xi)}_{=\rho(|\xi|)=\rho(s)} d\sigma(\xi) \right) ds = \int_0^\varepsilon \rho(s) \sigma(\partial B(0, s)) ds \\ &= \sigma_{d-1} \int_0^\varepsilon s^{d-1} \rho(s) ds. \quad (\star) \end{aligned}$$

Nach Satz 1.16 ist $\varphi * u \in C^\infty(\Omega_\varepsilon)$, wobei $\Omega_\varepsilon = \{x \in \Omega : \text{dist}(x, \Omega^c) > \varepsilon\}$. Wir zeigen nun, dass $u = \varphi * u$ auf Ω_ε gilt, d.h. insbesondere ist u auf Ω_ε glatt. Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgt daraus die Behauptung. Also los: für $x \in \Omega_\varepsilon$ gilt

$$\begin{aligned} (\varphi * u)(x) &= \int_\Omega \varphi(x-y)u(y) dy = \int_{B[x, \varepsilon]} \varphi(x-y)u(y) dy \\ &= \int_0^\varepsilon \left(\int_{\partial B(x, s)} \underbrace{\varphi(x-\xi)}_{=\rho(|x-\xi|)=\rho(s)} u(\xi) d\sigma(\xi) \right) ds = \int_0^\varepsilon \rho(s) \left(\int_{\partial B(x, s)} u(\xi) d\sigma(\xi) \right) ds \\ &= \sigma_{d-1} \int_0^\varepsilon s^{d-1} \rho(s) \left(\int_{\partial B(x, s)} u(\xi) d\sigma(\xi) \right) ds \stackrel{\text{MWE}}{=} u(x) \cdot \left(\sigma_{d-1} \int_0^\varepsilon s^{d-1} \rho(s) ds \right) \stackrel{(\star)}{=} u(x). \end{aligned}$$

□

Aus den Sätzen 1.19 und 1.11 erhalten wir damit die angekündigte **Verschärfung** von Satz 1.11.

Korollar 1.20. Für $u \in C(\Omega)$ sind äquivalent:

- (i) u hat die Mittelwerteigenschaft.
- (ii) u ist harmonisch.

In diesem Fall gilt $u \in C^\infty(\Omega)$.

Bemerkung 1.21. Jede klassische Lösung $u \in C^2(\Omega)$ der Laplace-Gleichung $\Delta u = 0$ auf Ω ist also automatisch beliebig oft differenzierbar (d.h. glatt). Dies ist eine spezielle Eigenschaft des Laplace-Operators, die man **Hypoelliptizität** nennt. Wir werden darauf später noch einmal zurückkommen. Mit etwas mehr Aufwand kann man sogar zeigen, dass u in diesen Fällen nicht nur glatt sondern sogar reell-analytisch ist.

—Ende VL 3—

Wir wollen uns nun noch weiteren Eigenschaften zuwenden, die harmonische Funktionen mit holomorphen Funktionen gemein haben. Dazu sei an den Zusammenhangsbegriff erinnert.

Erinnerung 1.22. (i) Ist M ein metrischer Raum, so heißt M **zusammenhängend**, falls M sich nicht als disjunkte Vereinigung zweier nichtleerer und offener Teilmengen von M darstellen lässt. Dies ist genau dann der Fall, wenn M und \emptyset die einzigen Teilmengen von M sind, die sowohl offen als auch abgeschlossen sind (warum?). Eine Teilmenge $A \subseteq M$ heißt zusammenhängend, falls A mit der induzierten Metrik zusammenhängend ist.

(ii) Ist M **wegzusammenhängend**, d.h. für alle $x, y \in M$ existiert $\varphi : [0, 1] \rightarrow M$ stetig mit $\varphi(0) = x$ und $\varphi(1) = y$, so ist M auch zusammenhängend. Die Umkehrung gilt im Allgemeinen nicht (sie gilt aber zum Beispiel für offene Teilmengen von normierten Räumen).

Das **Maximumprinzip für holomorphe Funktionen** besagte:

Ist $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ zusammenhängend und $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion, so dass $|f|$ in $p \in \Omega$ ein lokales Maximum besitzt, so muss f auf Ω konstant sein.

Wir wollen nun zeigen, dass auch harmonische Funktionen ein solches Maximumprinzip erfüllen. Dies gilt sogar für die größere Klasse der subharmonischen Funktionen.

Definition 1.23. Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ offen. Dann nennen wir $u \in C(\Omega)$ **subharmonisch**, falls eine der folgenden äquivalenten Eigenschaften erfüllt ist:

- (i) Für alle $x \in \Omega$ und $r > 0$ mit $B[x, r] \subseteq \Omega$ gilt $u(x) \leq S_u(x, r)$.
- (ii) Für alle $x \in \Omega$ und $r > 0$ mit $B[x, r] \subseteq \Omega$ gilt $u(x) \leq K_u(x, r)$.

Hierbei sind S_u und K_u wie gehabt das sphärische bzw. Kugelmittel von u . Dass die **Mittelwertungleichungen (MWU)** (i) und (ii) äquivalent sind, sieht man analog wie in Satz 1.11.

Bemerkung 1.24. Folgende Aussagen lassen sich leicht beweisen (Übung):

(i) Ist $u \in C^2(\Omega)$, so gilt

$$u \text{ ist subharmonisch} \quad \Leftrightarrow \quad \Delta u \geq 0.$$

Dies erklärt den Begriff „subharmonisch“. Insbesondere sind harmonische Funktionen auch subharmonisch.

(ii) Ist $c \geq 0$ und sind $u, v \in C(\Omega)$ subharmonisch, so auch $c \cdot u, u + v$ und $\max(u, v)$. Damit ist etwa die Funktion

$$\mathbb{R}^2 \ni (x, y) \rightarrow \max(x, 0) \in \mathbb{R}$$

subharmonisch (aber nicht harmonisch!).

Übung

Im folgenden Satz bezeichnet $C(\overline{\Omega})$ die Menge der Funktionen $u \in C(\Omega)$, die sich stetig auf den Abschluss $\overline{\Omega}$ fortsetzen lassen. Die stetige Fortsetzung auf $\overline{\Omega}$ wird weiterhin mit u bezeichnet.

Satz 1.25. Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ offen und $u \in C(\Omega)$ subharmonisch.

(i) **Schwaches Maximumprinzip:** Ist Ω beschränkt und $u \in C(\overline{\Omega})$, so gilt

$$\max_{x \in \overline{\Omega}} u(x) = \max_{x \in \partial\Omega} u(x).$$

(ii) **Starkes Maximumprinzip:** Ist Ω zusammenhängend und besitzt u bei $x_0 \in \Omega$ ein globales Maximum, so ist u konstant.

Bemerkung 1.26. (a) Das schwache Maximumprinzip besagt, dass das globale Maximum von u (auch) auf dem Rand von Ω angenommen wird, schließt aber nicht aus, dass es auch im Inneren von Ω angenommen wird. Das starke Maximumprinzip schließt dies aus, es sei denn u ist konstant.

(b) Auf den Zusammenhang kann in (ii) nicht verzichtet werden: die harmonische Funktion $u : B(0, 1) \cup B(2, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ mit $u|_{B(0,1)} = 0$ und $u|_{B(2,1)} = 1$ erfüllt das starke Maximumprinzip offensichtlich nicht. Auch auf die Beschränktheit von Ω kann in (i) im Allgemeinen nicht verzichtet werden (Übung).

Übung

(c) Subharmonische Funktionen können **lokale** Maxima besitzen, ohne konstant zu sein. Beispielsweise hat die Funktion $B(0,1) \ni (x,y) \mapsto \max(x,0)$ in jedem Punkt (x,y) mit $x < 0$ ein lokales Maximum. Dieses Beispiel zeigt auch, dass subharmonische Funktionen kein vergleichbares Minimumprinzip erfüllen.

Ist u sogar harmonisch, so können wir die Maximumprinzipien auf die harmonische Funktion $-u$ und die subharmonische Funktion $|u| = \max(u, -u)$ anwenden und erhalten folgendes Korollar.

Korollar 1.27. Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ offen und $u \in h(\Omega)$.

- (i) Ist Ω zusammenhängend und besitzt u bei $x_0 \in \Omega$ ein globales⁴ Minimum oder Maximum, so ist u konstant.
- (ii) Ist Ω beschränkt und $u \in h(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$, so gilt

$$\max_{x \in \bar{\Omega}} u(x) = \max_{x \in \partial\Omega} u(x), \quad \min_{x \in \bar{\Omega}} u(x) = \min_{x \in \partial\Omega} u(x) \quad \text{und} \quad \max_{x \in \bar{\Omega}} |u|(x) = \max_{x \in \partial\Omega} |u|(x).$$

Nun müssen wir starkes und schwaches Maximumprinzip noch beweisen.

Beweis (von Satz 1.25). $u \in C(\Omega)$ sei subharmonisch.

(ii) Sei $x_0 \in \Omega$ eine globale Maximalstelle von u und M die Menge aller globaler Maximalstellen, d.h. $M := \{x \in \Omega : u(x) = u(x_0)\} = u^{-1}(\{u(x_0)\})$. Da u stetig in Ω ist, ist M abgeschlossen in Ω . Wir wollen nun zeigen, dass M auch offen in Ω ist. Da Ω nach Annahme zusammenhängend und M auch nicht-leer ist (da $x_0 \in M$), folgt dann $M = \Omega$, d.h. u ist konstant.

Es sei also $x \in M$. Wir wählen $r > 0$, so dass $B[x,r] \subseteq \Omega$. Dann folgt

$$u(x_0) \stackrel{x \in M}{=} u(x) \stackrel{MWU}{\leq} \int_{B(x,r)} u(y) dy,$$

was wir schreiben können als

$$\int_{B(x,r)} (u(x_0) - u(y)) dy \leq 0. \quad (*)$$

Nun ist hier aber der Integrand $y \mapsto u(x_0) - u(y)$ stetig auf $B(x,r)$ und, nach Wahl von x_0 , dort auch ≥ 0 . Daher kann $(*)$ nur dann erfüllt sein, wenn

$$u(x_0) - u(y) = 0 \quad \text{also} \quad u(y) = u(x_0)$$

für alle $y \in B(x,r)$. Dies zeigt $B(x,r) \subseteq M$, d.h. M ist offen.

(i) Da sowohl $\partial\Omega$ als auch $\bar{\Omega}$ kompakt sind, existieren die auftretenden Maxima und werden angenommen. Sei $x_0 \in \bar{\Omega}$ mit

$$u(x_0) := \max_{x \in \bar{\Omega}} u(x).$$

Ist $x_0 \in \partial\Omega$, so sind wir fertig. Ist $x_0 \in \Omega$, so müssen wir $x_1 \in \partial\Omega$ finden, so dass $u(x_0) = u(x_1)$. Dies geht wie folgt: Wir wählen $x_1 \in \partial\Omega$ so, dass der Punkt den Abstand von x_0 zu $\partial\Omega$ realisiert, d.h.

$$\text{dist}(x_0, \partial\Omega) = |x_1 - x_0|.$$

Dies funktioniert, da die Funktion $\partial\Omega \ni y \mapsto |x_0 - y|$ stetig und $\partial\Omega$ kompakt ist. Setzen wir nun $r := |x_1 - x_0|$, so gilt $B(x_0, r) \subseteq \Omega$ und $u(x_0) = \sup_{x \in B(x_0, r)} u(x)$, d.h. wegen (ii) ist $u|_{B(x_0, r)}$ konstant, hat also den Wert $u(x_0)$. Da u stetig und $x_1 \in \partial B(x_0, r)$ ist, muss damit auch $u(x_1) = u(x_0)$ gelten. \square

Als letztem Thema in diesem Abschnitt wollen wir uns nun noch **nicht-negativen** harmonischen Funktionen $u : \Omega \rightarrow [0, \infty)$ zuwenden und zeigen, dass diese auf einer kompakten Teilmenge $K \subseteq \Omega$ nicht zu stark oszillieren können, **falls** Ω zusammenhängend ist. Dies zeigen die sogenannten Ungleichungen von Harnack.⁵

Satz 1.28 (Harnacksche Ungleichungen). Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ offen.

- (a) **Lokale Ungleichung:** Ist $z \in \Omega$ und $R > 0$, so dass $B[z, 4R] \subseteq \Omega$, so gilt für alle nicht-negativen harmonischen Funktionen $u : \Omega \rightarrow [0, \infty)$, dass

$$\forall x, y \in B[z, R] : \quad 3^{-d}u(y) \leq u(x) \leq 3^d u(y).$$

- (b) **Globale Ungleichung:** Sei Ω **zusammenhängend** und $K \subseteq \Omega$ kompakt. Dann existiert eine Konstante $C(\Omega, K) \geq 1$, die nur von Ω und K abhängt, so dass für alle nicht-negativen harmonischen Funktionen $u : \Omega \rightarrow [0, \infty)$ gilt, dass

$$\forall x, y \in K : \quad \frac{1}{C(\Omega, K)}u(y) \leq u(x) \leq C(\Omega, K)u(y).$$

Beweis. (a) Sei $z \in \Omega$ und $B[z, 4R] \subseteq \Omega$. Da die Rollen von x und y vertauscht werden können, folgt die untere Abschätzung aus der oberen, d.h. es genügt zu zeigen, dass für $u : \Omega \rightarrow [0, \infty)$ harmonisch und $x, y \in B[z, R]$:

$$u(x) \leq 3^d u(y).$$

Dazu beachten wir zunächst, dass aus der Dreiecksungleichung folgt, dass

$$B[x, R] \subseteq B[y, 3R] \subseteq B[z, 4R] \subseteq \Omega.$$

Mit der Mittelwerteigenschaft von u erhalten wir daher

$$\begin{aligned} u(x) &= \int_{B(x,R)} u(a) \, da = \frac{3^d}{\omega_d(3R)^d} \int_{B(x,R)} u(a) \, da \\ &\stackrel{u \geq 0}{\leq} \frac{3^d}{\omega_d(3R)^d} \int_{B(y,3R)} u(a) \, da = 3^d \int_{B(y,3R)} u(a) \, da = 3^d u(y). \end{aligned}$$

(b) Es genügt erneut, nur die obere Abschätzung zu beweisen. Ferner genügt es, nur **positive** harmonische Funktionen auf Ω zu betrachten, denn besitzt $u \in h(\Omega)$, $u \geq 0$, eine Nullstelle in $z_0 \in \Omega$, so ist u aufgrund des starken Minimumprinzips auf Ω sogar identisch 0 (und die Harnack-Ungleichung damit für jedes $C(\Omega, K) \in \mathbb{R}$ erfüllt). Definieren wir also die Funktion $s : \Omega \times \Omega \rightarrow [0, \infty]$ via

$$s(x, y) := \sup \left\{ \frac{u(x)}{u(y)} : u \in h(\Omega), u > 0 \right\},$$

so ist nun „nur“ noch zu zeigen, dass $C(\Omega, K) := \sup_{x, y \in K} s(x, y)$ endlich ist.

1. Schritt: s ist endlich auf $\Omega \times \Omega$.

Dazu fixieren wir $x \in \Omega$ und betrachten

$$E_x := \{y \in \Omega : s(x, y) < \infty\}.$$

Es ist zu zeigen, dass $E_x = \Omega$ gilt. Da Ω zusammenhängend ist, folgt dies, sobald wir gezeigt haben, dass $E_x \neq \emptyset$ und gleichzeitig offen und abgeschlossen in Ω ist.

(i) Da $s(x, x) = 1$, ist $x \in E_x$, d.h. $E_x \neq \emptyset$.

(ii) Nun sei $z \in E_x$ und $R > 0$ so gewählt, dass $B[z, 4R] \subseteq \Omega$. Dann gilt mit (a), dass für alle $u \in h(\Omega), u > 0$, und alle $y \in B(z, R)$

$$\frac{u(x)}{u(y)} = \underbrace{\frac{u(x)}{u(z)}}_{\leq s(x,z)} \cdot \underbrace{\frac{u(z)}{u(y)}}_{\leq 3^d} \leq s(x, z) \cdot 3^d,$$

d.h. $s(x, y) \leq 3^d s(x, z) < \infty$ für alle $y \in B(z, R)$. Dies zeigt $B(z, R) \subseteq E_x$ und somit ist E_x offen.

(iii) Nun sei $z \in \overline{E_x}^\Omega \subseteq \Omega$ und $R > 0$ so gewählt, dass $B[z, 4R] \subseteq \Omega$. Da jede offene Umgebung von z ein Element von E_x enthält, existiert $y \in E_x$ mit

$$y \in B[z, R] \subseteq B[z, 4R] \subseteq \Omega.$$

Genau wie in (ii) sehen wir dann, dass für alle $u \in h(\Omega), u > 0$, gilt, dass

$$\frac{u(x)}{u(z)} = \frac{u(x)}{u(y)} \cdot \frac{u(y)}{u(z)} \leq s(x, y) \cdot 3^d < \infty,$$

d.h. auch $s(x, z) \leq 3^d s(x, y) < \infty$ und $z \in E_x$. Somit gilt $\overline{E_x}^\Omega \subseteq E_x$, d.h. $\overline{E_x}^\Omega = E_x$ und E_x ist abgeschlossen in Ω .

2. Schritt: Es sei $(a, b) \in K \times K$. Dann folgt aus Teil (a) und Schritt 1, dass für ein genügend kleines $R > 0$ und alle $u \in h(\Omega), u > 0$, gilt, dass

$$\forall (x, y) \in B(a, R) \times B(b, R) : \frac{u(x)}{u(y)} = \frac{u(x)}{u(a)} \cdot \frac{u(b)}{u(y)} \cdot \frac{u(a)}{u(b)} \leq 3^d \cdot 3^d \cdot s(a, b).$$

Also ist $s(x, y) \leq 3^{2d} s(a, b)$ für alle (x, y) aus der offenen Menge $B(a, r) \times B(b, r)$. Da das Produkt $K \times K$ kompakt ist, wird es von endlich vielen solcher offener Mengen überdeckt, sagen wir von $B(a_i, R_i) \times B(b_i, R_i), i = 1, \dots, N$. Dann gilt

$$C(\Omega, K) := \sup_{(x,y) \in K \times K} s(x, y) \leq 3^{2d} \cdot \max_{i=1, \dots, N} s(a_i, b_i).$$

□

Jede beschränkte holomorphe Funktion $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ muss konstant sein. Dieses aus der Funktionentheorie bekannte Resultat von Liouville⁶ können wir nun mittels der Harnackschen Ungleichung auf harmonische Funktionen verallgemeinern.

—Ende VL 4—

Korollar 1.29 (Satz von Liouville). Sei $u : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ harmonisch und nach oben oder unten beschränkt. Dann ist u konstant.

Beweis. Wir betrachten nur den Fall, dass u nach oben beschränkt ist (sonst betrachte $-u$), d.h. $\sup_{x \in \mathbb{R}^d} u(x) =: S < \infty$. Dann ist die Funktion $\mathbb{R}^d \ni x \mapsto S - u(x)$ harmonisch und nicht-negativ, d.h. aus der lokalen Harnack-Ungleichung folgt

$$\forall R > 0 \forall x, y \in B[0, R] : 0 \leq (S - u(x)) \leq 3^d (S - u(y)).$$

Da $R > 0$ beliebig ist, gilt die Ungleichungskette also tatsächlich für alle $x, y \in \mathbb{R}^d$. Nun wähle

eine Folge $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ aus \mathbb{R}^d mit $u(y_n) \rightarrow S$. Dann folgt für alle $n \in \mathbb{N}$ und $x \in \mathbb{R}^d$, dass

$$0 \leq S - u(x) \leq \underbrace{3^d(S - u(y_n))}_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \rightarrow 0}}.$$

Schicken wir $n \rightarrow \infty$ folgt $S - u(x) = 0$, d.h. $u(x) = S$ für alle $x \in \mathbb{R}^d$. \square

Aus den Übungen wissen Sie bereits, dass der lokal gleichmäßige Grenzwert einer Folge harmonischer Funktionen wieder harmonisch ist (d.h. sind $u_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ harmonisch, mit $u_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} u$ auf jeder kompakten Teilmenge $K \subseteq \Omega$, so ist auch u harmonisch auf Ω). Für eine wachsende Folge harmonischer Funktionen können wir dies nun mittels der Harnackschen Ungleichungen noch wesentlich verschärfen.

Korollar 1.30 (Harnacksches Prinzip). Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ zusammenhängend und $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine monoton wachsende Folge harmonischer Funktionen auf Ω (d.h. für alle $x \in \Omega$ gilt $u_1(x) \leq u_2(x) \leq \dots$). Dann gilt genau eine der folgenden Aussagen:

- (i) Für alle $x \in \Omega$ ist $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x) = \infty$.
- (ii) Die Folge u_n konvergiert lokal gleichmäßig gegen eine harmonische Funktion $u \in h(\Omega)$.

Beweis. Wir beachten zunächst, dass aufgrund der Monotonie $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x) \in [0, \infty]$ für jedes $x \in \Omega$ existiert. Nehmen wir nun an, dass (i) nicht gilt. Dann existiert $x_0 \in \Omega$, so dass $u(x_0) := \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x_0) \in \mathbb{R}$. Insbesondere ist dann $(u_n(x_0))_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in \mathbb{R} . Sei nun $K \subseteq \Omega$ eine beliebige kompakte Teilmenge und $n \geq m \geq 1$. Dann folgt aus der Harnackschen-Ungleichung, angewandt auf die nicht-negative harmonische Funktion $u_n - u_m$ und mit $K' := K \cup \{x_0\}$, dass für jedes $x \in K$:

$$0 \leq (u_n(x) - u_m(x)) \leq C(\Omega, K')(u_n(x_0) - u_m(x_0)). \quad (\star)$$

Dies zeigt zum einen, dass $(u_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ für jedes $x \in K$ eine Cauchy-Folge ist, also in \mathbb{R} konvergiert. Da K beliebig war, ist also $u(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x) \in \mathbb{R}$ für alle $x \in \Omega$. Weiterhin können wir in (\star) auch $n \rightarrow \infty$ schicken und erhalten für jedes $x \in K$:

$$0 \leq u(x) - u_m(x) \leq C(\Omega, K')(u(x_0) - u_m(x_0))$$

und damit auch

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sup_{x \in K} |u(x) - u_m(x)| = 0.$$

Also konvergieren die harmonischen Funktionen u_m auf der kompakten Menge K gleichmäßig gegen u . Da K beliebig war, wissen wir aus den Übungen, dass somit auch u harmonisch sein muss, d.h. (ii) gilt. \square

2. Die Poisson-Gleichung

Stichpunkte. Poisson-Gleichung, Dirichlet-Problem, Randwertproblem (RWP), Wohlgestelltheit, 1. und 2. Greensche Formel, Fundamentallösung der Laplace-Gleichung, Greensche Darstellungsformel, Newton-Potential, Greensche Funktion, Poisson-Kern, Poisson-Formel für die Kugel, Satz von Perron

Im letzten Abschnitt haben wir uns mit den zeitlich stationären Lösungen der homogenen Wärmeleitungsgleichung befasst. Dies führte zur Laplace-Gleichung $\Delta u = 0$. In diesem Abschnitt soll es nun etwas allgemeiner um die zeitlich stationären Lösungen der **inhomogenen** Wärmeleitungsgleichung gehen, d.h. um die Gleichung

$$\partial_t v(x, t) - \Delta_x v(x, t) = \tilde{f}(x)^1$$

und zeitunabhängige Lösungen der Form $v(x, t) = u(x)$. Dies führt auf die Gleichung $-\Delta u = \tilde{f}$. Um das Minuszeichen loszuwerden, setzen wir $f := -\tilde{f}$ und erhalten die **Poisson-Gleichung**

$$\Delta u = f.^2$$

Wir sind wieder an klassischen Lösungen der Poisson-Gleichung auf einer offenen Teilmenge $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ interessiert, d.h. gegeben $f \in C(\Omega)$ suchen wir $u \in C^2(\Omega)$ mit $\Delta u(x) = f(x)$ für alle $x \in \Omega$.

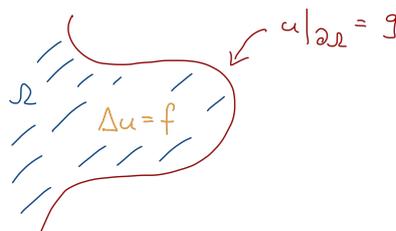
Bemerkung 2.1. Falls die Poisson-Gleichung überhaupt eine klassische Lösung besitzt, so besitzt sie sogar unendlich viele Lösungen. Denn gilt $\Delta u = f$ auf Ω und ist u_0 harmonisch auf Ω , so gilt auch $\Delta(u + u_0) = \Delta u + \Delta u_0 = \Delta u = f$, vergleiche Bemerkung 0.2 (ii).

Um eine eindeutige Lösung zu erhalten, müssen wir also Zusatzbedingungen stellen. In dieser Vorlesung schauen wir uns, von den vielen möglichen solchen Bedingungen, nur die folgende genauer an.

Definition 2.2. Es sei $\Omega \subsetneq \mathbb{R}^d$ offen, $f \in C(\Omega)$ und $g \in C(\partial\Omega)$. Dann besteht das **Dirichlet³-Problem für die Poisson-Gleichung** $\Delta u = f$ im Auffinden einer klassischen Lösung $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, welche auf dem Rand von Ω mit g übereinstimmt, d.h. es gilt

$$\Delta u = f \text{ in } \Omega \quad \text{und} \quad u = g \text{ auf } \partial\Omega.$$

Man nennt f und g die **Daten** des Dirichlet-Problems.



Bemerkung 2.3. Das Dirichlet-Problem für die Poisson-Gleichung ist ein Beispiel eines **Randwertproblems (RWP)**. Solche Randwerte sind oft physikalisch (bzw. modellbedingt) begründet. Bei der Wärmeleitung könnten wir die Vorgabe $u|_{\partial\Omega} = 0$ etwa so interpretieren, dass der beobachtete Körper von außen gekühlt wird.

Beginnen wir unsere Untersuchung mit dem Dirichlet-Problem auf der Kugel, mit **konstanten Daten**.

Beispiel 2.4. Auf $\Omega = B(0, r) \subseteq \mathbb{R}^d$ betrachten wir die konstanten Daten $f := f_0$ und $g := g_0$, d.h. wir suchen eine Lösung von

$$\Delta u(x) = f_0 \quad (|x| < r) \quad \text{und} \quad u(x) = g_0 \quad (|x| = r).$$

Eine Lösung dieses Problems ist gegeben durch

$$(\star) \quad u(x) := g_0 - \frac{f_0}{2d}(r^2 - |x|^2), \quad |x| \leq r.$$

Tatsächlich ist die Lösung (\star) die einzig mögliche, wie das nächste Resultat zeigt.

Proposition 2.5. Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ offen **und beschränkt**. Ferner seien $f \in C(\Omega)$ und $g \in C(\partial\Omega)$. Dann besitzt das Dirichlet-Problem

$$\Delta u = f \text{ auf } \Omega \quad \text{und} \quad u = g \text{ auf } \partial\Omega$$

(i) höchstens eine Lösung $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ und

(ii) diese erfüllt die Abschätzung

$$\|u\|_\infty \leq \|g\|_\infty + \frac{r^2}{2d} \|f\|_\infty,$$

sofern Ω in einer Kugel vom Radius r enthalten ist.

Vorsicht: die Supremums- bzw. Maximumnorm wird, wenn nicht anders gesagt, immer in Bezug auf den Definitionsbereich der Funktion gebildet, d.h. die Ungleichung bedeutet ausgeschrieben, dass

$$\max_{x \in \overline{\Omega}} |u(x)| \leq \max_{x \in \partial\Omega} |g(x)| + \frac{r^2}{2d} \sup_{x \in \Omega} |f(x)|.$$

Beweis. (i) Sind u_1, u_2 zwei Lösungen des Dirichlet-Problems, so ist $u_1 - u_2$ harmonisch in Ω und verschwindet auf $\partial\Omega$. Mit dem Korollar 1.27 zum Maximumprinzip folgt $|u_1 - u_2| = 0$ auf $\overline{\Omega}$, d.h. $u_1 = u_2$.

(ii) Sei $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ eine Lösung des Dirichlet-Problems und $\Omega \subseteq B[x_0, r]$. Wir können annehmen, dass f beschränkt ist (denn sonst ist die Ungleichung klar). Sei $g_0 := \|g\|_\infty$ und $f_0 := \|f\|_\infty$. Wir betrachten die Funktionen $v_\pm \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ definiert durch

$$v_\pm(x) := \pm u(x) - g_0 - \frac{f_0}{2d}(r^2 - |x - x_0|^2), \quad x \in \Omega.$$

Dann gilt

$$\Delta v_\pm(x) = \pm \Delta u(x) + f_0 = \pm f(x) + f_0 \geq 0, \quad x \in \Omega,$$

d.h. v_\pm ist subharmonisch auf Ω . Da $r^2 - |x - x_0|^2 \geq 0$ für $x \in \partial\Omega \subseteq B[x_0, r]$, folgt ferner

$$v_\pm|_{\partial\Omega} \leq \pm u|_{\partial\Omega} - g_0 = \pm g - g_0 \leq 0.$$

Aus dem Maximumprinzip für subharmonische Funktionen (Satz 1.25) folgt damit $v_\pm \leq 0$ auf

$\bar{\Omega}$, d.h. für alle $x \in \bar{\Omega}$ gilt

$$\pm u(x) \leq g_0 + \frac{f_0}{2d}(r^2 - |x - x_0|^2) \leq g_0 + \frac{f_0}{2d}r^2.$$

□

Bemerkung 2.6. (i) Die Proposition 2.5 liefert neben der Eindeutigkeit auch die Stabilität der Lösungen für das Dirichlet-Problem zur Poisson-Gleichung im Falle eines beschränkten Ω : Gilt

$$\begin{array}{ll} \Delta u_1 = f_1 \text{ auf } \Omega & \Delta u_2 = f_2 \text{ auf } \Omega \\ u_1 = g_1 \text{ auf } \partial\Omega & u_2 = g_2 \text{ auf } \partial\Omega, \end{array}$$

so gilt $\Delta(u_1 - u_2) = f_1 - f_2$ auf Ω und $(u_1 - u_2) = g_1 - g_2$ auf $\partial\Omega$, d.h. es folgt

$$\|u_1 - u_2\|_\infty \leq \|g_1 - g_2\|_\infty + \frac{r^2}{2d} \|f_1 - f_2\|_\infty.$$

(ii) Nach Hadamard⁴ nennt man ein Randwertproblem **wohlgestellt**, falls

- eine Lösung existiert,
- die Lösung eindeutig ist, und
- die Lösung stetig von den Daten abhängt.

Letzteres bedeutet, dass „kleine“ Änderungen in den Daten nur „kleine“ Änderungen an den Lösungen bewirken.⁵ Zur Wohlgestelltheit fehlt uns also „nur“ noch die Existenz von Lösungen.

(iii) Für unbeschränktes Ω müssen die Lösungen des Dirichlet-Problems nicht mehr eindeutig sein. Beispielsweise ist auf $\Omega := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$ für jedes $a \in \mathbb{R}$ durch

$$u_a : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \quad u_a(x, y) := a \cdot x$$

eine Lösung des Dirichlet-Problems $\Delta u = 0$ auf Ω und $u = 0$ auf $\partial\Omega$ gegeben.

Im Folgenden wollen wir uns nun mit der Lösbarkeit des Dirichlet-Problems für die Poisson-Gleichung befassen. Das folgende Resultat spaltet den Lösungsprozess in zwei Teilaufgaben auf.

Lemma 2.7. Es sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ offen, $f \in C(\Omega)$ und $g \in C(\partial\Omega)$. Ist $v \in C(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ eine (beliebige) Lösung der Poisson-Gleichung

$$\Delta v = f \text{ auf } \Omega$$

und $w \in C(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ eine Lösung des Randwertproblems

$$\begin{cases} \Delta w = 0 & \text{auf } \Omega \\ w = g - v & \text{auf } \partial\Omega, \end{cases}$$

so ist $u := v + w$ eine Lösung von

$$\begin{cases} \Delta u = f \text{ auf } \Omega \\ u = g \text{ auf } \partial\Omega. \end{cases}$$

Beweis. Linearität des Laplace-Operators. □

Bemerkung 2.8. In Anbetracht des Lemmas sind wir also vor zwei Aufgaben gestellt:

Aufgabe 1: Wir müssen die Poisson-Gleichung $\Delta u = f$ auf Ω lösen können (wobei die Randwerte der Lösungen egal sind).

Aufgabe 2: Wir müssen das Dirichlet-Problem $\Delta u = 0$ auf Ω und $u = g$ auf $\partial\Omega$ lösen können (zu beliebig vorgegebenen Randwerten g).

Haben wir das geleistet, können wir das allgemeine Dirichlet-Problem für die Poisson-Gleichung auf Ω mit Lemma 2.7 lösen.

Im restlichen Teil dieses Kapitels geht es nun wie folgt weiter:

- in Abschnitt 2.1 werden wir Ideen entwickeln, welche Gestalt mögliche Lösungen der Poisson-Gleichung bzw. des zugehörigen Dirichlet-Problems haben müssen,
- in Abschnitt 2.2 lösen wir Aufgabe 2 im Falle einer Kugel $\Omega = B(0, R)$,
- in Abschnitt 2.3 lösen wir Aufgabe 1, und
- in Abschnitt 2.4 lösen wir schließlich noch Aufgabe 2 für (möglichst) allgemeine Ω .

—Ende VL 5—

2.1. Lösungsdarstellungen

In diesem Abschnitt wollen wir Ideen erarbeiten, wie Lösungen der Poisson-Gleichung und des zugehörigen Dirichlet-Problems aussehen müssen. Hierbei gehen wir zunächst davon aus, dass Lösungen existieren und versuchen, für diese explizite Darstellungsformeln zu gewinnen. Später werden wir diese Darstellungsformeln dann auch nutzen, um die Existenz von Lösungen zu zeigen.

Beispiel 2.9 (Der 1-dimensionale Fall). Es sei $f \in C_c(\mathbb{R})$, d.h. f verschwindet außerhalb eines kompakten Intervalls. Wir erhalten eine partikuläre Lösung der gewöhnlichen Differentialgleichung $u'' = f$ auf \mathbb{R} einfach durch zweimalige Integration als

$$u_p(x) = \int_{-\infty}^x \left(\int_{-\infty}^y f(z) dz \right) dy, \quad x \in \mathbb{R},$$

und die allgemeine Lösung ist durch $u_p(x) + ax + b$, $x \in \mathbb{R}$, mit $a, b \in \mathbb{R}$ beliebig gegeben (die harmonischen Funktionen auf \mathbb{R} sind gerade die affin-linearen). Leider ist bei dieser Lösung überhaupt nicht ersichtlich, wie wir sie auf höhere Dimensionen verallgemeinern sollten! Das sieht bei der folgenden Funktion schon anders aus:

$$u(x) := \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2} |x - y| f(y) dy, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Auch dies ist eine partikuläre Lösung von $u'' = f$, wie man elementar nachrechnen kann.⁶ Diese Lösung lässt sich also als Faltung von f mit der Funktion $E(x) := \frac{1}{2} |x|$ erhalten, d.h. $u = E * f$. Dieser Ansatz lässt sich tatsächlich auf den Fall $d \geq 2$ verallgemeinern.

Wie wir sehen werden, lassen sich Lösungen der Poisson-Gleichung auch im Höherdimensionalen als Faltung darstellen. Um dies zu erreichen, müssen wir allerdings ein paar Vorarbeiten leisten. Zunächst benötigen wir eine höherdimensionale Version der Regel der partiellen Integration, die sogenannten Greenschen Formeln. Hierzu verwenden wir fortan die Notation

$$\partial_\nu f(z) := \langle \nabla f(z), \nu(z) \rangle$$

für die äußere **Normalenableitung** von f im Punkt $z \in \partial\Omega$. Diese existiert (siehe Anhang A.1), sofern $f \in C^1(\overline{\Omega})$ und Ω einen C^1 -Rand besitzt. Hierbei ist für $n \in \mathbb{N}$

$$C^n(\overline{\Omega}) := \{f \in C^n(\Omega) : \partial^\alpha f \text{ hat stetige Fortsetzung auf } \overline{\Omega}, |\alpha| \leq n\}$$

und wir notieren die stetigen Fortsetzungen von $\partial^\alpha f$ (und damit gebildeter Größen wie ∇f) auf $\overline{\Omega}$ wieder mit dem gleichen Symbol.

Satz 2.10. Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ eine offene und beschränkte Menge mit C^1 -Rand. Ferner sei $f \in C^2(\overline{\Omega})$ und $g \in C^1(\overline{\Omega})$. Dann gilt die **1. Greensche Formel**⁷

$$\int_{\Omega} (\langle \nabla f(x), \nabla g(x) \rangle + g(x) \Delta f(x)) \, dx = \int_{\partial\Omega} \partial_\nu f(z) g(z) \, d\sigma(z).$$

Ist auch $g \in C^2(\overline{\Omega})$, gilt auch die **2. Greensche Formel**

$$\int_{\Omega} (g(x) \Delta f(x) - f(x) \Delta g(x)) \, dx = \int_{\partial\Omega} (g(z) \partial_\nu f(z) - f(z) \partial_\nu g(z)) \, d\sigma(z).$$

Beweis. Da $\operatorname{div}(g \cdot \nabla f) = \langle \nabla f, \nabla g \rangle + g \Delta f$, folgt die 1. Greensche Formel aus dem Divergenzsatz A.1.1 angewandt auf $F := g \cdot \nabla f \in C^1(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^d)$. Die 2. Greensche Formel folgt, wenn wir in der originalen 1. Greenschen Formel die Rollen von f und g vertauschen und das Ergebnis von der originalen Formel subtrahieren. \square

Nun benötigen wir das höherdimensionale Analogon der Funktion $E(x) = \frac{1}{2} |x|$ aus Beispiel 2.9.

Definition 2.11. Man nennt die (nach Beispiel 1.3 (ii)) harmonische radialsymmetrische Funktion $E : \mathbb{R}^d \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$E(x) := \begin{cases} \frac{1}{2} |x|, & \text{falls } d = 1 \\ \frac{1}{2\pi} \ln |x|, & \text{falls } d = 2 \\ \frac{1}{(2-d)\sigma_{d-1}} \frac{1}{|x|^{d-2}}, & \text{falls } d \geq 3 \end{cases}$$

die **Fundamentallösung der Laplace-Gleichung** bzw. **des Laplace-Operators**.

Im Folgenden betrachten wir nur noch den Fall $d \geq 2$ und halten zunächst zwei einfache Eigenschaften der Fundamentallösung fest.

Lemma 2.12. (i) Für $x \in \mathbb{R}^d, d \geq 2$, mit $|x| = r > 0$ gilt

$$\nabla E(x) = \frac{1}{\sigma_{d-1} r^{d-1}} \cdot \frac{x}{r}.$$

Insbesondere folgt für die Normalenableitung von E auf $\partial B(0, r)$, dass $\partial_\nu E(x) = \frac{1}{\sigma_{d-1} r^{d-1}}$.

(ii) Es gilt $E \in \mathcal{L}_1^{loc}(\mathbb{R}^d)$ und $\partial_j E \in \mathcal{L}_1^{loc}(\mathbb{R}^d), j = 1, \dots, d$. Hierbei können $E(0)$ und $\partial_j E(0)$ beliebig gewählt werden.⁸

Beweis. (i) Schreiben wir die radialsymmetrische Funktion E als $E(x) = f(r)$ mit $r = |x|$, so zeigt die Kettenregel, dass

$$\partial_i E(x) = f'(r) \cdot \frac{x_i}{|x|}, \quad i = 1, \dots, d,$$

also auch $\nabla E(x) = f'(r) \cdot \frac{x}{r}$. Hieraus folgt die Behauptung.

(ii) Es genügt zu zeigen, dass $\int_{B[0,R]} |E(x)| dx$ für alle $R > 0$ endlich ist. Da E radialsymmetrisch ist, erhalten wir mittels Schichtintegration

$$\int_{B[0,R]} |E(x)| dx = \begin{cases} \int_0^R |\ln(s)| \cdot s ds, & d = 2, \\ \frac{1}{(d-2)} \int_0^R s^{2-d} \cdot s^{d-1} ds, & d \geq 3. \end{cases}$$

Im Falle $d \geq 3$ ist dieses Integral offensichtlich endlich. Im Falle $d = 2$ beachten wir, dass die Funktion $h : (0, \infty) \ni s \mapsto |\ln(s)| \cdot s$ zu einer stetigen Funktion auf $[0, \infty)$ fortgesetzt werden kann (setze $h(0) := 0$), d.h. auch in diesem Fall ist das Integral endlich. Die lokale Integrierbarkeit von $\partial_j E$ folgt analog, da $|\partial_j E(x)| \leq C \frac{1}{|x|^{d-1}}$. \square

In der folgenden Integraldarstellung für C^2 -Funktionen verwenden wir für festes $x \in \Omega$ und $y \in \partial\Omega$ die Notation $\partial_{\nu(y)} E(x-y)$ für die Normalenableitung der Funktion $y \mapsto E(x-y)$.

Satz 2.13 (Greensche Darstellungsformel). Sei $d \geq 2$ und $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ eine offene und beschränkte Menge mit C^1 -Rand. Ferner sei $u \in C^2(\overline{\Omega})$. Dann gilt für alle $x \in \Omega$

$$u(x) = \int_{\Omega} E(x-y) \Delta u(y) dy - \int_{\partial\Omega} (E(x-y) \partial_{\nu} u(y) - u(y) \partial_{\nu(y)} E(x-y)) d\sigma(y).$$

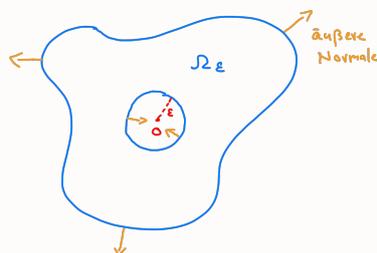
Beweis. Man beachte, dass die im Satz auftretenden Integrale wegen Teil (ii) des vorherigen Lemmas existieren. Ferner genügt es, den Fall $0 \in \Omega$ zu betrachten und die Gleichung für $x = 0$ zu beweisen (anschließend betrachte $w : \{x\} - \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch $w(z) := u(x-z)$). Wir müssen also zeigen (beachte $E(-y) = E(y)$), dass

$$u(0) = \int_{\Omega} E(y) \Delta u(y) dy - \int_{\partial\Omega} (E(y) \partial_{\nu} u(y) - u(y) \partial_{\nu} E(y)) d\sigma(y)$$

oder kurz

$$u(0) = \int_{\Omega} E \Delta u dy - \int_{\partial\Omega} (E \partial_{\nu} u - u \partial_{\nu} E) d\sigma. \quad (*)$$

Leider besitzt E im Nullpunkt eine Singularität, so dass wir die Greenschen Formeln im Beweis von $(*)$ nicht direkt anwenden können. Sei daher $\varepsilon > 0$, so dass $B[0, \varepsilon] \subseteq \Omega$ und sei $\Omega^\varepsilon := \Omega \setminus B[0, \varepsilon]$.



Auf Ω^ε folgt nun mit der 2. Greenschen Formel (mit $f = u, g = E$) wegen $\Delta E = 0$, dass

$$\begin{aligned} \int_{\Omega^\varepsilon} E \Delta u dy &= \int_{\Omega^\varepsilon} (E \Delta u - u \Delta E) dy = \int_{\partial\Omega^\varepsilon} (E \partial_{\nu} u - u \partial_{\nu} E) d\sigma \\ &= \int_{\partial\Omega} (E \partial_{\nu} u - u \partial_{\nu} E) d\sigma - \int_{\partial B(0, \varepsilon)} (E \partial_{\nu} u - u \partial_{\nu} E) d\sigma, \end{aligned}$$

wobei wir in der letzten Gleichung benutzen, dass ν die *äußere* Normale an den Rand des Integrationsgebietes bezeichnet (daher das Minuszeichen vor dem 2. Integral). Wir erhalten also

$$\int_{\partial B(0,\varepsilon)} u \partial_\nu E \, d\sigma = \int_{\Omega^\varepsilon} E \Delta u \, dy - \int_{\partial \Omega} (E \partial_\nu u - u \partial_\nu E) \, d\sigma + \int_{\partial B(0,\varepsilon)} E \partial_\nu u \, d\sigma \quad (**)$$

und zeigen nun, dass wir aus dieser Gleichung durch Grenzübergang $\varepsilon \rightarrow 0$ die Gleichung (*) erhalten.

1. Linke Seite von ():** Hier nutzen wir, dass nach Lemma 2.12

$$\partial_\nu E = \frac{1}{\sigma_{d-1} \varepsilon^{d-1}} \quad \text{und somit} \quad \int_{\partial B(0,\varepsilon)} \partial_\nu E \, d\sigma = 1.$$

Man beachte, dass an dieser Stelle die Wahl der Konstanten in der Fundamentallösung wichtig ist, denn bei einer anderen Wahl hätte obiges Integral nicht den Wert 1. Damit erhalten wir nun

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\partial B(0,\varepsilon)} u \partial_\nu E \, d\sigma = u(0) + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\partial B(0,\varepsilon)} (u - u(0)) \partial_\nu E \, d\sigma.$$

Aber es gilt

$$\left| \int_{\partial B(0,\varepsilon)} (u - u(0)) \partial_\nu E \, d\sigma \right| \leq \max_{|z|=\varepsilon} |u(z) - u(0)| \underbrace{\int_{\partial B(0,\varepsilon)} |\partial_\nu E| \, d\sigma}_{=1} = \max_{|z|=\varepsilon} |u(z) - u(0)|$$

und hier geht die rechte Seite für $\varepsilon \rightarrow 0$ gegen 0, da u stetig ist.

2. Rechte Seite von ():** Es ist noch zu zeigen, dass

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega^\varepsilon} E \Delta u \, dy = \int_{\Omega} E \Delta u \, dy \quad \text{und} \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\partial B(0,\varepsilon)} E \partial_\nu u \, d\sigma = 0.$$

Wir beweisen hier nur noch das erste Resultat. Der Beweis des zweiten ist in den Notizen zu finden.⁹ Tatsächlich gilt für das erste Integral, dass

$$\left| \int_{\Omega^\varepsilon} E \Delta u \, dy - \int_{\Omega} E \Delta u \, dy \right| = \left| \int_{B[0,\varepsilon]} E \Delta u \, dy \right| \leq \|\Delta u\|_\infty \int_{B[0,\varepsilon]} |E| \, dy$$

und die rechte Seite geht für $\varepsilon \rightarrow 0$ gegen 0, da E lokal-integrierbar ist. \square

Die Greensche Darstellungsformel liefert uns nun sofort einen Ansatz für eine Lösung der Poisson-Gleichung und somit eine Verallgemeinerung von Beispiel 2.9 auf den Fall $d \geq 2$.

Korollar 2.14 (Newton-Potential). Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ offen, beschränkt und mit C^1 -Rand. Ferner sei $f \in C(\overline{\Omega})$ und die Poisson-Gleichung $\Delta u = f$ besitze auf Ω eine Lösung $u \in C^2(\overline{\Omega})$. Dann ist auch das sogenannte **Newton-Potential**¹⁰

$$V = V_f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \quad V_f(x) := \int_{\Omega} E(x-y) f(y) \, dy = (E * f)(x)$$

eine Lösung dieser Gleichung.

Hierbei gilt die Darstellung des Newton-Potentials als Faltung, wenn wir f durch 0 auf \mathbb{R}^d fortsetzen, vergleiche Proposition 1.15.

Beweis. Die Greensche Darstellungsformel liefert wegen $\Delta u = f$, dass für $x \in \Omega$

$$(\star) \quad u(x) = \underbrace{\int_{\Omega} E(x-y)f(y) dy}_{=V_f(x)} - \int_{\partial\Omega} \underbrace{(E(x-y)\partial_\nu u(y) - u(y)\partial_{\nu(y)}E(x-y))}_{=:k(x,y)} d\sigma(y).$$

Da E auf $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ harmonisch ist, ist für $y \in \partial\Omega$ auch die Funktion $\Omega \ni x \mapsto k(x,y)$ harmonisch.¹¹ Und da wir Ableitungen und Integral mit dem üblichen Argument vertauschen dürfen, folgt auch die Harmonizität von $\Omega \ni x \mapsto \int_{\partial\Omega} k(x,y) dy$. Wegen $\Delta u = f$ erhalten wir also aus (\star) , dass $f(x) = \Delta u(x) = \Delta V_f(x)$. \square

Im übernächsten Abschnitt werden wir zeigen, dass das Newton-Potential $V_f = E * f$ für genügend gutartige f tatsächlich eine Lösung der Poisson-Gleichung $\Delta u = f$ liefert. Vorgegebene Randwerte nimmt diese Lösung allerdings nicht an, d.h. zur Lösung des Dirichlet-Problems für die Poisson-Gleichung müssen wir einen anderen Ansatz suchen.

—Ende VL 6—

Schauen wir dazu noch ein weiteres Mal in die Greensche Darstellungsformel: Nehmen wir an, $u \in C^2(\overline{\Omega})$ ist eine Lösung von $\Delta u = f$ auf Ω und $u = g$ auf $\partial\Omega$. Dann erhalten wir

$$u(x) = \int_{\Omega} E(x-y) \underbrace{\Delta u(y)}_{\stackrel{!}{=}f(y)} dy - \int_{\partial\Omega} (E(x-y) \underbrace{\partial_\nu u(y)}_{\stackrel{!}{=}??}) - \underbrace{u(y)\partial_{\nu(y)}E(x-y)}_{\stackrel{!}{=}g(y)}) d\sigma(y)$$

Hier liefert die rechte Seite, mit den angegebenen Ersetzungen, leider noch keinen Ansatz für eine Lösung, da wir im Allgemeinen nichts über die Normalenableitung $\partial_\nu u$ von u wissen (denn um $\partial_\nu u$ zu berechnen, genügt es nicht, u nur auf dem Rand $\partial\Omega$ zu kennen). Allerdings kann man diesen Term mit einem kleinen Trick loswerden. Hierzu benötigen wir einen weiteren Begriff.

Definition 2.15. Sei $\Omega \subsetneq \mathbb{R}^d$ offen und für jedes $y \in \Omega$ existiere eine Lösung $h_y \in C^2(\overline{\Omega})$ des Dirichlet-Problems

$$(\star) \quad \begin{cases} \Delta_x h_y(x) = 0 & \text{für } x \in \Omega, \\ h_y(x) = E(x-y) & \text{für } x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Dann heißt die Familie $(h_y)_{y \in \Omega}$ eine **Familie von Korrekturfunktionen auf Ω** . Weiterhin heißt

$$G = G_\Omega : (\overline{\Omega} \times \Omega) \setminus \{(x,x) : x \in \Omega\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad G(x,y) := E(x-y) - h_y(x)$$

die zugehörige **Greensche Funktion zu Ω** .

Bemerkung 2.16. (i) Laut Proposition 2.5 besitzt das Dirichlet-Problem (\star) für **beschränktes Ω** höchstens eine klassische Lösung, d.h. in diesem Fall existiert auch höchstens eine Familie von Korrekturfunktionen und eine Greensche Funktion zu Ω .

(ii) Für alle $y \in \Omega$ ist $E(\cdot - y) \in h(\mathbb{R}^d \setminus \{y\})$ und $h_y \in h(\Omega) \cap C^2(\overline{\Omega})$. Daher gilt

$$G(\cdot, y) \in h(\Omega \setminus \{y\}) \cap C^2(\overline{\Omega} \setminus \{y\}).$$

Außerdem ist $G(\cdot, y) \in \mathcal{L}_1^{loc}(\Omega)$, da dies für $E(\cdot - y)$ und h_y gilt.

Mit Hilfe des Greenschen Darstellungssatzes und der Greenschen Funktion erhalten wir nun die anvisierte Darstellungsformel für die Lösungen des Dirichlet-Problems für die Poisson-Gleichung.

Satz 2.17. Es sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ offen, beschränkt und mit C^1 -Rand. Ferner möge die Greensche Funktion G zu Ω existieren. Sind dann $f \in C(\Omega)$, $g \in C(\partial\Omega)$ und ist $u \in C^2(\overline{\Omega})$ eine Lösung von

$$\Delta u = f \text{ auf } \Omega, \quad u = g \text{ auf } \partial\Omega,$$

so gilt

$$(\diamond) \quad u(p) = \int_{\Omega} G(x, p) f(x) dx + \int_{\partial\Omega} K(x, p) g(x) d\sigma(x), \quad p \in \Omega,$$

wobei

$$K(x, p) := K_{\Omega}(x, p) := \partial_{\nu(x)} G(x, p)$$

der sogenannte **Poisson-Kern** (des Laplace-Operators) in Ω ist.

Beweis. Sei $p \in \Omega$. Da $\Delta u = f$, $u|_{\partial\Omega} = g$ folgt aus der Greenschen Darstellungsformel (Satz 2.13) unter Verwendung der Radialsymmetrie von E , dass

$$(\star) \quad u(p) = \int_{\Omega} E(x-p) f(x) dx - \int_{\partial\Omega} (E(x-p) \partial_{\nu} u(x) - g(x) \partial_{\nu(x)} E(x-p)) d\sigma(x).$$

Nun sei $h_p \in h(\Omega) \cap C^2(\overline{\Omega})$ die zugehörige Korrekturfunktion in p . Dann folgt aus der 2. Greenschen Formel, dass

$$0 = \int_{\Omega} (h_p \Delta u - u \Delta h_p) dx - \int_{\partial\Omega} (h_p \partial_{\nu} u - u \partial_{\nu} h_p) d\sigma,$$

d.h. hier folgt wegen $\Delta u = f$, $u|_{\partial\Omega} = g$, $h_p|_{\partial\Omega} = E(\cdot - p)$ und $\Delta h_p = 0$, dass

$$(\star\star) \quad 0 = \int_{\Omega} h_p(x) f(x) dx - \int_{\partial\Omega} (E(x-p) \partial_{\nu} u(x) - g(x) \partial_{\nu} h_p(x)) d\sigma(x).$$

Ziehen wir $(\star\star)$ von (\star) ab, so folgt

$$u(p) = \int_{\Omega} \underbrace{(E(x-p) - h_p(x))}_{=G(x,p)} f(x) dx + \int_{\partial\Omega} \underbrace{\partial_{\nu(x)}(E(x-p) - h_p(x))}_{=G(x,p)} g(x) d\sigma(x).$$

□

Existiert also die Greensche Funktion G zu Ω und können wir diese bestimmen, so erhalten wir mittels (\diamond) einen Ansatz für die Lösung des Dirichlet-Problems für die Poisson-Gleichung, von dem man dann zeigen muss, dass er tatsächlich eine Lösung ist. Für geeignete Gebiete (mit vielen Symmetrien bzw. mit viel Struktur) lässt sich dies tatsächlich bewerkstelligen. Im nächsten Abschnitt werden wir dies für den Fall $\Omega = B(0, r) \subseteq \mathbb{R}^d$ genauer betrachten.

Bemerkung 2.18. Im nächsten Abschnitt werden wir die Greensche Funktion G und den Poisson-Kern K auf der Kugel $\Omega = B(0, r)$ explizit bestimmen. Einige der Eigenschaften, die G und K in diesem Fall besitzen, gelten auch für allgemeines Ω . Zum Beispiel gilt stets:

- $G(x, y) = G(y, x)$.
- $G(x, y) \leq 0$. Ist Ω zusammenhängend, so gilt sogar $G(x, y) < 0$.
- $K(x, y) \geq 0$ und $\int_{\partial\Omega} K(x, p) d\sigma(x) = 1$.

Einige dieser Eigenschaften werden wir uns in der Übung noch einmal ansehen.

2.2. Das Dirichlet-Problem für die Laplace-Gleichung auf der Kugel

In diesem Abschnitt bestimmen wir die Greensche Funktion für die Kugel $B(0, r) \subseteq \mathbb{R}^d, d \geq 3$, und nutzen diese zur Lösung des Dirichlet-Problems für die Laplace-Gleichung auf diesem Gebiet (das Dirichlet-Problem für die Poisson-Gleichung könnten wir auf diesem Wege auch lösen, dies ist aber in Anbetracht unserer in Bemerkung 2.8 skizzierten Strategie hier nicht notwendig).

Als erstes benötigen wir die zugehörigen Korrekturfunktionen $h_y \in C^2(\overline{B(0, r)}), y \in B(0, r)$, mit

$$(\star) \quad \begin{cases} \Delta h_y(x) = 0, & \text{falls } |x| < r, \\ h_y(x) = E(x - y), & \text{falls } |x| = r. \end{cases}$$

Für $y \neq 0$ machen wir den Ansatz

$$h_y(x) = c(y)E(x - y^*)$$

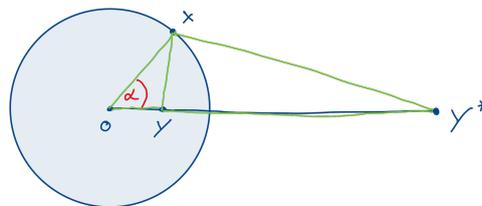
mit noch zu wählenden $y^* \in B[0, r]^c$ und $c(y) \in \mathbb{R}$. Für jede solche Wahl gilt $h_y \in h(B(0, r)) \cap C^2(\overline{B(0, r)})$. Damit auch die Randbedingung in (\star) erfüllt ist, muss weiter gelten

$$|x| = r \Rightarrow c(y) = \frac{E(x - y)}{E(x - y^*)} = \left(\frac{|x - y^*|}{|x - y|} \right)^{d-2},$$

d.h. y^* muss so gewählt werden, dass die rechten Seiten jeweils unabhängig von $x \in \partial B(0, r)$ sind. Um dies zu gewährleisten, benutzen wir die sogenannte **Spiegelungsmethode** und setzen

$$y^* = r(y) \frac{y}{|y|}$$

mit einer noch zu wählenden Funktion $r(y) > 1$.



Diese wählen wir so, dass die Dreiecke $0y^*x$ und $0yx$ ähnlich sind. Da die Dreiecke den Winkel α gemeinsam haben, ist dies der Fall, wenn

$$\frac{|y^*|}{|x|} = \frac{|x|}{|y|} \Leftrightarrow r(y) = |y^*| = \frac{|x|^2}{|y|} = \frac{r^2}{|y|} \Leftrightarrow y^* = \frac{r^2}{|y|} \frac{y}{|y|}.$$

Man nennt dies auch die **Inversion** von y am Kreis $\partial B(0, r)$. Man rechnet nun leicht nach (oder begründet mittels Ähnlichkeit von Dreiecken), dass für $|x| = r$ und $|y| < r$:

$$\frac{|x - y^*|}{|x - y|} = \frac{|y^*|}{|x|} = \frac{r}{|y|}. \quad (\star\star)$$

Wir haben also unser Ziel erreicht und erhalten mit diesem y^* , dass

$$c(y) = \left(\frac{r}{|y|} \right)^{d-2} \quad \text{und} \quad h_y(x) = \left(\frac{r}{|y|} \right)^{d-2} E(x - y^*).$$

Wählen wir nun noch $h_0(x) := E(r)$ konstant, so haben wir Teil (i) des folgenden Resultats gezeigt.

Proposition 2.19. Wir betrachten $B(0, r) \subseteq \mathbb{R}^d, d \geq 3$.

(i) Die Greensche Funktion für $B(0, r)$ existiert. Für $|x| \leq r$ und $0 < |y| < r$ mit $x \neq y$ gilt

$$G(x, y) = E(x - y) - \left(\frac{r}{|y|} \right)^{d-2} E(x - y^*), \quad \text{wobei} \quad y^* = \frac{r^2}{|y|^2} y.$$

(ii) Für den zugehörigen Poisson-Kern $K(x, y) := \partial_{\nu(x)} G(x, y)$ gilt

$$K(x, y) = \frac{1}{\sigma_{d-1} r} \frac{r^2 - |y|^2}{|x - y|^d}, \quad (|x| = r, |y| < r).$$

Beweis. Nur Teil (ii) ist noch zu zeigen. Wir betrachten nur den Fall $y \neq 0$, d.h.

$$G(x, y) = E(x - y) - h_y(x) = E(x - y) - \left(\frac{r}{|y|} \right)^{d-2} E(x - y^*).$$

Da $\nabla_x E(x - y) = \frac{1}{\sigma_{d-1}} \cdot \frac{x-y}{|x-y|^d}$ (vergleiche Lemma 2.12), folgt zunächst

$$\partial_{\nu(x)} E(x - y) = \langle \nabla_x E(x - y), \frac{x}{r} \rangle = \frac{1}{\sigma_{d-1} r |x - y|^d} \langle x - y, x \rangle = \frac{r^2 - \langle x, y \rangle}{\sigma_{d-1} r |x - y|^d}.$$

Man beachte hierbei, dass $|x|^2 = \langle x, x \rangle = r^2$. Völlig analog erhalten wir

$$\partial_{\nu(x)} E(x - y^*) = \frac{r^2 - \langle x, y^* \rangle}{\sigma_{d-1} r |x - y^*|^d}.$$

Da wegen (***) gilt, dass $y^* = \frac{r^2}{|y|^2} y$ und $|x - y^*| = \frac{r}{|y|} |x - y|$, erhalten wir also

$$\partial_{\nu(x)} E(x - y^*) = \frac{r^2 - \frac{r^2}{|y|^2} \langle x, y \rangle}{\sigma_{d-1} r \left(\frac{r}{|y|} |x - y| \right)^d} = \frac{|y|^2 - \langle x, y \rangle}{\sigma_{d-1} r |x - y|^d} \cdot \frac{|y|^{d-2}}{r^{d-2}}.$$

Setzen wir alles zusammen, folgt das Gewünschte:

$$\partial_{\nu(x)} G(x, y) = \frac{r^2 - \langle x, y \rangle}{\sigma_{d-1} r |x - y|^d} - \left(\frac{r}{|y|} \right)^{d-2} \cdot \frac{|y|^2 - \langle x, y \rangle}{\sigma_{d-1} r |x - y|^d} \cdot \frac{|y|^{d-2}}{r^{d-2}} = \frac{r^2 - |y|^2}{\sigma_{d-1} r |x - y|^d}.$$

□

Bemerkung 2.20. (i) Eine kurze Rechnung zeigt, dass im Falle $d \geq 3$

$$G(x, y) = \frac{1}{(2-d)\sigma_{d-1}} \left(\frac{1}{|x - y|^{d-2}} - \frac{1}{\left(\frac{|x|^2 |y|^2}{r^2} - 2\langle x, y \rangle + r^2 \right)^{\frac{d-2}{2}}} \right).$$

(ii) Ein analoges Argument zeigt auch die Existenz der Greenschen Funktion im Falle $d = 2$. Die obige Formel für den Poisson-Kern bleibt auch im Falle $d = 2$ gültig. Die Formel für die Greensche Funktion sieht etwas anders aus.¹²

Nun können wir zeigen, dass durch die Darstellung (\diamond) aus Satz 2.17 tatsächlich eine Lösung des RWP $\Delta u|_{\Omega} = f, u|_{\Omega} = g$ gegeben ist. Wir betrachten aus Zeitgründen und in Anbetracht von Lemma 2.7 nur noch den Fall $f = 0$.

Satz 2.21 (Poisson-Formel für die Kugel). Sei $d \geq 2$. Für $g \in C(\partial B(0, r))$ setzen wir

$$u(p) := \int_{\partial B(0, r)} K(x, p) g(x) d\sigma(x), \quad |p| < r,$$

mit dem Poisson-Kern

$$K(x, p) = \frac{1}{\sigma_{d-1} r} \frac{r^2 - |p|^2}{|x - p|^d}.$$

Dann gilt:

- (i) $u \in C(\overline{B(0, r)}) \cap C^\infty(B(0, r))$,
- (ii) u ist die eindeutige klassische Lösung des RWP

$$\Delta u = 0 \text{ auf } B(0, r), \quad u = g \text{ auf } \partial B(0, r).$$

—Ende VL 7—

Beweis. Zunächst bemerken wir, dass

$$B(0, r) \ni p \mapsto K(x, p) = \partial_{v(x)} G(x, p)$$

für festes $x \in \partial B(0, r)$ harmonisch ist. Dies folgt entweder durch direktes nachrechnen oder unter Verwendung der entsprechenden Eigenschaft für $p \mapsto G(x, p)$. Mit Vertauschung von Ableitung und Integral (übliches Argument) folgt damit auch die Harmonizität von u auf $B(0, r)$.

Es bleibt zu zeigen, dass sich u durch $u|_{\partial\Omega} := g$ stetig auf $B[0, r]$ fortsetzen lässt, d.h. für $|z| = r$ sollte gelten

$$\lim_{p \rightarrow z, |p| < r} |u(p) - g(z)| = 0.$$

Sei dazu $\varepsilon > 0$ beliebig. Da g in z stetig ist, existiert $\delta > 0$ mit

$$\forall x \in B(z, 2\delta) \cap \partial B(0, r) : |g(x) - g(z)| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

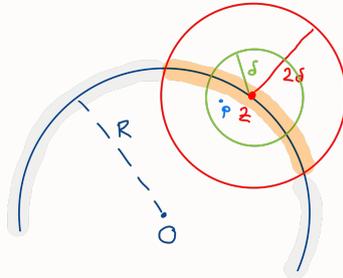
Da $K \geq 0$ und $\int_{\partial B(0, r)} K(x, p) d\sigma(x) = 1$ (Übung bzw. Bemerkung 2.18) folgt damit für $p \in B(0, r) \cap B(z, \delta)$:

$$\begin{aligned} |u(p) - g(z)| &= \left| \int_{\partial B(0, r)} K(x, p) (g(x) - g(z)) d\sigma(x) \right| \leq \int_{\partial B(0, r)} K(x, p) |g(x) - g(z)| d\sigma(x) \\ &= \int_{\partial B(0, r) \cap B(z, 2\delta)} K(x, p) |g(x) - g(z)| d\sigma(x) + \int_{\partial B(0, r) \setminus B(z, 2\delta)} K(x, p) |g(x) - g(z)| d\sigma(x) \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + 2 \|g\|_\infty \int_{\partial B(0, r) \setminus B(z, 2\delta)} K(x, p) d\sigma(x) \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + 2\sigma_{d-1} r^{d-1} \|g\|_\infty \sup_{x \in \partial B(0, r) \setminus B(z, 2\delta)} K(x, p) \\ &\stackrel{(*)}{=} \frac{\varepsilon}{2} + 2\sigma_{d-1} r^{d-1} \|g\|_\infty \frac{1}{r\sigma_{d-1}} \frac{r^2 - |p|^2}{\delta^d}. \end{aligned}$$

Da hier auch der zweite Term für $p \rightarrow z$ beliebig klein wird, folgt die Behauptung. Zur

Rechtfertigung von (*) bemerken wir, dass im Falle $|z - p| \leq \delta$ und $|x - z| \geq 2\delta$ auch $|x - p| \geq |x - z| - |z - p| \geq \delta$ und somit

$$K(x, p) = \frac{1}{r\sigma_{d-1}} \frac{r^2 - |p|^2}{|x - p|^d} \leq \frac{1}{r\sigma_{d-1}} \frac{r^2 - |p|^2}{\delta^d}.$$



□

2.3. Das Newton-Potential

In diesem Abschnitt zeigen wir, dass das Newton-Potential V_f , vergleiche Korollar 1.29, in der Tat eine Lösung der Poisson-Gleichung $\Delta u = f$ auf Ω liefert, sofern f hinreichend „schön“ ist. Zunächst betrachten wir den Fall, dass f kompakten Träger in $\Omega = \mathbb{R}^d$ besitzt. Es sei daran erinnert, dass die Fundamentallösung E nach Lemma 2.12 lokal integrierbar ist (d.h. mit einer kompakt getragenen Funktion gefaltet werden kann).

Lemma 2.22. Sei $f \in C_c(\mathbb{R}^d)$ und

$$V(x) := V_f(x) := (E * f)(x) := \int_{\mathbb{R}^d} E(x - y) f(y) dy, \quad x \in \mathbb{R}^d,$$

das zugehörige Newton-Potential (welches nach Proposition 1.15 existiert). Dann gilt:

- (i) V ist stetig. Ist $f \in C_c^k(\mathbb{R}^d)$, $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, so ist auch $V \in C^k(\mathbb{R}^d)$.
- (ii) Ist $f \in C_c^2(\mathbb{R}^d)$, so gilt $\Delta V = f$ auf \mathbb{R}^d .¹³

Beweis. (i) Dies folgt sofort aus Satz 1.16 unter Beachtung von $V = E * f = f * E$ (siehe Proposition 1.15).

(ii) Sei $x \in \mathbb{R}^d$ und wähle $\Omega := B(x, R)$ mit $R > 0$ so groß, dass $\text{supp}(f) \subseteq \Omega$. Dann verschwinden f und $\partial_\nu f$ auf $\partial\Omega$ und die Greensche Darstellungsformel (Satz 2.13) zeigt:

$$f(x) = \int_{\Omega} E(x - y) \Delta f(y) dy = \int_{\mathbb{R}^d} E(x - y) \Delta f(y) dy = (E * \Delta f)(x) = (\Delta f * E)(x).$$

Aber aus Satz 1.16 folgt, dass $(\Delta f) * E = \Delta(f * E) = \Delta V$. □

Bemerkung 2.23. In der Übung werden Sie zeigen, dass das Newton-Potential V_f im Falle $f \in C_c^2(\mathbb{R}^d)$, $d \geq 3$, die einzige Lösung von $\Delta u = f$ auf \mathbb{R}^d ist, die im Unendlichen verschwindet (man vergleiche dazu auch Bemerkung 2.6 (iii)).

Schauen wir uns nun den Fall an, dass Ω eine beschränkte Teilmenge von \mathbb{R}^d ist. Hierzu bezeichnen wir im nachfolgenden Satz die Einschränkung des Newton-Potentials auf eine Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}^d$ weiterhin mit V (statt dem korrekten aber umständlicheren $V|_U$).

Satz 2.24. Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ offen und beschränkt und $f \in l^\infty(\Omega)$. Setzen wir f durch 0 zu einer Funktion $f \in l_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ fort, ist das Newton-Potential

$$V_f(x) := \int_{\Omega} E(x-y)f(y) dy = \int_{\mathbb{R}^d} E(x-y)f(y) dy = (E * f)(x)$$

nach Proposition 1.15 für alle $x \in \mathbb{R}^d$ definiert. Ferner gilt:

- (i) $V \in C(\mathbb{R}^d)$.
- (ii) $V \in h(\mathbb{R}^d \setminus \overline{\Omega})$.
- (iii) Ist $f \in C^k(\Omega)$, $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, so gilt $V \in C^k(\Omega)$.
- (iv) Ist $f \in C^2(\Omega)$, so ist V eine Lösung der Poisson-Gleichung $\Delta V = f$ auf Ω .

Man beachte, dass man im Beweis des Satzes die Resultate aus Satz 1.16 über die Differenzierbarkeit von Faltungen **nicht** direkt anwenden kann (warum?). Allerdings werden wir den Beweis indirekt auf diese Resultate zurückführen.

Beweis. (i) Es seien $p \in \mathbb{R}^d$ und $x \in B(p, \delta)$ für $\delta > 0$. Dann gilt

$$|V(x) - V(p)| = \left| \int_{\Omega} [E(x-y) - E(p-y)]f(y) dy \right| \leq \|f\|_{\infty} \int_{\Omega} |E(x-y) - E(p-y)| dy.$$

Es genügt also zu zeigen, dass das Integral auf der rechten Seite für $x \rightarrow p$ gegen 0 geht. Dazu teilen wir auf: $\int_{\Omega} = \int_{\Omega \cap B(p, 2\delta)} + \int_{\Omega \setminus B(p, 2\delta)}$. Zunächst gilt wegen $B(p, 2\delta) \subseteq B(x, 3\delta)$, dass

$$\begin{aligned} \int_{\Omega \cap B(p, 2\delta)} |E(x-y) - E(p-y)| dy &\leq \int_{B(x, 3\delta)} |E(x-y)| dy + \int_{B(p, 2\delta)} |E(p-y)| dy \\ &= \int_{B(0, 3\delta)} |E(z)| dz + \int_{B(0, 2\delta)} |E(z)| dz \end{aligned}$$

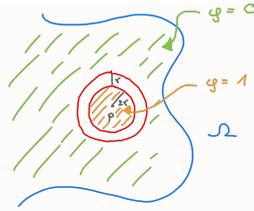
und hier geht die rechte Seite für $\delta \rightarrow 0$ gegen 0, da E lokal integrierbar ist. Schließlich gilt auch

$$\lim_{x \rightarrow p} \int_{\Omega \setminus B(p, 2\delta)} |E(x-y) - E(p-y)| dy = 0,$$

denn die Funktion $(x, y) \mapsto E(x-y)$ ist gleichmäßig stetig auf $B[p, \delta] \times \overline{\Omega} \setminus B(p, 2\delta)$ (stetige Funktion auf kompaktem Definitionsbereich), d.h. $E(x-y) - E(p-y) \rightarrow 0$ für $x \rightarrow p$ gleichmäßig in $y \in \overline{\Omega} \setminus B(p, 2\delta)$.

(ii) Da für jedes $y \in \Omega$ die Funktion $\mathbb{R}^d \setminus \overline{\Omega} \ni x \mapsto E(x-y)f(y)$ harmonisch ist, kann man genauso argumentieren wie im Beweis zu Korollar 2.14.

(iii-iv) Wir nehmen an, dass $f \in C^k(\Omega)$, $k \geq 1$. Sei $p \in \Omega$ beliebig und $r > 0$ mit $B(p, 4r) \subseteq \Omega$. Wir wollen zunächst zeigen, dass V auf $B(p, r)$ auch k -mal stetig differenzierbar ist. Zu diesem Zweck wählen wir $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ mit $1 \geq \varphi \geq 0$, $\varphi(x) = 1$ für alle $x \in B(p, 2r)$ und $\varphi(x) = 0$ für $x \in \mathbb{R}^d \setminus B(p, 3r)$.¹⁴



Wir schreiben nun $V = V_1 + V_2$ mit

$$V_1(x) := \int_{\Omega} E(x-y)(\varphi f)(y) dy, \quad V_2(x) := \int_{\Omega} E(x-y)((1-\varphi)f)(y) dy, \quad x \in \mathbb{R}^d.$$

Betrachten wir zunächst V_2 : Da $1 - \varphi$ in $B(p, 2r)$ verschwindet, gilt

$$V_2(x) = \int_{\Omega \setminus B(p, 2r)} E(x-y)((1-\varphi)f)(y) dy, \quad x \in \mathbb{R}^d.$$

Wir können V_2 also als das Newton-Potential zur Funktion $(1-\varphi)f|_{\Omega \setminus B(p, 2r)}$ betrachten. Nach Teil (ii) ist diese Funktion harmonisch, also glatt, in $B(p, r)$.

Betrachten wir nun V_1 : Da φf außerhalb von $B(p, 3r) \subseteq \Omega$ verschwindet, können wir diese Funktion durch 0 zu einer Funktion in $C_c^k(\mathbb{R}^d)$ fortsetzen. Mit Lemma 2.22 folgt dann $V_1 \in C^k(\mathbb{R}^d)$ und somit ist $V = V_1 + V_2$ damit k -mal stetig differenzierbar auf $B(p, r)$.

Ist schließlich $f \in C^2(\Omega)$, so zeigt Lemma 2.22 auch, dass $\Delta V_1 = \varphi f$, d.h.

$$(\Delta V)(p) = \Delta V_1(p) + \Delta V_2(p) = \Delta V_1(p) = (\varphi f)(p) = \varphi(p)f(p) = f(p).$$

□

Bemerkung 2.25. (i) Unser Beweis zeigt, dass das Newton-Potential V_f eine Lösung der Poisson-Gleichung $\Delta u = f$ ist, falls $f \in C^2(\Omega)$. Mit mehr Aufwand kann man sogar zeigen, dass es genügt, dass f Hölder-stetig auf Ω ist, siehe [10, Theorem 5.19]. Allerdings ist das Newton-Potential im Falle eines nur stetigen $f \in C(\Omega)$ im Allgemeinen keine Lösung der Poisson-Gleichung mehr. Mehr noch, man kann zeigen, dass die Poisson-Gleichung in diesem Fall gar keine klassischen Lösungen besitzen muss, siehe [10, Example 5.3]

(ii) Der Satz zeigt, dass das Newton-Potential $V = V_f$ als Lösung der Poisson-Gleichung $\Delta u = f$ stets die gleichen Differenzierbarkeitseigenschaften wie die Funktion f besitzt. Tatsächlich gilt dies auch für jede andere Lösung u . Denn dann unterscheiden sich u und V um die harmonische (also glatte) Funktion $u - V$. Ist insbesondere $f \in C^\infty(\Omega)$, so gilt das gleiche für jede Lösung u von $\Delta u = f$. Wie wir im Kontext von harmonischen Funktionen schon bemerkten, ist dies eine spezielle Eigenschaft des Laplace-Operators, die man **Hypoelliptizität** nennt.

—Ende VL 8—

2.4. Der Satz von Perron

Wir wollen nun noch die in Bemerkung 2.8 gestellte Aufgabe 2 so allgemein wie möglich lösen. Es geht also um die Frage, ob das Dirichlet-Problem für die Laplace-Gleichung, d.h.

$$\Delta u = 0 \text{ auf } \Omega \quad \text{und} \quad u = g \text{ auf } \partial\Omega$$

für $g \in C(\partial\Omega)$ stets eine klassische Lösung $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ besitzt. Im vorletzten Abschnitt haben wir gesehen, dass dies im Falle der Kugel $\Omega = B(0, r)$ tatsächlich immer der Fall ist. Für allgemeines

Ω kann das Problem allerdings leider auch unlösbar sein.

Beispiel 2.26. Es sei $\Omega = B(0,1) \setminus \{0\} \subseteq \mathbb{R}^2$. Wir betrachten das Randwertproblem

$$\begin{aligned}\Delta u(x) &= 0 \text{ für } 0 < |x| < 1 \\ u(x) &= 0 \text{ für } |x| = 1 \\ u(0) &= 1\end{aligned}$$

und nehmen an es existiere eine Lösung $u \in C(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$. Aus den Übungen wissen wir, dass dann auch $u \circ T$ für jede Drehmatrix $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ harmonisch und damit ebenfalls eine Lösung des Randwertproblems ist (denn $\Delta(u \circ T) = (\Delta u) \circ T$). Aber nach Proposition 2.5 ist die Lösung eindeutig, d.h. es müsste $u = u \circ T$ für jedes solche T gelten. Dies ist nur möglich, wenn u radialsymmetrisch ist. Wiederum aus den Übungen kennen wir aber die Gestalt von radialsymmetrischen harmonischen Funktionen: es ist $u(x) = a + b \ln |x|$ für gewisse Konstanten $a, b \in \mathbb{R}$. Da u beschränkt ist, muss damit $b = 0$ gelten und u konstant sein. Damit können die Randbedingungen aber nicht erfüllt werden, d.h. unsere Annahme war falsch und das Randwertproblem ist nicht lösbar.

Es stellt sich heraus, dass die Struktur des Randes $\partial\Omega$ im Beispiel zur Unlösbarkeit des Dirichlet-Problems führt und ebenjenes für beschränkte offene Teilmengen $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ mit einem sogenannten **regulären Rand** $\partial\Omega$ immer lösbar ist, wie von Perron¹⁵ gezeigt wurde. Was genau „regulär“ hier bedeutet, werden wir erst weiter unten erklären (es sei aber schon erwähnt, dass dies zum Beispiel der Fall ist, falls Ω konvex ist oder einen C^2 -Rand besitzt.)

Satz 2.27 (von Perron). Es sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ offen und beschränkt und $\partial\Omega$ sei regulär. Ferner sei $g \in C(\partial\Omega)$. Dann besitzt das Dirichlet-Problem

$$(\star) \quad \Delta u = 0 \text{ auf } \Omega \quad \text{und} \quad u = g \text{ auf } \partial\Omega$$

eine eindeutige Lösung $u \in C(\overline{\Omega}) \cap C^\infty(\Omega)$.

Im restlichen Teil dieser Sektion wollen wir diesen Satz nun beweisen. Hierbei geht es nur um die Existenz einer Lösung, denn die Eindeutigkeit folgt wieder aus Proposition 2.5.

Beginnen wir dazu mit einem weiteren Blick auf das Maximumprinzip.

Lemma 2.28 (Harmonisches Dominieren). Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ offen und beschränkt. Ferner sei $u \in C(\overline{\Omega})$ harmonisch auf Ω und $v \in C(\overline{\Omega})$ subharmonisch auf Ω . Dann gilt die Implikation

$$v \leq u \text{ auf } \partial\Omega \quad \Rightarrow \quad v \leq u \text{ auf } \overline{\Omega}.$$

Beweis. Folgt sofort aus dem schwachen Maximumprinzip, Satz 1.25 (i), angewandt auf die subharmonische (warum?) Funktion $v - u$. \square

Nehmen wir nun einmal an, u_0 sei die gesuchte Lösung von (\star) . Dann gilt also für jede subharmonische Funktion $v \in C(\overline{\Omega})$ mit $v|_{\partial\Omega} \leq g (= u_0|_{\partial\Omega})$, dass

$$v \leq u_0 \text{ auf } \overline{\Omega}.$$

Aber auch u_0 selbst ist eine solche subharmonische Funktion. Sie wäre also, unter allen jenen subharmonischen Funktionen v , gewissermaßen die „größte“. Diese Beobachtung führt uns nun zu folgender Definition.

Definition 2.29. Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ offen und beschränkt und $g \in C(\partial\Omega)$. Dann heißt

$$S(g) := \{v \in C(\overline{\Omega}) : v \text{ ist subharmonisch auf } \Omega \text{ und } v|_{\partial\Omega} \leq g\},$$

die zu g zugehörige **Perron-Familie** und die Funktion $P(g) : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$, definiert durch

$$P(g)(x) := \sup_{v \in S(g)} v(x), \quad x \in \overline{\Omega},$$

der zugehörige **Perron-Kandidat**.

Bemerkung 2.30. (i) Aufgrund der obigen Diskussion wissen wir schon: Besitzt (\star) eine Lösung u_0 , so gilt $u_0 = P(g) = P(u_0|_{\partial\Omega})$.

(ii) Zur Definition sei noch Folgendes festgehalten:

- $S(g) \neq \emptyset$, denn die konstante Funktion mit Wert $\min_{\partial\Omega} g$ ist Element dieser Menge. Insbesondere ist daher $\min_{\partial\Omega} g \leq P(g)(x)$ für alle $x \in \overline{\Omega}$.
- Da für jedes $v \in S(g)$ und $x \in \overline{\Omega}$ auch $v(x) \leq \max_{\partial\Omega} g$ (wegen dem schwachen Maximumprinzip) folgt weiterhin

$$P(g)(x) \leq \max_{\partial\Omega} g, \quad x \in \overline{\Omega}.$$

Unser Ziel ist zu zeigen, dass der Perron-Kandidat $P(g)$ tatsächlich eine (dann die) Lösung von (\star) ist. Dazu werden wir folgendes Resultat mehrfach nutzen.

Lemma 2.31. Sei v subharmonisch auf Ω und $B[x_0, R] \subseteq \Omega$. Ferner sei $B := B(x_0, r)$.

(i) **Perron-Lösung auf Kugeln:** Die Funktion $P(v|_{\partial B}) : \overline{B} \rightarrow \mathbb{R}$ ist klassische Lösung von

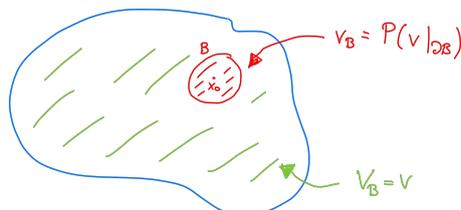
$$(\star\star) \quad \Delta u = 0 \text{ auf } B, \quad u|_{\partial B} = v|_{\partial B}.$$

(ii) **Harmonisches Anheben:** Es ist

$$v_B(x) := \begin{cases} v(x), & \text{falls } x \in \Omega \setminus \overline{B} \\ P(v|_{\partial B})(x), & \text{falls } x \in \overline{B} \end{cases}$$

wieder subharmonisch auf Ω und $v \leq v_B$.

(iii) Ist w subharmonisch auf Ω und $w \leq v$, so gilt $w_B \leq v_B$.



Beweis. (i) Wir wissen aus Satz 2.21, dass das Poisson-Problem $(\star\star)$ auf der Kugel B eindeutig lösbar ist (das dortige Resultat auf $B(0, R)$ überträgt sich sofort auf $B(x_0, R)$), d.h. die Behauptung folgt aus Bemerkung 2.30 (i).

(ii) Dass $v \leq v_B$ folgt sofort aus Lemma 2.28. Weiterhin ist klar, dass v_B stetig und auf B und $\Omega \setminus \overline{B}$ subharmonisch ist. Ist es auch in einer Umgebung von ∂B subharmonisch? Um dies zu

sehen sei $x \in \partial B$. Dann folgt aus der Subharmonizität von v , dass für $r > 0$ hinreichend klein

$$v_B(x) = v(x) \leq \int_{B(x,r)} v(y) dy \leq \int_{B(x,r)} v_B(y) dy.$$

(iii) Maximumprinzip und Teil (i). □

Nun können wir schon beweisen, dass $P(g)$ harmonisch in Ω ist.

Satz 2.32. $P(g)$ ist harmonisch in Ω .

Beweis. Es genügt zu zeigen, dass $P(g)$ auf jeder beliebigen Kugel $B := B(x_0, R) \subseteq \Omega$ harmonisch ist. Sei dazu (w_k) eine Folge in $S(g)$ mit $w_k(x_0) \rightarrow \sup_{w \in S(g)} w(x_0) = P(g)(x_0)$. Setzen wir, unter Verwendung der Notation von Lemma 2.31,

$$v_k := (\max(w_1, \dots, w_k))_B, \quad k \in \mathbb{N},$$

so ist auch (v_k) eine Folge in $S(g)$, jedes der v_k ist harmonisch auf B und es gilt

$$\forall x \in \Omega: \quad v_k(x) \leq v_{k+1}(x) \leq P(g)(x) \quad \text{und} \quad v_k(x_0) \nearrow P(g)(x_0).$$

Die Folge $(v_k(x))_{k \in \mathbb{N}}$ ist also monoton wachsend und nach oben beschränkt, d.h. $v(x) := \lim_{k \rightarrow \infty} v_k(x) \in \mathbb{R}$ existiert für alle $x \in \Omega$. Weiterhin folgt aus dem Harnackschen Prinzip (Korollar 1.30), dass die Konvergenz auf B lokal gleichmäßig und $v|_B$ harmonisch ist. Um den Beweis abzuschließen, zeigen wir nun noch, dass $P(g)|_B = v|_B$ (im Punkt $x = x_0$ gilt diese Gleichung, wie zuvor schon gesehen). Zunächst ist klar, dass $v|_B \leq P(g)|_B$. Für die umgekehrte Richtung $P(g)|_B \leq v|_B$ genügt es zu zeigen, dass $u|_B \leq v|_B$ für jedes beliebige $u \in S(g)$. Dazu setzen wir

$$u_k := (\max(u, v_k))_B \in S(g).$$

Beachte wieder, dass $u_k(x_0) \leq P(g)(x_0) = v(x_0)$ und dass u_k auf $B = B(x_0, R)$ harmonisch ist. Da auch v dort harmonisch ist, folgt für $0 < r < R$, dass

$$\int_{B(x_0,r)} v(y) dy = v(x_0) \geq u_k(x_0) = \int_{B(x_0,r)} u_k(y) dy \stackrel{\text{Lem.2.31(ii)}}{\geq} \int_{B(x_0,r)} \max(u, v_k)(y) dy.$$

Schicken wir $k \rightarrow \infty$, so folgt (da auch $\max(u, v_k) \rightarrow \max(u, v)$ lokal gleichmäßig auf B)

$$\int_{B(x_0,r)} v(y) dy \geq \int_{B(x_0,r)} \max(u, v)(y) dy.$$

Da $v \leq \max(u, v)$ und die beteiligten Funktionen stetig sind, hat dies $v = \max(u, v)$, also $v \geq u$, auf $B(x_0, r)$ zur Folge. Da $0 < r < R$ beliebig war, folgt $u \leq v$ auf $B = B(x_0, R)$, was zu zeigen war. □

Nun müssen wir uns noch um die Randwerte von $P(g)$ kümmern.

Definition 2.33. Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ offen und beschränkt und $x_0 \in \partial\Omega$. Dann heißt eine Funktion $w \in C(\overline{\Omega})$ eine **Barriere für Ω in x_0** , falls

- (i) w auf Ω subharmonisch ist, und (ii) $w(x_0) = 0$ und $w < 0$ auf $\overline{\Omega} \setminus \{x_0\}$.

Der Randpunkt x_0 heißt **regulär**, falls eine zugehörige Barriere existiert. Sind alle Randpunkte von Ω regulär, so nennen wir $\partial\Omega$ selbst regulär.

Der Begriff „Barriere“ erklärt sich am Besten durch folgendes Resultat.

Lemma 2.34. Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ offen und beschränkt und $x_0 \in \partial\Omega$ sei regulär mit Barriere w . Dann gilt:

$$\forall g \in C(\partial\Omega) \forall \varepsilon > 0 \exists \alpha > 0 \forall x \in \bar{\Omega} : |P(g)(x) - g(x_0)| \leq \varepsilon - \alpha w(x). \quad (\heartsuit)$$

Beweis. Wir verzichten aus Zeitgründen auf den Beweis, sie finden ihn aber im Anhang.¹⁶ \square

Damit können wir nun auch den Beweis des Satzes von Perron abschließen.

Satz 2.35. Falls $x_0 \in \partial\Omega$ regulär ist, so gilt $\lim_{x \rightarrow x_0, x \in \bar{\Omega}} P(g)(x) = g(x_0)$.

Beweis. Schicke in (\heartsuit) zunächst $x \rightarrow x_0$. Da w in x_0 stetig ist und $w(x_0) = 0$ gilt, folgt

$$0 \leq \limsup_{x \rightarrow x_0} |P(g)(x) - g(x_0)| \leq \varepsilon.$$

Da dies für alle $\varepsilon > 0$ gilt, folgt $\lim_{x \rightarrow x_0} P(g)(x) = g(x_0)$. \square

—Ende VL 9—

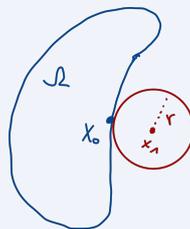
Bemerkung 2.36. Für $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ offen und beschränkt erhalten wir sogar eine stärkere Aussage als im Satz von Perron formuliert - nämlich die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

- (i) Für jedes $g \in C(\partial\Omega)$ besitzt das Dirichlet-Problem $\Delta u = 0$ auf Ω und $u = g$ auf $\partial\Omega$ eine klassische Lösung.
- (ii) $\partial\Omega$ ist regulär.

Für den Beweis von $(i) \Rightarrow (ii)$ beachte man nur noch, dass die Lösung des Dirichlet-Problems zu $g(x) := -|x - x_0|$ eine Barriere für Ω in $x_0 \in \partial\Omega$ ist.

Bleibt noch die Frage, **wann** ein Randpunkt regulär ist.

Beispiel 2.37. Ein Punkt $x_0 \in \partial\Omega$ erfüllt die **äußere Kugelbedingung**, falls eine Kugel $B(x_1, r)$ existiert, die $\bar{\Omega}$ nur im Punkt x_0 berührt, d.h. $B[x_1, r] \cap \bar{\Omega} = \{x_0\}$.¹⁷



In diesem Fall ist

$$w(x) := E(x_2 - x_1) - E(x - x_1) \Big|_{|x_2 - x_1| = r} \begin{cases} \frac{1}{(d-2)\sigma_{d-1}} \left(\frac{1}{|x - x_1|^{d-2}} - \frac{1}{r^{d-2}} \right), & \text{falls } d \geq 3 \\ \frac{1}{2\pi} (\ln |r| - \ln |x - x_1|), & \text{falls } d = 2 \end{cases}$$

eine Barriere für Ω in x_0 .

Nachdem wir die Aufgaben 1 und 2 aus Bemerkung 2.8 nun gelöst haben, können wir noch einmal auf das allgemeine Dirichlet-Problem für die Laplace-Gleichung zurückkommen.

Satz 2.38. Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ offen und beschränkt und $\partial\Omega$ sei regulär. Ferner sei $f \in C^2(\Omega)$ und $g \in C(\partial\Omega)$. Dann besitzt das Dirichlet-Problem

$$\Delta u = f \text{ auf } \Omega, \quad u = g \text{ auf } \partial\Omega$$

eine eindeutige klassische Lösung $u \in C(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$. Ist f sogar in $C^k(\Omega)$, $k \in \{2, 3, \dots, \infty\}$, so gilt auch $u \in C^k(\Omega)$.

Beweis. Sei $V_f \in C(\mathbb{R}^d) \cap C^k(\Omega)$ das Newton-Potential aus Satz 2.24 und $w \in C(\overline{\Omega}) \cap C^\infty(\Omega)$ die Lösung des Randwertproblems

$$\Delta w = 0 \text{ auf } \Omega, \quad w = g - V_f \text{ auf } \partial\Omega,$$

die wir aus Satz 2.27 erhalten. Dann ist $u = V_f + w$ die gesuchte Lösung, die nach Proposition 2.5 eindeutig ist. \square

3. Die Wärmeleitungsgleichung

Stichpunkte. Wärmeleitungsgleichung, Wärmeleitungsoperator, Cauchy-Problem, Beispiel von Tychonov, gemischtes Problem, parabolisches Maximumprinzip, Eindeutigkeit von Lösungen, Fourier-Transformation, Schwartz-Raum, Dirac-Familie, Fourier-Inversionssatz, Gauß-Kern, Duhamelsche Formel, Trennung der Variablen

In diesem Kapitel beschäftigen wir uns nun schließlich mit der allgemeinen **Wärmeleitungsgleichung**

$$\partial_t u - \Delta_x u = f$$

für eine gegebene stetige Funktion $f : \Omega \times (0, T) \rightarrow \mathbb{R}$, mit $0 < T \leq \infty$, und eine gesuchte Funktion $u : \Omega \times (0, T) \rightarrow \mathbb{R}$.¹ Unter Verwendung des linearen **Wärmeleitungsoperators**

$$W := \partial_t - \Delta_x$$

können wir die Wärmeleitungsgleichung kurz in der Form $Wu = f$ schreiben. Eine klassische Lösung dieser Gleichung (vergleiche Definition 0.1) ist eine Funktion $u \in C^2(\Omega \times (0, T))$ mit $(Wu)(x, t) = f(x, t)$ für alle $(x, t) \in \Omega \times (0, T)$.² Um eindeutige Lösungen zu erhalten, müssen wir allerdings noch weitere Bedingungen an die Lösungen stellen.

Definition 3.1. Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ offen, $0 < T \leq \infty$, $f \in C(\Omega \times (0, T))$ und $u_0 \in C(\Omega)$. Dann besteht das **Cauchy-Problem für die Wärmeleitungsgleichung zur Anfangsbedingung u_0** im Auffinden einer klassischen Lösung $u \in C^2(\Omega \times (0, T)) \cap C(\Omega \times [0, T])$, welche „zur Zeit“ $t = 0$ mit u_0 übereinstimmt, d.h. es soll gelten

$$\begin{aligned} Wu &= f \text{ in } \Omega \times (0, T) \\ u(x, 0) &= u_0(x) \text{ für alle } x \in \Omega. \end{aligned}$$

Beim Cauchy-Problem können wir u_0 zum Beispiel als eine gegebene Anfangstemperatur interpretieren. Dessen Vorgabe legt die Lösungen im Allgemeinen jedoch, selbst im Falle $\Omega = \mathbb{R}^d$, noch nicht eindeutig fest, wie das folgende Beispiel von Tychonov³ zeigt.

Beispiel 3.2 (von Tychonov). Wir betrachten das homogene Cauchy-Problem

$$\partial_t u - \Delta_x u = 0 \text{ in } \mathbb{R}^d \times (0, \infty), \quad u(x, 0) = 0 \text{ für } x \in \mathbb{R}^d.$$

Dieses besitzt neben der trivialen Lösung $u = 0$ noch unendlich viele weitere Lösungen. Dies sieht man so: Ist $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$, so zeigt eine formale Rechnung (mit Vertauschen von Ableitung und Reihe, und unter der Annahme der Konvergenz der Reihe), dass die Funktion

$$u(x, t) = u(x_1, \dots, x_d, t) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varphi^{(k)}(t)}{(2k)!} x_1^{2k}.$$

eine Lösung von $Wu = 0$ ist. Damit auch die Anfangsbedingung erfüllt ist, muss dann nur noch

$\varphi^{(k)}(0) = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$ gelten. Dies ist für ein beliebiges $a > 1$ zum Beispiel für die Wahl

$$\varphi(t) := \begin{cases} e^{-\frac{1}{t^a}}, & \text{falls } t > 0 \\ 0, & \text{falls } t \leq 0, \end{cases}$$

mit $a > 1$ erfüllt. Weiterhin lässt sich zeigen (Übung), dass sich mit dieser Wahl die obige formale Rechnung tatsächlich rechtfertigen lässt. Insbesondere hat das Cauchy-Problem also unendlich viele Lösungen (verschiedene a führen zu verschiedenen Lösungen).

Übung

Bemerkung 3.3. Wir werden sehen, dass man im Falle $\Omega = \mathbb{R}^d$ eine eindeutige Lösung des Cauchy-Problems erhalten kann, wenn man Anforderungen an das Verhalten der Lösungen bei ∞ stellt. Im Falle $\Omega \subsetneq \mathbb{R}^d$ müssen darüber hinaus die Randwerte der Lösungen vorgegeben werden (beides analog zu unserem Vorgehen bei der Poisson-Gleichung). Auch aus physikalischer Sicht macht es Sinn, neben der Anfangstemperatur auch die Temperaturverteilung auf dem Rand $\partial\Omega$ vorzugeben, also etwa zu fordern, dass

$$u(x, t) = u_R(x, t), \quad x \in \partial\Omega, \quad t \in (0, T),$$

für eine gegebene Funktion $u_R : \partial\Omega \times (0, T) \rightarrow \mathbb{R}$. Man nennt dies die Vorgabe von **Dirichlet-Randbedingungen** (man vergleiche Definition 2.2).⁴

Ob die Vorgabe von solchen Rand- und Anfangswerten tatsächlich zu eindeutigen Lösungen führt, werden wir im nächsten Abschnitt nun genauer untersuchen.

3.1. Maximumprinzip und Eindeutigkeit

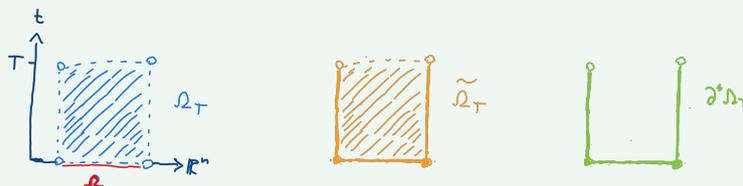
Um die Anfangs- und Randwerte gemeinsam handhaben zu können, führen wir zunächst ein paar Begriffe ein.

Definition 3.4. Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ offen und $0 < T \leq \infty$.

(i) Wir setzen $\Omega_T := \Omega \times (0, T)$ und $\tilde{\Omega}_T := \bar{\Omega} \times [0, T)$. Ferner nennen wir

$$\partial^*\Omega_T := (\Omega \times \{0\}) \cup (\partial\Omega \times [0, T))$$

den **parabolischen**⁵ **Rand** von Ω_T .



(ii) Sei $f \in C(\Omega_T)$ und $g \in C(\partial^*\Omega_T)$. Das zugehörige **gemischte Rand- und Anfangswertproblem für die Wärmeleitungsgleichung** besteht dann im Auffinden einer Lösung $u \in C^2(\Omega_T) \cap C(\tilde{\Omega}_T)$ mit

$$\begin{aligned} Wu &= f \text{ in } \Omega_T \\ u &= g \text{ auf } \partial^*\Omega_T. \end{aligned}$$

Bemerkung 3.5. (i) Man beachte, dass

$$u = g \text{ auf } \partial^* \Omega_T \Leftrightarrow \begin{cases} u(x, 0) = g(x, 0) (\hat{=} u_0(x)), & \text{falls } x \in \Omega \\ u(z, t) = g(z, t) (\hat{=} u_R(z, t)), & \text{falls } z \in \partial\Omega, t \in [0, T]. \end{cases}$$

Insbesondere sichert die Stetigkeit von g die **Konsistenz** von Anfangs- und Randbedingung, d.h. es gilt

$$\forall z \in \partial\Omega : \lim_{x \rightarrow z} u_0(x) = \lim_{t \searrow 0} u_R(z, t).$$

(ii) Ist $\Omega = \mathbb{R}^d$, so ist $\partial\Omega = \emptyset$ und damit gilt $\partial^* \Omega_T = \Omega \times \{0\}$ und

$$u = g \text{ auf } \partial^* \Omega_T \Leftrightarrow u(x, 0) = g(x, 0) \text{ falls } x \in \Omega.$$

In diesem Fall ist das gemischte Problem also einfach das Cauchy-Problem zum Anfangswert g . Weiterhin ist in diesem Fall $\tilde{\Omega}_T = \mathbb{R}^d \times [0, T)$.

Wir wollen nun über die Eindeutigkeit von Lösungen des gemischten Problems sprechen. Wie im Falle der Poisson-Gleichung erhalten wir dieses mit Hilfe eines Maximumprinzips.

Satz 3.6 (Parabolisches Maximumprinzip). Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ offen und $0 < T \leq \infty$. Ferner sei $u \in C^2(\Omega_T) \cap C(\tilde{\Omega}_T)$ und

$$Wu \leq 0 \text{ in } \Omega_T.$$

Ist dann (a) Ω beschränkt oder (b) u beschränkt auf $\tilde{\Omega}_T$, so gilt

$$\sup_{(x,t) \in \tilde{\Omega}_T} u(x, t) = \sup_{(x,t) \in \partial^* \Omega_T} u(x, t).$$

Dieser Satz ist das Analogon für das schwache Maximumprinzip für subharmonische Funktionen (Satz 1.25). Auch im vorliegenden Fall ließe sich ein starkes Maximumprinzip beweisen, wir verzichten aber aus Zeitgründen darauf.⁶

Beweis. (a) Sei Ω beschränkt.

In diesem Fall ist für $0 < S < T$ beliebig die Menge $\overline{\Omega_S}$ kompakt und es genügt zu zeigen, dass für jedes solche S

$$(*) \quad \max_{(x,t) \in \overline{\Omega_S}} u(x, t) = \max_{(x,t) \in \partial\Omega_S \setminus (\Omega \times \{S\})} u(x, t).$$

Denn dann erhalten wir für $S \nearrow T$ die Behauptung.



Im Folgenden sei also ein solches S fixiert und wir betrachten u auf $\overline{\Omega_S} = \overline{\Omega} \times [0, S]$ (schreiben aber einfach u statt $u|_{\overline{\Omega_S}}$). Nach Voraussetzung gilt

$$Wu = \partial_t u - \Delta_x u \leq 0 \text{ in } \Omega \times (0, S] \subseteq \Omega_T.$$

Wir unterscheiden nun zwei Fälle.

1. Fall: Es gilt $Wu < 0$ in $\Omega \times (0, S]$.

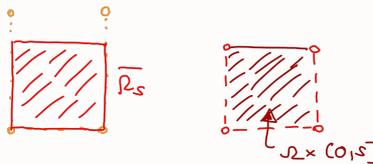
Sei (x_0, t_0) eine Maximalstelle von u in der kompakten Menge $\overline{\Omega_S}$. Nehmen wir zunächst an, dass $(x_0, t_0) \in \Omega \times (0, S]$. Dann nimmt die Funktion $\overline{\Omega} \ni x \mapsto u(x, t_0)$ bei $x = x_0 \in \Omega$ ein Maximum an, d.h. unter Beachtung der zugehörigen Richtungsfunktionen folgern wir, dass

$$\partial_{x_j}^2 u(x_0, t_0) \leq 0 \quad (j = 1, \dots, d),$$

und somit $\Delta_x u(x_0, t_0) \leq 0$. Andererseits nimmt auch $(0, S] \ni t \mapsto u(x_0, t)$ in $t_0 \in (0, S]$ ein Maximum an, d.h. es gilt $\partial_t u(x_0, t_0) \geq 0$ (nur im Falle $t_0 = S$ kann hier „>“ gelten). Insgesamt folgt also

$$Wu(x_0, t_0) = (\partial_t u - \Delta_x u)(x_0, t_0) \geq 0,$$

im Widerspruch zu unserer Annahme. Also muss $(x_0, t_0) \in \partial\Omega_S \setminus (\Omega \times \{S\}) = \overline{\Omega_S} \setminus (\Omega \times (0, S])$ gelten und (\star) ist gezeigt.



2. Fall: Im allgemeinen Fall sei $u_\varepsilon(x, t) := u(x, t) - \varepsilon t$ für $\varepsilon > 0$. Dann gilt

$$Wu_\varepsilon = \partial_t u_\varepsilon - \Delta_x u_\varepsilon = (\partial_t u - \Delta_x u) - \varepsilon < 0 \quad \text{in } \Omega \times (0, S].$$

Der 1. Fall zeigt also, dass

$$\max_{(x,t) \in \overline{\Omega_S}} u_\varepsilon(x, t) = \max_{(x,t) \in \partial\Omega_S \setminus (\Omega \times \{S\})} u_\varepsilon(x, t).$$

Da u_ε auf den beteiligten Mengen für $\varepsilon \rightarrow 0$ gleichmäßig gegen u konvergiert, ist (\star) gezeigt.

(b) Den Beweis im Falle, dass zwar Ω unbeschränkt, aber u eine beschränkte Funktion ist, lassen wir aus Zeitgründen aus. Sie finden ihn aber im Anhang.⁷ □

Aus dem parabolischen Maximumprinzip erhalten wir sofort die Eindeutigkeit der Lösungen des gemischten Problems. Hierbei setzen wir

$$C_b(\Omega) := C(\Omega) \cap l^\infty(\Omega)$$

für die beschränkten stetigen reellwertigen Funktionen auf Ω .

Korollar 3.7. Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ offen und $0 < T \leq \infty$. Ferner sei $f \in C(\Omega_T)$ und $g \in C(\partial^* \Omega_T)$. Dann hat das gemischte Problem $Wu = f$ in Ω_T und $u = g$ auf $\partial^* \Omega_T$

- (a) höchstens eine klassische Lösung $u \in C^2(\Omega_T) \cap C(\tilde{\Omega}_T)$, falls Ω beschränkt ist, und
- (b) höchstens eine beschränkte klassische Lösung $u \in C^2(\Omega_T) \cap C_b(\tilde{\Omega}_T)$, falls Ω unbeschränkt ist.

Beweis. Sind u_1, u_2 jeweils zwei solche Lösungen, so können wir das parabolische Maximumprinzip auf $\pm u$ mit $u := u_1 - u_2$ anwenden. Da u auf $\partial^* \Omega_T$ verschwindet, folgt $\pm u \leq 0$ auf $\tilde{\Omega}_T$, d.h. $u = 0$ bzw. $u_1 = u_2$ auf $\tilde{\Omega}_T$. □

Bemerkung 3.8. (i) Wie im Falle der Poisson-Gleichung folgt aus dem parabolischen Maximumprinzip auch die Stabilität des gemischten Problems für die Wärmeleitungsgleichung (vergleiche Proposition 2.5 und die darauf folgende Bemerkung). Hierauf werden wir vermutlich noch einmal in der Übung eingehen.

(ii) Die Eindeutigkeit in (b) bleibt erhalten, wenn man Lösungen betrachtet, die eine Wachstumsbeschränkung der Form $|u(x, t)| \leq Me^{\lambda|x|^2}$ für gewisse $M, \lambda \geq 0$ und alle $(x, t) \in \tilde{\Omega}_T$ erfüllen. Ohne Wachstumsbeschränkungen sind Lösungen nicht eindeutig, wie das Beispiel von Tychonov zeigt.

Als nächstes wollen wir uns nun mit der Existenz von Lösungen der Wärmeleitungsgleichung (und der zugehörigen Rand- und Anfangswertprobleme) beschäftigen. Als Vorbereitung hierzu müssen wir allerdings zunächst einen Blick auf die sogenannte **Fourier-Transformation**⁸ werfen. Diese spielt bei der Untersuchung von partiellen Differentialgleichungen deswegen eine wichtige Rolle, weil sie Ableitungen in Multiplikationen umwandelt (und umgekehrt).

3.2. Einschub: Die Fourier-Transformation

Vereinbarung 3.9. In diesem Abschnitt ist es zweckmäßig, auch komplexwertige Funktionen $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$ zu betrachten. Entsprechend stehe in diesem Abschnitt, und **nur in diesem Abschnitt**, $C(\mathbb{R}^d)$ für die stetigen Funktionen $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$, $\mathcal{L}_1(\mathbb{R}^d)$ für die integrierbaren Funktionen $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$, usw.

Weiterhin macht es in diesem Abschnitt oft Sinn, statt integrierbaren Funktionen aus $\mathcal{L}_1(\mathbb{R}^d)$ die zugehörigen Äquivalenzklassen (von λ^d -fast sicher übereinstimmenden Funktionen) aus $L_1(\mathbb{R}^d)$ zu betrachten. Wir sprechen aber weiter, wie üblich, von der „Funktion“ $f \in L_1(\mathbb{R}^d)$.

Definition 3.10. Es sei $i \in \mathbb{C}$ die imaginäre Einheit. Die **Fourier-Transformation** von $f \in L_1(\mathbb{R}^d)$ ist definiert als

$$(\mathcal{F}f)(\xi) := \hat{f}(\xi) := \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-i\langle x, \xi \rangle} f(x) dx, \quad \xi \in \mathbb{R}^d.^9$$

Bemerkung 3.11. Offensichtlich ist \hat{f} (wohl-)definiert und $|\hat{f}(\xi)| \leq (2\pi)^{-d/2} \|f\|_1$ für $\xi \in \mathbb{R}^d$. Damit gilt $\|\hat{f}\|_\infty \leq (2\pi)^{-d/2} \|f\|_1$, d.h. der **lineare Operator**

$$\mathcal{F} : (L_1(\mathbb{R}^d), \|\cdot\|_1) \rightarrow (L_\infty(\mathbb{R}^d), \|\cdot\|_\infty), \quad f \mapsto \mathcal{F}(f) = \hat{f}$$

ist auch **stetig**.

Im folgenden Resultat geben wir einige **elementare** Eigenschaften der Fourier-Transformation an.

Proposition 3.12. (a) Seien $f, g \in L_1(\mathbb{R}^d)$.

(i) Es ist $\hat{f} : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$ stetig, d.h. $\hat{f} \in C_b(\mathbb{R}^d)$.

(ii) Es gilt $\int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(x)g(x) dx = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\hat{g}(x) dx$.

(iii) **Streckungen:** Sei $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $(\sigma_\lambda f)(x) := f(\lambda x), x \in \mathbb{R}^d$. Dann gilt

$$\widehat{(\sigma_\lambda f)}(\xi) = |\lambda|^{-d} \hat{f}(\lambda^{-1}\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}^d.$$

(iv) **Translationen:** Sei $a \in \mathbb{R}^d$ und $(\tau_a f)(x) := f(x + a), x \in \mathbb{R}^d$. Dann gilt

$$\widehat{(\tau_a f)}(\xi) = e^{i\langle a, \xi \rangle} \hat{f}(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}^d.$$

(b) Sei $1 \leq k \leq d$.

(i) Es sei $f \in C^1(\mathbb{R}^d) \cap L_1(\mathbb{R}^d)$ und es gelte $\lim_{|x| \rightarrow \infty} f(x) = 0$ und $\partial_k f \in L_1(\mathbb{R}^d)$. Dann gilt

$$\widehat{(\partial_k f)}(\xi) = i \cdot \xi_k \cdot \widehat{f}(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}^d.$$

(ii) Es sei $f \in L_1(\mathbb{R}^d)$ und auch die Abbildung $x_k f : \mathbb{R}^d \ni x \mapsto x_k \cdot f(x)$ sei integrierbar. Dann existiert die partielle Ableitung $\partial_k \widehat{f}$ und es gilt

$$\widehat{(x_k f)}(\xi) = i \cdot \partial_k \widehat{f}(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}^d.$$

Beweis. (a) Teil (i) folgt mit dominierter Konvergenz, Teil (ii) mit dem Satz von Fubini und die Teile (iii) und (iv) mit Substitution.

(b) Wir führen den Beweis jeweils für den Fall $k = 1$.

(i) Schreiben wir $x = (x_1, x') \in \mathbb{R}^d = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{d-1}$, so folgt mit dem Satz von Fubini, dass

$$\begin{aligned} (2\pi)^{d/2} \widehat{(\partial_1 f)}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^d} e^{-i\langle x, \xi \rangle} \partial_1 f(x) \, dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^{d-1}} e^{-i\langle x', \xi' \rangle} \cdot \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix_1 \xi_1} \partial_1 f(x_1, x') \, dx_1 \right) \, dx'. \quad (\star) \end{aligned}$$

Weiterhin zeigt partielle Integration, dass

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix_1 \xi_1} \cdot \partial_1 f(x_1, x') \, dx_1 &= \underbrace{\lim_{R \rightarrow \infty} e^{-ix_1 \xi_1} f(x_1, x') \Big|_{x_1=-R}^R}_{=0, \text{ da } f(x) \rightarrow 0 \text{ für } |x| \rightarrow \infty} - \int_{-\infty}^{\infty} \partial_{x_1} (e^{-ix_1 \xi_1}) f(x_1, x') \, dx_1 \\ &= i \cdot \xi_1 \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix_1 \xi_1} f(x_1, x') \, dx_1. \quad (\star\star) \end{aligned}$$

Setzen wir $(\star\star)$ wieder in (\star) ein und wenden noch einmal Fubini an, folgt die Behauptung.

(ii) Es gilt $|\partial_{\xi_1} e^{-i\langle x, \xi \rangle} f(x)| = |x_1 f(x)|$. Da dies nach Annahme eine integrierbare Funktion ist, zeigt der Satz über Parameterintegrale (Satz A.2.1), dass $\partial_1 \widehat{f}$ existiert und dass

$$\partial_1 \widehat{f}(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} \partial_{\xi_1} e^{-i\langle x, \xi \rangle} f(x) \, dx = -i \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-i\langle x, \xi \rangle} x_1 f(x) \, dx = -i \widehat{(x_1 f)}(\xi).$$

□

Im folgenden Lemma betrachten wir die Fourier-Transformation der **Gauß-Funktionen** (Gaußsche Glockenkurven). Es stellt sich heraus, dass auch die Fourier-Transformierte einer Gauß-Funktion wieder eine (skalierte) Gauß-Funktion ist. Dies wird für uns später noch sehr wichtig werden.

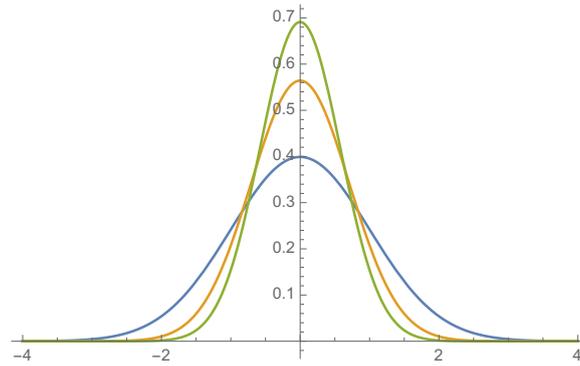
Lemma 3.13. Für $t > 0$ sei

$$g_t(x) := \frac{1}{(2\pi t)^{d/2}} \exp\left(-\frac{|x|^2}{2t}\right), \quad x \in \mathbb{R}^d.$$

Dann gilt

$$\widehat{g}_t(\xi) = g_1(t^{1/2}\xi) = t^{-d/2} g_{\frac{1}{t}}(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}^d.$$

Insbesondere ist $\widehat{\widehat{g}}_t = g_t$ und $\widehat{\widehat{g}}_1 = g_1$.



Der Graph von g_t im Falle $d = 1$ für verschiedene Werte von t (je kleiner t , desto schmaler und höher der Graph).

Beweis (des Lemmas). Wir teilen den Beweis in drei Schritte auf.

1. Schritt: Wir betrachten zunächst den Fall $d = 1$ und $t = 1$, fragen also nach der Fourier-Transformation von $h(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$, $x \in \mathbb{R}$. Wegen $h'(x) = -xh(x)$ folgt hier mit Proposition 3.12, Teil (b), dass

$$i \cdot \xi \cdot \hat{h}(\xi) \stackrel{(b)}{=} \widehat{(h')}(\xi) = -\widehat{(xh)}(\xi) \stackrel{(b)}{=} -i \cdot (\hat{h})'(\xi),$$

also $(\hat{h})'(\xi) = -\xi \cdot \hat{h}(\xi)$. Diese gewöhnliche Differentialgleichung hat die Lösung

$$\hat{h}(\xi) = \hat{h}(0) \cdot e^{-\xi^2/2} = \sqrt{2\pi} \cdot \hat{h}(0) \cdot h(\xi).$$

Wegen $\sqrt{2\pi} \hat{h}(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2/2} dx = 1$ folgt $\hat{h} = h$.

2. Schritt: Im Falle $d \geq 1$ und $t = 1$ schreiben wir

$$g_1(x) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} e^{-|x|^2/2} = \prod_{k=1}^d \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x_k)^2}{2}} = \prod_{k=1}^d h(x_k), \quad x = (x_1, \dots, x_d).$$

Mit dem Satz von Fubini und Schritt 1 sehen wir daher, dass

$$\hat{g}_1(x) = \prod_{k=1}^d \hat{h}(x_k) = \prod_{k=1}^d h(x_k) = g_1(x).$$

3. Schritt: Im allgemeinen Fall beachten wir, dass $g_t(x) = t^{-d/2} g_1(t^{-1/2}x)$, d.h. Proposition 3.12, Teil (a), und Schritt 1 zeigen, dass

$$\hat{g}_t(\xi) \stackrel{(a)}{=} t^{-d/2} \left(t^{d/2} \hat{g}_1(t^{1/2}\xi) \right) \stackrel{1.}{=} g_1(t^{1/2}\xi) = t^{-d/2} g_{1/t}(\xi).$$

□

Kommen wir nun wieder auf partielle Differentialoperatoren zu sprechen. Wir betrachten einen solchen $L = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha \partial^\alpha$ mit konstanten Koeffizienten $a_\alpha \in \mathbb{R}$ (vergleiche Definition 0.1). Mit dem Polynom

$$P(x) := \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha x^\alpha := \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha \cdot x_1^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot x_d^{\alpha_d}, \quad x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d,$$

können wir L dann formal schreiben als $L = P(\partial)$. Unter Verwendung von Teil (b) von Proposition 3.12 erhalten wir nun sofort folgendes Resultat.

Korollar 3.14. Ist $u \in C^m(\mathbb{R}^d)$ hinreichend „schön“ (z.B. $u \in C_c^m(\mathbb{R}^d)$ bzw. $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, siehe unten), so gilt

$$(\widehat{P(\partial)u})(\xi) = P(i\xi)\hat{u}(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}^d.$$

In diesem Fall nennt man $p : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$, $p(\xi) := P(i\xi)$ das **Symbol** des Differentialoperators $P(\partial)$.

Beweis. Unter Verwendung der Linearität von \mathcal{F} zeigt mehrmaliges Anwenden von Proposition 3.12, Teil (b), dass

$$(\widehat{P(\partial)u})(\xi) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha \widehat{\partial^\alpha u}(\xi) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha (i\xi)^\alpha \hat{u}(\xi) = P(i\xi)\hat{u}(\xi).$$

□

Für die Fourier-Transformierte der Lösung u von $P(\partial)u = f$ erhalten wir also, zumindest formal, dass

$$(\mathcal{F}u)(\xi) = \hat{u}(\xi) \stackrel{!}{=} \frac{\hat{f}(\xi)}{P(i\xi)} = \frac{\hat{f}(\xi)}{p(\xi)}.$$

Könnten wir hieraus wieder u bestimmen, die Abbildung \mathcal{F} also umkehren, erhielten wir einen Kandidaten für die Lösung u !

Beispiel 3.15. Für den Laplace-Operator Δ auf \mathbb{R}^d gilt $\Delta = P(\partial_1, \dots, \partial_d)$ mit

$$P(x) = x_1^2 + \dots + x_d^2 = |x|^2 \quad \text{und Symbol} \quad p(\xi) = P(i\xi) = -(\xi_1^2 + \dots + \xi_d^2) = -|\xi|^2.$$

Die Poisson-Gleichung $\Delta u = f$, für z.B. $f \in C_c^2(\mathbb{R}^d)$, führt zu

$$\hat{u}(\xi) = -|\xi|^{-2} \hat{f}(\xi), \quad \xi \neq 0.$$

In diesem Fall wissen wir schon, dass u selbst durch $u = E * f$ gegeben ist (siehe Lemma 2.22).

Um die Fourier-Transformation \mathcal{F} umzukehren, führen wir nun einen Teilraum von L_1 ein, auf dem \mathcal{F} bijektiv ist. Für L_1 selbst ist dies sicher nicht der Fall, denn die Fourier-Transformierte \hat{f} einer L_1 -Funktion muss nicht integrierbar sein.¹⁰

—Ende VL 11—

Definition 3.16. Der **Schwartz-Raum**¹¹ der **schnell fallenden Funktionen** ist definiert als

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^d) := \{f \in C^\infty(\mathbb{R}^d) \mid \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^d : \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |x^\alpha (\partial^\beta f)(x)| < \infty\}.$$

Die schnell fallenden Funktionen gehen also, genauso wie ihre Ableitungen, für $|x| \rightarrow \infty$ schneller gegen 0 als jedes Polynom.

Bemerkung 3.17. Folgende Eigenschaften sind leicht zu überprüfen (zum Teil in der Übung):

Übung

- (i) $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ ist ein \mathbb{C} -Vektorraum.
- (ii) Es gilt $C_c^\infty(\mathbb{R}^d) \subseteq \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \subseteq L_p(\mathbb{R}^d)$ für alle $p \geq 1$.
- (iii) Für die Gauß-Funktionen aus Lemma 3.13 gilt $g_t \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \setminus C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$.
- (iv) Für $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ und $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$ gilt $f \cdot g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ und $\partial^\alpha f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.
- (v) Ist $p \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_d]$ ein Polynom und $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, so gilt auch $p \cdot f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.

Proposition 3.18. Sei $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Dann ist auch $\hat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ und für $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^d$ und $\xi \in \mathbb{R}^d$ gilt:

$$(i) \widehat{(\partial^\alpha f)}(\xi) = (i\xi)^\alpha \hat{f}(\xi) = i^{|\alpha|} \xi^\alpha \hat{f}(\xi).$$

$$(ii) \widehat{(x^\beta f)}(\xi) = i^{|\beta|} (\partial^\beta \hat{f})(\xi).$$

Beweis. Unter Verwendung von Bemerkung 3.17 folgen die Formeln (i) und (ii) sofort per Induktion aus Proposition 3.12, Teil (b). Weiterhin wissen wir, dass die Fourier-Transformierte einer L_1 -Funktion beschränkt ist. Aber damit ist für jedes $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^d$ und $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ auch die Funktion

$$\mathbb{R}^d \ni \xi \mapsto \xi^\alpha (\partial^\beta \hat{f})(\xi) \stackrel{(ii)}{=} i^{-|\beta|} \xi^\alpha \widehat{(x^\beta f)}(\xi) \stackrel{(i)}{=} i^{-|\beta| - |\alpha|} \underbrace{[\partial^\alpha (x^\beta f)]^\wedge}_{\in \mathcal{S} \subseteq L_1}(\xi)$$

beschränkt, d.h. $\hat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. □

Um zu zeigen, dass $\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ bijektiv ist, müssen wir nun etwas ausholen, und uns zunächst noch einmal mit **Faltungen** befassen. Dass solche Faltungen im Kontext von partiellen Differentialgleichungen und der Fourier-Transformation wichtig sind, zeigt schon Beispiel 3.15. Dort sahen wir, dass die inverse Fourier-Transformation von $\xi \mapsto |\xi|^{-2} \hat{f}(\xi)$ durch die Faltung $E * f$ gegeben sein sollte.

Proposition 3.19. Sei $\varphi \in L_1(\mathbb{R}^d) \cap L_\infty(\mathbb{R}^d)$ und $f \in L_p(\mathbb{R}^d)$ für ein $p \in [1, \infty]$. Dann gilt:

(i) Die Faltung

$$(\varphi * f)(x) := \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x-y) f(y) dy$$

ist für alle $x \in \mathbb{R}^d$ definiert und $\varphi * f = f * \varphi$.

(ii) Es gilt $\varphi * f \in L_p(\mathbb{R}^d)$ und

$$\|\varphi * f\|_p \leq \|\varphi\|_1 \|f\|_p. \quad \text{(Youngsche Ungleichung¹²)}$$

Beweis. (i) Sei $q \in [1, \infty]$ der zu p konjugierte Exponent, d.h. $1/p + 1/q = 1$. Da $L_1 \cap L_\infty \subseteq L_q$, wie man sich schnell überzeugt,¹³ ist $\varphi \in L_q(\mathbb{R}^d)$, d.h. aus der Hölder-Ungleichung folgt

$$\forall x \in \mathbb{R}^d : \int_{\mathbb{R}^d} |\varphi(x-y) f(y)| dy \leq \|\varphi\|_q \|f\|_p < \infty.$$

Also ist $\varphi * f$ (und genauso $f * \varphi$) auf ganz \mathbb{R}^d definiert und die Kommutativität der Faltung folgt per Substitution.

(ii) Im Falle $p = \infty$ gilt für alle $x \in \mathbb{R}^d$, dass

$$|(\varphi * f)(x)| = |(f * \varphi)(x)| \leq \int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y)| |\varphi(y)| dy \leq \|f\|_\infty \int_{\mathbb{R}^d} |\varphi(x-y)| dy = \|f\|_\infty \|\varphi\|_1.$$

Im Falle $p = 1$ folgt mit Fubini, dass

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} |(\varphi * f)(x)| dx &\leq \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} |\varphi(x-y)| |f(y)| dy \right) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} |\varphi(x-y)| dx \right) |f(y)| dy = \|f\|_1 \|\varphi\|_1. \end{aligned}$$

Den Beweis des für uns nicht ganz so wichtigen Falles $1 < p < \infty$ finden Sie im Anhang.¹⁴ □

Bemerkung 3.20. Die Aussagen von Proposition 3.19 (und dem nachfolgenden Korollar) bleiben auch dann gültig, wenn φ nicht beschränkt ist, d.h. für $\varphi \in L_1(\mathbb{R}^d)$ und $f \in L_p(\mathbb{R}^d)$. Allerdings ist $\varphi * f$ in diesem Fall nur für **fast alle** $x \in \mathbb{R}^d$ definiert.

Korollar 3.21. Sei $\varphi \in L_1(\mathbb{R}^d) \cap L_\infty(\mathbb{R}^d)$ und $f \in L_1(\mathbb{R}^d)$. Dann ist $\varphi * f \in L_1(\mathbb{R}^d)$ und

$$\widehat{(\varphi * f)} = (2\pi)^{d/2} \hat{\varphi} \hat{f}.$$

Beweis. Nur die Gleichung ist noch zu zeigen. Mittels Fubini erhalten wir

$$\begin{aligned} \widehat{(\varphi * f)}(\xi) &= \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} \underbrace{e^{-i\langle x, \xi \rangle}}_{=e^{-i\langle (x-y), \xi \rangle} e^{-i\langle y, \xi \rangle}} \left(\int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x-y) f(y) dy \right) dx \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} e^{-i\langle (x-y), \xi \rangle} \varphi(x-y) dx \right) e^{-i\langle y, \xi \rangle} f(y) dy \\ &= \hat{\varphi}(\xi) \int_{\mathbb{R}^d} e^{-i\langle y, \xi \rangle} f(y) dy = (2\pi)^{d/2} \hat{\varphi}(\xi) \hat{f}(\xi). \end{aligned}$$

□

Als letzte Vorbereitung zum Beweis der Bijektivität von $\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ benötigen wir nun noch sogenannte **Dirac-Familien**.¹⁵ Diese werden uns auch später noch sehr wertvoll sein.

Definition 3.22. Eine Familie $(\varphi_t)_{t>0}$ aus $L_1(\mathbb{R}^d)$ heißt eine **Dirac-Familie** auf \mathbb{R}^d , falls

- (i) $\varphi_t \geq 0$ für alle $t > 0$,
- (ii) $\int_{\mathbb{R}^d} \varphi_t(x) dx = 1$ für alle $t > 0$, und
- (iii) für alle $r > 0$ gilt

$$\lim_{t \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^d \setminus B(0,r)} \varphi_t(x) dx = 0.$$

Die Dirac-Familie heißt **beschränkt**, falls darüber hinaus $\varphi_t \in L_\infty(\mathbb{R}^d)$ für alle $t > 0$.

Die beiden Integralbedingungen sorgen also dafür, dass sich eine Dirac-Familie für $t \rightarrow 0$ mehr und mehr in der Nähe von 0 konzentriert.

Beispiel 3.23. (i) Sei $\varphi \in L_1(\mathbb{R}^d)$, $\varphi \geq 0$ mit $\|\varphi\|_1 = 1$. Ferner sei $L > 0$. Dann wird durch folgende Wahl ein Dirac-Familie auf \mathbb{R}^d definiert (Übung):

$$\varphi_t : \mathbb{R}^d \rightarrow [0, \infty), \quad \varphi_t(x) := t^{-d \cdot L} \varphi(t^{-L} x).$$

(ii) Für $t > 0$ sei $g_t(x) := \frac{1}{(2\pi t)^{d/2}} e^{-\frac{|x|^2}{2t}}$ die Familie der Gauß-Funktionen aus Lemma 3.13. Dann ist $(g_t)_{t>0}$ eine beschränkte Dirac-Familie auf \mathbb{R}^d . Dies folgt aus (i), denn

$$g_t(x) = t^{-d/2} g_1(t^{-1/2} x) \quad \text{und} \quad \int_{\mathbb{R}^d} g_1(x) dx = 1.$$

(iii) Sei φ ein Glättungskern auf $B(0, 1) \subseteq \mathbb{R}^d$ (Def. 1.17). Dann wird durch $\varphi_t(x) := t^{-d} \varphi(t^{-1} x)$

nach Teil (i) eine beschränkte Dirac-Familie auf \mathbb{R}^d definiert. In diesem Fall gilt

$$\varphi_t \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d), \quad \varphi_t \geq 0, \quad \text{supp}(\varphi_t) \subseteq B(0, t), \quad \int_{\mathbb{R}^d} \varphi_t(x) dx = 1.$$

Eine solche Familie $(\varphi_t)_{t>0}$ nennt man auch eine **glatte Approximation der Eins**.

Für eine beschränkte Dirac-Familie $(\varphi_t)_{t>0}$ und $f \in L_p(\mathbb{R}^d)$, $1 \leq p \leq \infty$, ist die Faltung $(\varphi_t * f)(x)$ nach Proposition 3.19 für alle $x \in \mathbb{R}^d$ definiert. Der Wert dieser Faltung an der Stelle x ist das mittels $\varphi_t(x - \cdot)$ gewichtete Integralmittel von f , vergleiche die Diskussion vor Definition 1.14. Da sich $\varphi_t(x - \cdot)$ für $t \rightarrow 0$ immer mehr beim Punkt x konzentriert, erwarten wir, dass $(\varphi_t * f)(x)$ für $t \rightarrow 0$ gegen $f(x)$ konvergiert. Das folgende Lemma macht diese Vermutung präzise.

Lemma 3.24. Sei $(\varphi_t)_{t>0}$ eine beschränkte Dirac-Familie auf \mathbb{R}^d .

- (i) Ist $f \in C_b(\mathbb{R}^d)$, so konvergiert $\varphi_t * f \rightarrow f$ für $t \rightarrow 0$ gleichmäßig auf kompakten Teilmengen von \mathbb{R}^d .
- (ii) Ist $f \in L_p(\mathbb{R}^d)$ für ein $1 \leq p < \infty$, so gilt $\lim_{t \rightarrow 0} \|\varphi_t * f - f\|_p = 0$.

Bemerkung 3.25. Ist $\varphi_t \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$, so folgt nach Satz 1.16 (denn für $p \geq 1$ ist $\mathcal{L}_p(\mathbb{R}^d) \subseteq \mathcal{L}_1^{loc}(\mathbb{R}^d)$), dass $\varphi_t * f \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$. Wählen wir etwa eine glatte Approximation der Eins wie in Beispiel 3.23 (iii), so zeigt damit Teil (ii) des Lemmas, dass jedes $f \in L_p(\mathbb{R}^d)$, $1 \leq p < \infty$, in der L_p -Norm durch glatte Funktionen approximiert werden kann. Für $p = \infty$ kann dies im Allgemeinen nicht gelten, denn dann wäre die Grenzfunktion f automatisch stetig (warum?).

Beweis. (i) Es sei $f \in C_b(\mathbb{R}^d)$ und $K \subseteq \mathbb{R}^d$ kompakt. Weiter sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Da f auf der kompakten Menge $K_1 := K + B[0, 1]$ gleichmäßig stetig ist, existiert ein $\delta > 0$, so dass

$$\forall x, y \in K_1 : |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Wählen wir $0 < r < \min(1, \delta)$ folgt insbesondere

$$\forall x \in K \forall y \in B(x, r) : |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Mit der 1. und 2. Eigenschaft der Dirac-Familie folgt somit für alle $x \in K$ und $t > 0$:

$$\begin{aligned} |f(x) - (\varphi_t * f)(x)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^d} \varphi_t(x - y) f(x) dy - \int_{\mathbb{R}^d} \varphi_t(x - y) f(y) dy \right| \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^d} \varphi_t(x - y) |f(x) - f(y)| dy = \int_{B(x, r)} (\dots) dy + \int_{\mathbb{R}^d \setminus B(x, r)} (\dots) dy \\ &\leq \varepsilon \int_{B(x, r)} \varphi_t(x - y) dy + 2 \|f\|_\infty \int_{\mathbb{R}^d \setminus B(x, r)} \varphi_t(x - y) dy \leq \varepsilon + 2 \|f\|_\infty \int_{\mathbb{R}^d \setminus B(0, r)} \varphi_t(z) dz. \end{aligned}$$

Mit der 3. Eigenschaft der Dirac-Familie folgt also

$$0 \leq \overline{\lim}_{t \rightarrow 0} \sup_{x \in K} |f(x) - (\varphi_t * f)(x)| \leq \varepsilon.$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgt $\sup_{x \in K} |f(x) - (\varphi_t * f)(x)| \rightarrow 0$ für $t \rightarrow 0$.

(ii) Beweisen wir aus Zeitgründen nicht. Sie finden den Beweis aber im Anhang.¹⁶ □

Nun können wir die Bijektivität von $\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ endlich in Angriff nehmen.

Satz 3.26 (Fourier-Inversionssatz). Sei $f \in C_b(\mathbb{R}^d) \cap L_1(\mathbb{R}^d)$, so dass auch $\hat{f} \in L_1(\mathbb{R}^d)$. Dann gilt

$$(*) \quad f(x) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\langle x, \xi \rangle} \hat{f}(\xi) d\xi, \quad x \in \mathbb{R}^d. \quad 17$$

Beweis. Wir benutzen die Notation und Resultate von Lemma 3.13. Sei $t > 0$ und

$$g_t(x) := \frac{1}{(2\pi t)^{d/2}} \exp\left(-\frac{|x|^2}{2t}\right), \quad x \in \mathbb{R}^d.$$

Dann ist

$$\widehat{g_t}(x) \stackrel{L.3.13}{=} g_1(t^{-1/2}x) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \exp\left(-t\frac{|x|^2}{2}\right),$$

d.h. mit dominierter Konvergenz folgt

$$\frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\langle x, \xi \rangle} \hat{f}(\xi) d\xi = \lim_{t \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\langle x, \xi \rangle} \hat{f}(\xi) \widehat{g_t}(\xi) d\xi.$$

Andererseits folgt aus Proposition 3.12, Teil (a.iv), dass $e^{i\langle x, \xi \rangle} \hat{f}(\xi) = \widehat{(\tau_x f)}(\xi)$ mit $(\tau_x f)(y) = f(y+x)$, d.h. mit Teil (a.ii) des gleichen Lemmas folgt wegen $\widehat{\widehat{g_t}}(x) = g_t(x) = g_t(-x)$, dass

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\langle x, \xi \rangle} \hat{f}(\xi) \widehat{g_t}(\xi) d\xi &= \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{(\tau_x f)}(\xi) \widehat{g_t}(\xi) d\xi = \int_{\mathbb{R}^d} (\tau_x f)(\xi) \widehat{\widehat{g_t}}(\xi) d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} f(\xi+x) g_t(-\xi) d\xi = \int_{\mathbb{R}^d} f(y) g_t(x-y) dy = (g_t * f)(x). \end{aligned} \quad (3.1)$$

Da $(g_t)_{t>0}$ nach Beispiel 3.23 eine Dirac-Familie ist, zeigt Lemma 3.24, dass $(g_t * f)(x) \xrightarrow{t \rightarrow 0} f(x)$. \square

—Ende VL 12—

Definition 3.27. Für $f \in L_1(\mathbb{R}^d)$ nennt man

$$(\mathcal{G}f)(x) := \check{f}(x) := (\mathcal{F}f)(-x) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\langle x, \xi \rangle} f(\xi) d\xi, \quad x \in \mathbb{R}^d,$$

die **inverse Fourier-Transformation** von f .

Bemerkung 3.28. Satz 3.26 besagt also, dass $(\mathcal{G} \circ \mathcal{F})f = f$ für $f \in C_b(\mathbb{R}^d) \cap L_1(\mathbb{R}^d)$ mit $\hat{f} \in L_1(\mathbb{R}^d)$. Genauso gilt in diesem Fall auch, dass $(\mathcal{F} \circ \mathcal{G})f = f$, denn

$$\frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-i\langle x, \xi \rangle} \check{f}(\xi) d\xi = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-i\langle x, \xi \rangle} \hat{f}(-\xi) d\xi = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\langle x, y \rangle} \hat{f}(y) dy \stackrel{S.3.26}{=} f(x).$$

Korollar 3.29. (i) Die Fourier-Transformation auf dem Schwartz-Raum, d.h. $\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, ist bijektiv mit Umkehrabbildung $\mathcal{F}^{-1} = \mathcal{G}$.

(ii) Sind $\varphi, f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, so ist auch $\varphi * f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ und $\widehat{(\varphi * f)} = (2\pi)^{d/2} \widehat{\varphi} \hat{f}$.

(iii) Für $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ gilt die **Plancherel-Identität**¹⁸

$$\|f\|_2 := \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^2 dx \right)^{1/2} \stackrel{!}{=} \left(\int_{\mathbb{R}^d} |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi \right)^{1/2} =: \|\hat{f}\|_2.$$

Beweis. (i) Für $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ gilt $f \in L_1(\mathbb{R}^d) \cap C_b(\mathbb{R}^d)$ und $\hat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \subseteq L_1(\mathbb{R}^d)$, d.h. die Behauptung folgt aus Satz 3.26 und Bemerkung 3.28.

(ii) und (iii): Übung. □

Übung

Schauen wir zum Abschluss dieses Abschnitts nun wieder auf einen (linearen) partiellen Differentialoperator (mit konstanten Koeffizienten)

$$P(\partial) := \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha \partial^\alpha.$$

Nehmen wir an, $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ sei eine Lösung der partiellen Differentialgleichung

$$P(\partial)u = f \text{ auf } \mathbb{R}^d.$$

Dann ist auch $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ und aus Korollar 3.14 erhalten wir (mit dem Symbol $p(\xi) := P(i\xi)$), dass

$$p(\xi)\hat{u}(\xi) = \hat{f}(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}^d.$$

Da die Nullstellenmenge $\{\xi \in \mathbb{R}^d \mid p(\xi) = 0\}$, im Falle $p \neq 0$, eine λ^d -Nullmenge ist, folgt hieraus

$$(\heartsuit) \quad \hat{u} = \frac{1}{p} \cdot \hat{f} \quad \lambda^d - \text{fast sicher}$$

und somit

$$u(x) = \mathcal{F}^{-1} \left(\frac{1}{p} \cdot \hat{f} \right) (x) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\langle x, \xi \rangle} \frac{\hat{f}(\xi)}{p(\xi)} d\xi, \quad x \in \mathbb{R}^d.$$

Die rechte Seite liefert uns im Fall $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ also eine Formel für die Lösung u und kann in allgemeineren Fällen als Ansatz für eine Lösung untersucht werden. Weiterhin zeigt (\heartsuit) und Korollar 3.21, dass die Lösung $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ unter gewissen Voraussetzungen als Faltung gegeben ist, denn es gilt die Implikation

$$\exists K \in L_1(\mathbb{R}^d) \text{ mit } \hat{K} = \frac{1}{(2\pi)^{d/2} \cdot p} \quad \Rightarrow \quad u = K * f.^{19}$$

Man beachte, dass so ein K nur existieren kann, wenn p keine Nullstellen besitzt (warum?).

Beispiel 3.30. Laut Beispiel 3.15 hat der Laplace-Operator Δ das Symbol $p(\xi) = -|\xi|^2$, d.h. für $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ mit $\Delta u = f$ gilt $u = -\mathcal{F}^{-1}(|\cdot|^{-2} \hat{f})$. In diesem Fall lässt sich direkt zeigen (siehe [11, Lemma 9.27]), dass für $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ und $d \geq 3$:

$$u(x) = -\frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\langle x, \xi \rangle} \frac{\hat{f}(\xi)}{|\xi|^2} d\xi = \int_{\mathbb{R}^d} E(x - \xi) f(\xi) d\xi = (E * f)(x),$$

mit der Fundamentallösung E des Laplace-Operators. Wir gewinnen also auf diesem Wege die bekannte Lösung, das Newton-Potential, zurück. Man beachte, dass in diesem Fall die Fundamentallösung E nur lokal integrierbar auf \mathbb{R}^d ist, d.h. \hat{E} ist nicht definiert. Man kann allerdings die Fourier-Transformation auf sogenannte **temperierte Distributionen** ausweiten (später kommen wir darauf noch einmal ganz kurz zurück) und in diesem allgemeineren Sinne dann tatsächlich zeigen, dass

$$\hat{E}(\xi) = -\frac{1}{(2\pi)^{d/2} |\xi|^2}.$$

3.3. Die Fundamentallösung der Wärmeleitungsgleichung

Wir kommen zurück zur Wärmeleitungsgleichung und betrachten zunächst den homogenen Fall auf $\Omega = \mathbb{R}^d$, d.h. das Cauchy-Problem

$$(\star) \quad \begin{cases} \partial_t u - \Delta_x u = 0 & \text{in } \mathbb{R}^d \times (0, \infty), \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{für } x \in \mathbb{R}^d. \end{cases}$$

Nehmen wir zunächst an, dass $u_0 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ und dass eine klassische Lösung $u : \mathbb{R}^d \times (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ existiert, so dass $u(\cdot, t), \partial_t u(\cdot, t) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ für alle $t > 0$. Dann können wir die **partielle Fourier-Transformation** von u bezüglich x betrachten:

$$(\mathcal{F}_x u)(\xi, t) := \hat{u}(\xi, t) := \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-i\langle x, \xi \rangle} u(x, t) dx.$$

Mit Korollar 3.14 und Beispiel 3.15 folgt dann aus $(\partial_t u - \Delta_x u) = 0$, dass

$$\widehat{(\partial_t u)}(\xi, t) + |\xi|^2 \hat{u}(\xi, t) = 0.$$

Ferner folgt unter Vertauschung von Differentiation und Integration (zunächst formal), dass

$$\widehat{(\partial_t u)}(\xi, t) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-i\langle x, \xi \rangle} \partial_t u(x, t) dx = \partial_t \left(\frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-i\langle x, \xi \rangle} u(x, t) dx \right) = (\partial_t \hat{u})(\xi, t).$$

Mittels partieller Fourier-Transformation erhalten wir also aus (\star) , dass

$$\begin{cases} \partial_t \hat{u}(\xi, t) = -|\xi|^2 \hat{u}(\xi, t), & \text{falls } (\xi, t) \in \mathbb{R}^d \times (0, \infty), \\ \hat{u}(\xi, 0) = \hat{u}_0(\xi), & \text{falls } \xi \in \mathbb{R}^d. \end{cases}$$

Für fixiertes ξ handelt es sich hierbei um eine gewöhnliche Differentialgleichung für $t \mapsto \hat{u}(\xi, t)$, die samt Anfangsbedingung eindeutig durch

$$\hat{u}(\xi, t) = \hat{u}_0(\xi) \exp(-t|\xi|^2)$$

gelöst wird. Da, mit der Notation und den Resultaten von Lemma 3.13,

$$\exp(-t|\xi|^2) = (2\pi)^{d/2} g_1((2t)^{1/2} \xi) = (2\pi)^{d/2} \hat{g}_{2t}(\xi),$$

folgt also mit Korollar 6.38, dass

$$\hat{u}(\xi, t) = (2\pi)^{d/2} \hat{g}_{2t}(\xi) \hat{u}_0(\xi) = \widehat{(g_{2t} * u_0)}(x),$$

also auch

$$u(\xi, t) = (g_{2t} * u_0)(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}^d.$$

In völliger Analogie zur Poisson-Gleichung erhalten wir also auch hier die Lösung $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ von (\star) durch Faltung des Anfangsdatums u_0 mit der Funktion g_{2t} . Dies liefert Anlass zu folgender Definition.

Definition 3.31. Die Funktion $\Phi : \mathbb{R}^d \times (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$,

$$\Phi(x, t) := g_{2t}(x) = \frac{1}{(4\pi t)^{d/2}} \exp\left(-\frac{|x|^2}{4t}\right)$$

wird **Gauß-Kern** oder **Wärmeleitungskern** oder **Fundamentallösung der Wärmeleitungsgleichung** bzw. **des Wärmeleitungsoperators** auf \mathbb{R}^d genannt. Weiterhin definieren wir

$$\Phi_t : \mathbb{R}^d \rightarrow (0, \infty), \quad \Phi_t(x) := \Phi(x, t) = g_{2t}(x).$$

Bemerkung 3.32. In der Übung wurden folgende Eigenschaften des Gauß-Kerns bereits gezeigt:

- (i) $\Phi \in C^\infty(\mathbb{R}^d \times (0, \infty))$.
- (ii) $W\Phi := (\partial_t - \Delta_x)\Phi = 0$ in $\mathbb{R}^d \times (0, \infty)$, d.h. Φ ist selbst eine Lösung der homogenen Wärmeleitungsgleichung.
- (iii) Für alle $t > 0$ ist $\Phi_t \in L_1(\mathbb{R}^d) \cap L_\infty(\mathbb{R}^d)$ und

$$\|\Phi_t\|_1 = \int_{\mathbb{R}^d} \Phi_t(x) dx = 1.$$

Unsere obige Herleitung lässt vermuten, dass $\Phi_t * u_0$ im Falle $u_0 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ wirklich eine Lösung des Cauchy-Problems (*) ist (nur die Vertauschung von ∂_t und partieller Fourier-Transformation müsste noch gerechtfertigt werden). Tatsächlich handelt es sich sogar für sehr viel allgemeinere u_0 um eine Lösung. Dazu beachten wir, dass $(\Phi_t * u_0)(x)$ wegen Proposition 3.19 und Teil (iii) der obigen Bemerkung schon für $u_0 \in L_p(\mathbb{R}^d)$ für alle $x \in \mathbb{R}^d$ definiert ist.

Übung

Satz 3.33. Sei $u_0 \in L_p(\mathbb{R}^d)$ für ein $p \in [1, \infty]$ und

$$u(x, t) := (\Phi_t * u_0)(x) = \frac{1}{(4\pi t)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} u_0(y) dy, \quad (x, t) \in \mathbb{R}^d \times (0, \infty).$$

Dann gilt:

- (i) $u \in C^\infty(\mathbb{R}^d \times (0, \infty))$ und $Wu = 0$ auf $\mathbb{R}^d \times (0, \infty)$.
- (ii) $u(\cdot, t) \in L_p(\mathbb{R}^d)$ und $\|u(\cdot, t)\|_p \leq \|u_0\|_p$ für alle $t > 0$.
- (iii) Im Falle $1 \leq p < \infty$ gilt

$$\lim_{t \searrow 0} \|u(\cdot, t) - u_0\|_p = 0,$$

d.h. die Anfangsdaten u_0 werden von u im L_p -Mittel angenommen.

- (iv) Ist $u_0 \in C_b(\mathbb{R}^d)$, so lässt sich u mittels $u(x, 0) := u_0(x)$, $x \in \mathbb{R}^d$, stetig nach $\mathbb{R}^d \times [0, \infty)$ fortsetzen und ist damit die (nach Korollar 3.7 eindeutige) beschränkte klassische Lösung des Cauchy-Problems

$$Wu = 0 \text{ auf } \mathbb{R}^d \times (0, \infty) \quad \text{und} \quad u(x, 0) = u_0(x) \text{ für } x \in \mathbb{R}^d.$$

Ferner gilt in diesem Fall

$$\|u\|_\infty := \sup_{(x,t) \in \mathbb{R}^d \times [0, \infty)} |u(x, t)| = \|u_0\|_\infty.$$

Beweis. (i) Da

$$u(x, t) = \int_{\mathbb{R}^d} \Phi(x - y, t) u_0(y) dy$$

und da für jedes $y \in \mathbb{R}^d$ die Funktion $\mathbb{R}^d \times (0, \infty) \ni (x, t) \mapsto \Phi(x - y, t)$ nach Bemerkung 3.32 eine glatte Lösung der homogenen Wärmeleitungsgleichung ist, folgt die Aussage, sofern

wir Differentiation und Integration vertauschen dürfen. Dies folgt, mit einigen technischen Argumenten, aus dem Satz über Parameterintegrale, siehe Anhang.²⁰

(ii) Folgt aus Proposition 3.19 (Youngsche Ungleichung) unter Verwendung von $\|\Phi_t\|_1 = 1$.

(iii, iv) Teil (iii) und die erste Behauptung in (iv) folgt aus Lemma 3.24, da $(\Phi_t)_{t>0} = (g_{2t})_{t>0}$ nach Beispiel 3.23 (ii) eine beschränkte Dirac-Familie ist. Schließlich gilt wegen Teil (ii) sicherlich, dass

$$\sup_{(x,t) \in \mathbb{R}^d \times [0,\infty)} |u(x,t)| \leq \|u_0\|_\infty.$$

Aber in diesem Fall gilt $u(x,0) = u_0(x)$, d.h. hier muss sogar Gleichheit gelten. \square

Wir wollen an diesen Satz noch eine Bemerkung anschließen.

Bemerkung 3.34. (i) **Glättung:** Man beachte, dass beliebig „rauhe“ Anfangsdaten $u_0 \in L_p(\mathbb{R}^d)$ in infinitesimaler Zeit geglättet werden, denn die Lösung $(\Phi_t * u_0)(x,t)$ ist glatt auf $\mathbb{R}^d \times (0,\infty)$. Man vergleiche dies mit Bemerkung 2.25 im Kontext der Poisson-Gleichung.

(ii) **Stabilität:** Sind u, v die beschränkten Lösungen der Wärmeleitungsgleichung auf $\mathbb{R}^d \times (0,\infty)$ zu den Anfangsdaten $u_0 \in C_b(\mathbb{R}^d)$ bzw. $v_0 \in C_b(\mathbb{R}^d)$, so folgt aus (iv), dass

$$\|u - v\|_{L_\infty(\mathbb{R}^d \times [0,\infty))} = \|u_0 - v_0\|_{L_\infty(\mathbb{R}^d)}.$$

(iii) **Unendliche Ausbreitungsgeschwindigkeit:** Gilt $v_0 = u_0 + \varepsilon\varphi$ für eine stetige Funktion $\varphi \geq 0, \varphi \neq 0$, mit $\text{supp}(\varphi) \subseteq B(0,r)$, so gilt für die zugehörigen Lösungen, dass $v(x,t) > u(x,t)$ in ganz $\mathbb{R}^d \times (0,\infty)$. Beliebige kleine Störungen wirken sich also auf jeden Punkt des \mathbb{R}^d schon nach infinitesimaler Zeit aus.²¹ Beweis:

$$v(x,t) - u(x,t) \geq \varepsilon \int_{B(0,r)} \Phi_t(x-y)\varphi(y) dy > 0.$$

(iv) Ist $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ offen und $u_0 \in C_b(\overline{\Omega})$, so gibt es nach dem Fortsetzungssatz von Tietze ein $F \in C_b(\mathbb{R}^d)$ mit $F|_{\overline{\Omega}} = u_0$. Aus dem vorherigen Satz folgt also, dass durch $u : \overline{\Omega} \times [0,\infty) \rightarrow \mathbb{R}$,

$$u(x,t) := \begin{cases} (\Phi_t * F)(x), & \text{falls } t > 0, \\ u_0(x), & \text{falls } t = 0 \end{cases}$$

eine glatte Lösung des Cauchy-Problems $Wu = 0$ in $\Omega \times (0,\infty)$ und $u(x,0) = u_0(x)$ für $x \in \Omega$ gegeben ist. Natürlich werden hierbei mögliche Randwerte der Lösung noch völlig außer Acht gelassen.

(iv) Man kann allgemein zeigen, dass jede Lösung von $Wu = 0$ in $\Omega \times (0,\infty)$ glatt ist. Wir werden dies später in einem etwas allgemeineren Kontext tatsächlich beweisen.²²

Wir wollen nun noch kurz das **inhomogene Cauchy-Problem** auf \mathbb{R}^d betrachten. Hier genügt es, den Fall homogener Anfangsdaten zu behandeln, d.h.

$$(\star\star) \quad \begin{cases} \partial_t u - \Delta_x u = f & \text{in } \mathbb{R}^d \times (0,\infty) \\ u(x,0) = 0 & \text{für } x \in \mathbb{R}^d, \end{cases}$$

denn ist u eine Lösung von $(\star\star)$ und $v(x,t) = (\Phi_t * u_0)(x)$, so ist $w := u + v$ eine Lösung von

$$\begin{cases} \partial_t w - \Delta_x w = f & \text{in } \mathbb{R}^d \times (0,\infty) \\ w(x,0) = u_0(x) & \text{für } x \in \mathbb{R}^d. \end{cases}$$

Wir gehen analog vor wie beim homogenen Problem und betrachten zunächst Lösungen von $(\star\star)$ auf dem Schwartz-Raum $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Dort liefert partielle Fourier-Transformation bezüglich der x -Variablen, dass

$$\partial_t \hat{u}(\xi, t) + |\xi|^2 \hat{u}(\xi, t) = \hat{f}(\xi, t) \quad \text{und} \quad \hat{u}(\xi, 0) = 0.$$

Mit der Methode der Variation der Konstanten können wir diese gewöhnliche Differentialgleichung für $t \mapsto \hat{u}(\xi, t)$, samt Anfangsbedingung, eindeutig lösen und erhalten

$$\hat{u}(\xi, t) = \int_0^t e^{-(t-s)|\xi|^2} \hat{f}(\xi, s) ds.$$

Wegen $e^{-(t-s)|\xi|^2} = (2\pi)^{d/2} \widehat{\Phi}_{t-s}(\xi)$ (vergleiche die Betrachtungen im homogenen Fall), folgt mit $f_s(x) := f(x, s)$ dann

$$\hat{u}(\xi, t) = (2\pi)^{d/2} \int_0^t \widehat{\Phi}_{t-s}(\xi) \hat{f}(\xi, s) ds = \int_0^t (\widehat{\Phi_{t-s} * f_s})(\xi) ds.$$

Wenden wir nun die inverse partielle Fouriertransformation an (und vertauschen wir Integration und Fouriertransformation), so erhalten wir die sogenannte **Duhamelsche Formel**²³

$$u(x, t) = \int_0^t (\Phi_{t-s} * f_s)(x) ds = \int_0^t \left(\int_{\mathbb{R}^d} \Phi_{t-s}(x-y) f_s(y) dy \right) ds.$$

Bemerkung 3.35. Man beachte, dass für jedes $s > 0$ die Funktion $v_s(x, t) := (\Phi_{t-s} * f_s)(x)$ eine Lösung des homogenen Cauchy-Problems

$$\begin{cases} \partial_t v - \Delta_x v = 0 & \text{in } \mathbb{R}^d \times (s, \infty), \\ v(x, s) = f_s(x) & \text{für } x \in \mathbb{R}^d \end{cases}$$

ist. D.h. wir erhalten die Lösung des inhomogenen Cauchy-Problems $(\star\star)$ indem wir zunächst für jedes $0 < s \leq t$ obiges homogene Cauchy-Problem lösen und anschließend integrieren:

$$u = \int_0^t v_s ds.$$

Dies nennt man auch das **Duhamelsche Prinzip**.

Die obigen formalen Rechnungen lassen sich für hinreichend glattes f tatsächlich rechtfertigen.

Satz 3.36. Sei $u_0 \in C_b(\mathbb{R}^d)$, $f \in C^2(\mathbb{R}^d \times (0, \infty)) \cap C_b(\mathbb{R}^d \times [0, \infty))$ und

$$u(x, t) = \begin{cases} (\Phi_t * u_0)(x) + \int_0^t (\Phi_{t-s} * f_s)(x) ds & \text{falls } x \in \mathbb{R}^d, t > 0, \\ u_0(x), & \text{falls } x \in \mathbb{R}^d, t = 0, \end{cases}$$

wobei $f_s(y) := f(y, s)$. Dann ist $u \in C^2(\mathbb{R}^d \times (0, \infty)) \cap C(\mathbb{R}^d \times [0, \infty))$ und

$$\begin{cases} Wu = f & \text{in } \mathbb{R}^d \times (0, \infty), \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{für } x \in \mathbb{R}^d. \end{cases}$$

Beweis. Siehe [10]. □

3.4. Die Methode der Trennung der Variablen

Wir wollen uns im letzten Teil dieses Kapitels nun mit der Existenz von Lösungen von gemischten Problemen auf einer beschränkten, offenen Teilmenge $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ beschäftigen. Der Einfachheit halber betrachten wir nur den homogenen Fall mit homogenen **Dirichlet-Randbedingungen**, d.h. das gemischte Problem

$$(\heartsuit) \quad \begin{cases} Wu &= 0 & \text{in } \Omega_T = \Omega \times (0, T), \\ u &= 0 & \text{auf } \partial\Omega \times [0, T), \\ u(x, 0) &= u_0(x) & \text{für } x \in \overline{\Omega}. \end{cases}$$

Man beachte, dass Anfangs- und Randbedingung nur dann konsistent sind, wenn $u_0|_{\partial\Omega} = 0$ gilt.

Als Lösungsansatz verwenden wir die sogenannte Methode der **Trennung der Variablen**, versuchen also Lösungen der Form

$$u(x, t) = v(t) \cdot w(x)$$

zu finden. Damit ein solcher Ansatz auch die homogene Dirichlet-Randbedingung erfüllt, ist es hierbei sinnvoll, nur solche w zu betrachten, die auf dem Rand von Ω verschwinden. Im Folgenden betrachten wir dazu

$$w \in C_0^2(\overline{\Omega}) := \{f \in C^2(\overline{\Omega}) : f|_{\partial\Omega} = 0\}.$$

Man beachte, dass wir hierbei zunächst leicht über die Eigenschaften einer klassischen Lösung hinausgehen (dies würde der Forderung $w \in C^2(\Omega) \cap C_0(\overline{\Omega})$ entsprechen), damit wir im Folgenden Lemma die Greenschen Formeln anwenden können.

Lemma 3.37. Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ offen und $0 < T \leq \infty$.

(a) Seien $v \in C^1((0, T)) \setminus \{0\}$, $w \in C^2(\Omega) \setminus \{0\}$ und $u(x, t) := v(t)w(x)$, $(x, t) \in \Omega_T$. Dann sind äquivalent:

- (i) $Wu = 0$ in Ω_T .
- (ii) Es existieren $C, \lambda \in \mathbb{R}, C \neq 0$, mit

$$\forall t \in (0, T) : \quad v(t) = Ce^{\lambda t}$$

und

$$\forall x \in \Omega : \quad \Delta w(x) = \lambda w(x),$$

d.h. w ist **Eigenfunktion** des Laplace-Operators Δ zum **Eigenwert** λ .

(b) Besitzt Ω einen C^1 -Rand, so gilt:

- (i) Ist $w \in C_0^2(\overline{\Omega}) \setminus \{0\}$, so sind zugehörige **Eigenwerte von Δ negativ**, d.h. für $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt die Implikation

$$\Delta w = \lambda w \text{ auf } \Omega \quad \Rightarrow \quad \lambda < 0.$$

- (ii) Sind $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, \lambda_1 \neq \lambda_2$, und $w_1, w_2 \in C_0^2(\overline{\Omega})$ mit $\Delta w_1 = \lambda_1 w_1, \Delta w_2 = \lambda_2 w_2$, so gilt

$$\langle w_1, w_2 \rangle := \int_{\Omega} w_1(x) w_2(x) dx = 0,$$

d.h. **Eigenfunktionen von Δ aus C_0^2 zu verschiedenen Eigenwerten sind in L_2 orthogonal.**

Beweis. (a) (ii) \Rightarrow (i): Es gilt für alle $(x, t) \in \Omega_T$

$$Wu(x, t) = v'(t)w(x) - v(t)\Delta w(x) = \lambda v(t)w(x) - \lambda v(t)w(x) = 0.$$

(i) \Rightarrow (ii): Aus $Wu = 0$ folgt

$$v'(t)w(x) = v(t)\Delta w(x)$$

für alle $(x, t) \in \Omega_T$. Nach Annahme existiert nun ein $(x_0, t_0) \in \Omega_T$ mit $u(x_0, t_0) = v(t_0)w(x_0) \neq 0$.
Damit folgt insbesondere

$$v'(t) = \underbrace{\left(\frac{\Delta w(x_0)}{w(x_0)}\right)}_{=: \lambda} v(t), \quad t \in (0, T),$$

also $v(t) = Ce^{\lambda t}$, $t \in (0, T)$, für ein $C \neq 0$ (denn $v(t_0) \neq 0$). Weiterhin folgt dann auch

$$\Delta w(x) = \frac{v'(t_0)}{v(t_0)} w(x) = \lambda w(x), \quad x \in \Omega.$$

(b) (i) Aus der 1. Greenschen Formel (siehe Satz 2.10) mit $f = g = w$ folgt wegen $w|_{\partial\Omega} = 0$, dass

$$0 = \int_{\partial\Omega} \partial_\nu w(z) w(z) d\sigma(z) = \int_{\Omega} (|\nabla w(x)|^2 + w(x)\Delta w(x)) dx = \int_{\Omega} (|\nabla w(x)|^2 + \lambda(w(x))^2) dx,$$

also

$$\lambda = -\frac{\int_{\Omega} |\nabla w(x)|^2 dx}{\|w\|_2^2} \leq 0.$$

Wäre $\lambda = 0$, so würde der Gradient von w identisch verschwinden, d.h. w wäre auf jeder Zusammenhangskomponente von Ω konstant, müsste also wegen $w|_{\partial\Omega} = 0$ identisch verschwinden, im Gegensatz zur Voraussetzung.

(ii) Aus der 2. Greenschen Formel folgt wegen $w_1|_{\partial\Omega} = w_2|_{\partial\Omega} = 0$, dass

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\partial\Omega} (w_1(z)\partial_\nu w_2(z) - w_2(z)\partial_\nu w_1(z)) d\sigma(z) = \int_{\Omega} (w_1(x)\Delta w_2(x) - w_2(x)\Delta w_1(x)) dx \\ &= (\lambda_2 - \lambda_1) \int_{\Omega} w_1(x)w_2(x) dx. \end{aligned}$$

□

Mit Hilfe des Lemmas können wir unser gemischtes Problem (♥) damit für sehr spezielle Anfangsdaten schon lösen.

Beispiel 3.38. Es seien $w_1, \dots, w_m \in C_0^2(\overline{\Omega})$ Eigenfunktionen von Δ zu den paarweise verschiedenen Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in (-\infty, 0)$. Ohne Einschränkung können wir annehmen, dass $\|w_k\|_2 = 1$ für alle $1 \leq k \leq m$. Weiterhin sei

$$u_0(x) := \sum_{k=1}^m c_k w_k(x), \quad x \in \overline{\Omega},$$

mit $c_1, \dots, c_m \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

(i) Es ist $c_k = \langle u_0, w_k \rangle$, denn da die w_k paarweise orthogonal und normiert sind, gilt

$$\langle u_0, w_k \rangle = \left\langle \sum_{l=1}^m c_l w_l, w_k \right\rangle = \sum_{l=1}^m c_l \langle w_l, w_k \rangle = c_k \langle w_k, w_k \rangle = c_k \|w_k\|_2^2 = c_k.$$

(ii) Es ist

$$u(x, t) := \sum_{k=1}^m e^{t\lambda_k} \langle u_0, w_k \rangle w_k(x), \quad (x, t) \in \Omega \times [0, \infty)$$

eine Lösung des gemischten Problems

$$\begin{cases} Wu &= 0 & \text{in } \Omega \times (0, \infty), \\ u &= 0 & \text{auf } \partial\Omega \times [0, \infty), \\ u(x, 0) &= u_0(x) & \text{für } x \in \overline{\Omega}. \end{cases}$$

Dies folgt sofort aus (i), Lemma 3.37 und der Linearität von W .

Leider ist es eher selten der Fall, dass sich die Anfangsdaten u_0 als endliche Linearkombination von solchen Eigenfunktionen von Δ darstellen lassen, wie im vorherigen Beispiel betrachtet. Lassen wir jedoch auch unendliche Linearkombinationen zu (falls so viele Eigenfunktionen existieren), sieht die Lage unter Umständen schon besser aus.

Erinnerung 3.39. (i) Ist $(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein Hilbert-Raum, so heißt eine Familie $(e_k)_{k \in I}$ in \mathcal{H} ein **Orthonormalsystem (ONS)**, falls

- $\langle e_k, e_l \rangle = 0$ für alle $k \neq l$, d.h. die e_k sind paarweise orthogonal, und
- $\|e_k\| = \sqrt{\langle e_k, e_k \rangle} = 1$ für alle k .

In diesem Fall gilt die **Besselsche Ungleichung**

$$\sum_{k \in I} |\langle f, e_k \rangle|^2 \leq \|f\|^2, \quad f \in \mathcal{H}.^{24}$$

(ii) Ist das ONS $(e_k)_{k \in I}$ **total**, d.h. die lineare Hülle der e_k ist dicht in \mathcal{H} , so nennen wir es eine **Orthonormalbasis (ONB)** von \mathcal{H} . In diesem Fall gilt für jedes $f \in \mathcal{H}$ die **Fourier-Entwicklung**

$$f = \sum_{k \in I} \langle f, e_k \rangle e_k^{25}$$

und die **Parsevalsche Identität** (verallgemeinerter Satz von Pythagoras)

$$\sum_{k \in I} |\langle f, e_k \rangle|^2 = \|f\|^2.$$

(iii) In jedem **separablen** Hilbertraum (mit abzählbarer dichter Teilmenge) hat jede ONB nur endlich oder abzählbar viele Elemente.

(iv) Für $\mathcal{H} = L_2((-\pi, \pi); \mathbb{C})$ bilden beispielsweise die Funktionen $e_k(t) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(ikt)$, $k \in \mathbb{Z}$, eine ONB.

Bildet die Familie der Eigenfunktionen von Δ also sogar eine ONB von $L_2(\Omega)$, so können wir mit der Idee aus Beispiel 3.38 nun einen Lösungskandidaten für das gemischte Problem (\heartsuit) zu beliebig vorgegebenem $u_0 \in L_2(\Omega)$ gewinnen.

Proposition 3.40. Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ offen und beschränkt und $u_0 \in L_2(\Omega)$. Ferner sei $(w_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $C_0^2(\overline{\Omega})$ bestehend aus Eigenfunktionen von Δ und $\lambda_k < 0$ sei der zu w_k zugehörige

Eigenwert. Ist dann $(w_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine ONB von $L_2(\Omega)$, so ist die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} e^{t\lambda_k} \langle u_0, w_k \rangle w_k$$

für jedes $t \geq 0$ in $L_2(\Omega)$ konvergent und es gilt

$$\lim_{t \searrow 0} \left\| u_0 - \sum_{k=1}^{\infty} e^{t\lambda_k} \langle u_0, w_k \rangle w_k \right\|_2 = 0.$$

Beweis. (i) Wir zeigen für $t \geq 0$, dass $s_n := \sum_{k=1}^n e^{t\lambda_k} \langle u_0, w_k \rangle w_k$ eine Cauchy-Folge im Hilbert-Raum $L_2(\Omega)$ ist. Tatsächlich gilt für $n > m$ mit der Parsevalschen Identität

$$\|s_n - s_m\|_2^2 = \left\| \sum_{k=m+1}^n e^{t\lambda_k} \langle u_0, w_k \rangle w_k \right\|_2^2 = \sum_{k=m+1}^n e^{2t\lambda_k} |\langle u_0, w_k \rangle|^2 \stackrel{\lambda_k < 0}{\leq} \sum_{k=m+1}^n |\langle u_0, w_k \rangle|^2.$$

Aufgrund der Besselschen Ungleichung konvergiert die rechte Seite hier für $m, n \rightarrow \infty$ gegen 0.

(ii) Es gilt $u_0 = \sum_{k=1}^{\infty} \langle u_0, w_k \rangle w_k$ und daher mit der Parsevalschen Identität

$$\left\| u_0 - \sum_{k=1}^{\infty} e^{t\lambda_k} \langle u_0, w_k \rangle w_k \right\|_2^2 = \left\| \sum_{k=1}^{\infty} (1 - e^{t\lambda_k}) \langle u_0, w_k \rangle w_k \right\|_2^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |1 - e^{t\lambda_k}|^2 |\langle u_0, w_k \rangle|^2$$

Da $|1 - e^{t\lambda_k}|^2 \rightarrow 0$ für $t \searrow 0$ folgt die Behauptung dann mit dominierter Konvergenz. \square

Fassen wir zusammen: Ist $(w_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Eigenfunktionen von Δ aus $C_0^2(\bar{\Omega})$, die eine ONB von $L_2(\Omega)$ bildet, und sind $\lambda_k < 0$ die zugehörigen Eigenwerte, so erhalten wir mit dem Ansatz

$$u(x, t) := \sum_{k=1}^{\infty} e^{t\lambda_k} \langle u_0, w_k \rangle w_k(x), \quad (x, t) \in \bar{\Omega} \times [0, \infty)$$

einen **Kandidaten** für eine Lösung des gemischten Problems

$$\begin{cases} Wu &= 0 & \text{in } \Omega \times (0, \infty), \\ u &= 0 & \text{auf } \partial\Omega \times [0, \infty), \\ u(x, 0) &= u_0(x) & \text{für } x \in \bar{\Omega}. \end{cases}$$

Vorsicht: Hierbei ist a priori noch nicht einmal klar, ob die obige Reihe überhaupt punktweise konvergiert, geschweige denn, dass es sich um eine Lösung von $Wu = 0$ handelt.

Jedoch: Was gesagt werden kann, ist, dass die Reihe für festes $t \geq 0$ im L_2 -Sinne konvergiert und, ebenfalls im L_2 -Sinne, für $t \searrow 0$ die Anfangsdaten $u_0 \in \mathcal{L}_2(\Omega)$ annimmt. **Später** werden wir sehen, dass obiger Kandidat tatsächlich immer eine sogenannte **schwache Lösung** des gemischten Problems ist.

—Ende VL 14—

Wir sehen uns nun ein Beispiel an, wo obiger Ansatz tatsächlich zu einer klassischen Lösung führt, nämlich Wärmeausbreitung in einem Intervall.

Lemma 3.41. Sei $\Omega = (0, \pi) \subseteq \mathbb{R}$.

(i) Der Operator $\Delta = \partial_x^2$ besitzt auf $C_0^2([0, \pi])$ die negativen Eigenwerte $\lambda_k = -k^2, k \in \mathbb{N}$, mit zugehörigen Eigenfunktionen $x \mapsto \sin(kx)$.

(ii) Die Funktionen

$$w_k(x) := \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(kx), \quad x \in (0, \pi), \quad k \in \mathbb{N},$$

bilden eine ONB von $L_2((0, \pi))$.

(iii.a) Sei $b := (b_k)_{k \in \mathbb{N}} \in l_\infty(\mathbb{N})$, $m, n \in \mathbb{N}_0$ und $t_0 > 0$. Dann konvergiert die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k \partial_t^m \partial_x^n (e^{-k^2 t} \sin(kx))$$

für $(x, t) \in [0, \pi] \times [t_0, \infty)$ absolut und gleichmäßig. Insbesondere ist

$$u(x, t) := \sum_{k=1}^{\infty} b_k e^{-k^2 t} \sin(kx) \in C^\infty([0, \pi] \times (0, \infty))$$

und die Ableitungen von u können durch Vertauschen von Ableitung und Summe berechnet werden.

(iii.b) Ist $b \in l_1(\mathbb{N}) \subseteq l_\infty(\mathbb{N})$, so konvergiert die Reihe $u(x, t)$ auch absolut und gleichmäßig auf $[0, \pi] \times [0, \infty)$, d.h. $u \in C([0, \pi] \times [0, \infty))$.

Beweis. (i) Für $k > 0$ und $w \neq 0$ gilt

$$-k^2 = \partial_x^2 w = w'' \quad \Leftrightarrow \quad w(x) = A \sin(kx) + B \cos(kx), \quad x \in (0, \pi),$$

für Konstanten $A, B \in \mathbb{R}$. Da $w(0) = w(\pi) = 0$ gelten müssen, folgt

$$0 = w(0) = B \quad \text{und damit} \quad 0 = w(\pi) = A \sin(k\pi),$$

also $A \neq 0$ und $k \in \mathbb{N}$.

(ii) Dass $\|w_k\|_2 = 1$ und $\langle w_k, w_l \rangle = 0, k \neq l$, verifiziert man sofort. Dass es sich um eine ONB von $L_2(0, \pi)$ handelt, folgt aus der Tatsache (die aus den Grundvorlesungen bekannt sein sollte), dass die Funktionen $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx}, k \in \mathbb{Z}$, eine ONB von $L_2((-\pi, \pi); \mathbb{C})$ bilden. Details finden Sie im Anhang.²⁶

(iii.a) Man beachte, dass $p \in \mathbb{N}_0$ existiert, so dass $\partial_t^m \partial_x^n (e^{-k^2 t} \sin(kx))$ von der Form

$$\pm k^p e^{-k^2 t} f(kx) \quad \text{mit} \quad f \in \{\sin, \cos\}$$

ist. Setzen wir

$$C(t_0, p) := \sup_{k \in \mathbb{N}} k^{p+2} e^{-t_0 k^2} < \infty,$$

können wir also für $(x, t) \in [0, \pi] \times [t_0, \infty)$ abschätzen:

$$\left| b_k \partial_t^m \partial_x^n (e^{-k^2 t} \sin(kx)) \right| = |b_k f(kx)| k^p e^{-k^2 t} \leq \|b\|_\infty k^{-2} k^{p+2} e^{-k^2 t_0} \leq C(t_0, p) \|b\|_\infty k^{-2}.$$

Da $\sum_k \frac{1}{k^2} < \infty$, folgt hieraus die Behauptung.

(iii.b) Im Falle $b = (b_k) \in l_1(\mathbb{N})$ argumentieren wir wie in Teil (iii.a) unter Verwendung der Abschätzung

$$\left| b_k e^{-k^2 t} \sin(kx) \right| \leq |b_k|, \quad x \in [0, \pi], t \geq 0, k \in \mathbb{N}.$$

□

Satz 3.42. Sei $u_0 \in L_2((0, \pi))$ und

$$b_k := \frac{2}{\pi} \int_0^\pi u_0(y) \sin(ky) dy, \quad k \in \mathbb{N},$$

die Folge der **Fourier-Sinus-Koeffizienten** von u_0 . Ferner sei

$$u(x, t) := \sum_{k=1}^{\infty} b_k e^{-tk^2} \sin(kx), \quad (x, t) \in [0, \pi] \times (0, \infty).$$

(i) Es ist $u \in C^\infty([0, \pi] \times (0, \infty))$ und

$$\begin{aligned} Wu &= 0 \text{ auf } [0, \pi] \times (0, \infty) \\ u(0, t) &= u(\pi, t) = 0 \text{ für alle } t \in (0, \infty). \end{aligned}$$

(ii) Es gilt

$$\lim_{t \rightarrow 0} \int_0^\pi |u(x, t) - u_0(x)|^2 dx = 0,$$

d.h. die Anfangswerte werden im quadratischen Mittel angenommen. Ist $u_0 \in C_0^2([0, \pi])$, so gilt dies sogar punktweise, d.h.

$$\lim_{t \rightarrow 0} u(x, t) = u_0(x), \quad x \in [0, \pi].$$

Beweis. (i) Mit $w_k(x) := \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(kx)$ gilt $b_k = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \langle u_0, w_k \rangle$, $k \in \mathbb{N}$. Da die $(w_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine ONB von $L_2((0, \pi))$ bilden, zeigt die Parsevalsche Identität, dass $(b_k)_{k \in \mathbb{N}} \in l_2(\mathbb{N}) \subseteq l_\infty(\mathbb{N})$. Nach Lemma 3.41 (iii.a) ist also

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{-tk^2} \langle u_0, w_k \rangle w_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k e^{-tk^2} \sin(kx) \in C^\infty([0, \pi] \times (0, \infty))$$

und $u(0, t) = u(\pi, t) = 0$ für alle $t > 0$. Da jeder Summand der Reihe die homogene Wärmeleitungsgleichung löst, zeigt Lemma 3.41 ferner, dass $Wu = 0$ auf $[0, \pi] \times (0, \infty)$ gilt.

(ii) Die erste Behauptung folgt direkt aus Proposition 3.40. Gilt sogar $u_0 \in C_0^2([0, \pi])$, so konvergiert die Fourier-Sinus-Reihe von u_0 punktweise gegen u_0 , d.h.

$$u_0(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(kx), \quad x \in [0, \pi].$$

Einen Beweis hierzu findet man etwa in [8]. Ferner zeigt zweifache partielle Integration, dass eine Konstante $C \geq 0$ existiert, so dass

$$|b_k| = \frac{2}{\pi} \left| \int_0^\pi u_0(y) \sin(ky) dy \right| \leq \frac{C}{k^2}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Also gilt in diesem Fall $(b_k)_{k \in \mathbb{N}} \in l_1(\mathbb{N})$. Aus Lemma 3.41 (iii.b) folgt damit die Behauptung. \square

Bemerkung 3.43. Damit die Methode der Trennung der Variablen auch für allgemeine $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ zum Erfolg führt, müssen wir zeigen, dass zum Laplace-Operator Δ stets eine Folge von Eigenfunktionen $(w_k)_{k \in \mathbb{N}}$ aus $C_0^2(\bar{\Omega})$ existiert, so dass $(w_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine ONB von $L_2(\Omega)$ bildet. Hierauf werden wir später wieder zurückkommen.

4. Die Wellengleichung

Stichpunkte. Wellengleichung, d'Alembert-Operator, Cauchy- und gemischtes Problem, Energiemethoden, Abhängigkeitskegel, endliche Ausbreitungsgeschwindigkeit, d'Alembertsche Lösung, Fourier-Methode, Trennung der Variablen

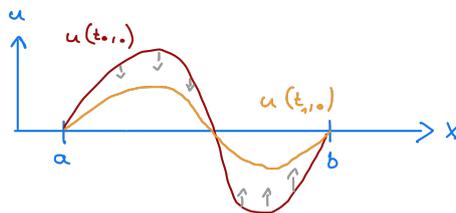
In diesem Abschnitt wollen wir noch einen (allerdings nicht mehr so ausführlichen) Blick auf die sogenannte **Wellengleichung**

$$\partial_t^2 u - \Delta_x u = f$$

werfen. Hierbei ist die stetige Funktion $f : \Omega_T := \Omega \times (0, T) \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben und gesucht sind klassische Lösungen $u \in C^2(\Omega_T)$, die die Gleichung punktweise erfüllen. Unter Verwendung des linearen **d'Alembert-Operators**¹

$$\square := \partial_t^2 - \Delta_x$$

können wir die Wellengleichung kurz in der Form $\square u = f$ schreiben. Die Gleichung beschreibt die Ausbreitung von Wellen (z.B. mechanische, elektromagnetische oder Schallwellen) in $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$. Für $\Omega = (a, b) \subseteq \mathbb{R}$ können wir etwa an eine schwingende Saite denken. Hierbei würde $u(x, t)$ die Auslenkung der Saite zur Zeit t an der Stelle x beschreiben und f wäre eine zusätzliche externe auf die Saite wirkende Kraft (in Anhang A.3 wird die Herleitung der eindimensionalen Wellengleichung kurz beschrieben).



Um die Bewegung einer schwingenden Saite zu beschreiben, müssen wir die Anfangsauslenkung und die Anfangsgeschwindigkeit der Saite festlegen. Diese Beobachtung spiegelt sich in nachfolgender Definition wieder (vergleiche die Definitionen 3.1 und 3.4 für die Wärmeleitungsgleichung).

Definition 4.1. Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ offen, $0 < T \leq \infty$ und $f \in C(\Omega_T)$.

(i) Sind $u_0, v_0 \in C(\Omega)$, so besteht das zugehörige **Cauchy-Problem für die Wellengleichung** im Auffinden einer klassischen Lösung $u \in C^2(\Omega_T) \cap C^1(\Omega \times [0, T])$ mit

$$(\star) \quad \begin{cases} \square u = f \text{ in } \Omega_T \\ u(x, 0) = u_0(x) \text{ für } x \in \Omega \\ \partial_t u(x, 0) = v_0(x) \text{ für } x \in \Omega. \end{cases}^2$$

(ii) Ist $\Omega \neq \mathbb{R}^d$ und $u_R \in C(\partial\Omega \times [0, T])$, so besteht das **gemischte Rand- und Anfangswertproblem** für die Wellengleichung im Auffinden einer Lösung $u \in C^2(\Omega_T) \cap C^1(\Omega \times [0, T]) \cap C(\bar{\Omega} \times [0, T])$ von (\star) , die die **Dirichlet-Randbedingung**

$$u = u_R \text{ auf } \partial\Omega \times [0, T)$$

erfüllt.

Bemerkung 4.2. Damit das gemischte Problem lösbar ist, müssen Anfangs- und Randbedingung wieder konsistent sein, d.h. es muss gelten

$$\forall z \in \partial\Omega : u_R(z, 0) = \lim_{\Omega \ni x \rightarrow z} u_0(x).$$

4.1. Eindeutigkeit von Lösungen

Wir schauen nun wieder zunächst auf die Eindeutigkeit von Lösungen. Diese hatten wir bei der elliptischen Poisson-Gleichung und bei der parabolischen Wärmeleitungsgleichung mit Hilfe von Maximumprinzipien gewonnen. Leider existieren solche für die **hyperbolische** Wellengleichung nicht mehr, wie wir unten sehen werden. Stattdessen verwendet man sogenannte **Energimethoden**. Dazu sei

$$E(t) := E(u, t) := \frac{1}{2} \int_{\Omega} ((\partial_t u(x, t))^2 + |\nabla_x u(x, t)|^2) dx$$

das sogenannte **Energiefunktional** für u . Dieses beschreibt die Summe aus kinetischer und potentieller Energie des durch u beschriebenen Systems, also dessen Gesamtenergie, zur Zeit t . Aus physikalischer Sicht sollte diese für ein geschlossenes System zeitlich konstant sein. Dies ist der Inhalt des folgenden Lemmas.

Lemma 4.3. Sei $0 < T \leq \infty$ und $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ sei offen und beschränkt und besitze einen C^1 -Rand. Ferner sei $u \in C^2(\overline{\Omega} \times [0, T))$ und es gelte

$$\square u = 0 \text{ in } \Omega_T \quad \text{und} \quad \partial_t u = 0 \text{ auf } \partial\Omega \times [0, T).$$

Dann gilt $E(t) = E(0)$ für alle $0 \leq t < T$.

Beweis. Mit dem Satz über Parameterintegrale (Satz A.2.1) folgt, dass E auf $[0, T)$ differenzierbar ist und

$$\begin{aligned} E'(t) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \partial_t ((\partial_t u)^2 + |\nabla_x u|^2) dx = \int_{\Omega} ((\partial_t^2 u) \partial_t u + \langle \nabla_x u, \nabla_x (\partial_t u) \rangle) dx \\ &\stackrel{\partial_t^2 u = \Delta_x u}{=} \int_{\Omega} ((\Delta_x u) \partial_t u + \langle \nabla_x u, \nabla_x (\partial_t u) \rangle) dx \stackrel{5.2.10}{=} \int_{\partial\Omega} (\partial_t u) \partial_{\nu(x)} u d\sigma(x) \stackrel{\partial_t u|_{\partial\Omega \times [0, T)} = 0}{=} 0. \end{aligned}$$

Hieraus folgt die Behauptung. □

Satz 4.4. Sei $0 < T \leq \infty$ und $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ sei offen und beschränkt und besitze einen C^1 -Rand. Ferner seien $f \in C(\Omega_T)$, $u_0, v_0 \in C(\Omega)$ und $u_R \in C(\partial\Omega \times [0, T))$. Dann besitzt das gemischte Problem

$$(\diamond) \quad \begin{cases} \square u = f \text{ in } \Omega_T \\ u(x, 0) = u_0(x) \text{ für } x \in \Omega \\ \partial_t u(x, 0) = v_0(x) \text{ für } x \in \Omega \\ u = u_R \text{ auf } \partial\Omega \times [0, T) \end{cases}$$

höchstens eine Lösung $u \in C^2(\overline{\Omega} \times [0, T))$.³

Beweis. Seien $u_1, u_2 \in C^2(\overline{\Omega} \times [0, T))$ zwei Lösungen und $u := u_1 - u_2$, d.h. u erfüllt (\diamond) mit $f = 0, u_0 = v_0 = 0$ und $u_R = 0$. In diesem Fall gilt also insbesondere $u = 0$ auf $\partial\Omega \times [0, T)$, d.h.

auch $\partial_t u$ verschwindet auf dieser Menge und Lemma 4.3 zeigt, dass

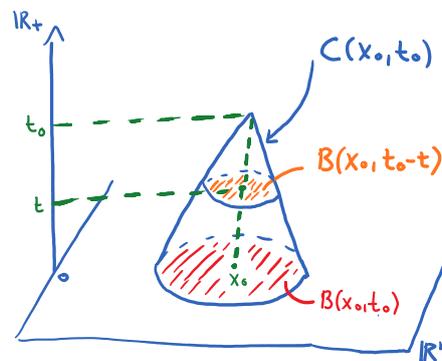
$$E(t) := \frac{1}{2} \int_{\Omega} ((\partial_t u(x, t))^2 + |\nabla_x u(x, t)|^2) dx = E(0)$$

für alle $t \in [0, T)$. Aber nach Voraussetzung gilt $u(x, 0) = \partial_t u(x, 0) = 0$ für alle $x \in \Omega$, d.h. es gilt $E(0) = 0$ und somit auch $E(t) = 0$ für alle $0 \leq t < T$. Dies impliziert $\partial_t u = |\nabla_x u| = 0$ auf $\Omega \times [0, T)$, d.h. u ist auf jeder Zusammenhangskomponente dieser Menge konstant. Da $u(x, 0) = 0$ für alle $x \in \Omega$, muss daher $u = 0$ auf ganz $\Omega \times [0, T)$ gelten. Also ist $u_1 = u_2$. \square

Auch das Cauchy-Problem für die Wellengleichung in \mathbb{R}^d ist eindeutig lösbar. Als Vorbereitung für dieses Resultat zeigen wir zunächst, dass die Lösung $u(x_0, t_0)$ zur Zeit $t_0 > 0$ im Punkt $x_0 \in \mathbb{R}^d$ nur von den Anfangswerten in der Kugel $B(x_0, t_0)$ abhängt. Zu diesem Zweck betrachten wir den sogenannten **Abhängigkeitskegel**

$$C(x_0, t_0) := \{(x, t) \in \mathbb{R}^{d+1} : 0 \leq t < t_0, x \in B(x_0, t_0 - t)\}.$$

Wir setzen $C[x_0, t_0] := \overline{C(x_0, t_0)}$.



Abhängigkeitskegel von (x_0, t_0) .

Lemma 4.5. Sei $u \in C^2(C[x_0, t_0])$ und es gelte $\square u = 0$ in $C(x_0, t_0)$. Gilt $u(x, 0) = \partial_t u(x, 0) = 0$ für alle $x \in B(x_0, t_0)$, so gilt $u = 0$ auf $C[x_0, t_0]$.

Beweis. Wir betrachten das Energiefunktional von u in $B_{t_0-t} := B(x_0, t_0 - t)$ zur Zeit $t \in [0, t_0)$:

$$F(t) := \frac{1}{2} \int_{B_{t_0-t}} ((\partial_t u(x, t))^2 + |\nabla_x u(x, t)|^2) dx.$$

Diese Funktion ist stetig, differenzierbar (siehe unten) und nichtnegativ mit $F(0) = 0$ (aufgrund der verschwindenden Anfangswerte). Wir wollen nun zeigen, dass $F'(t) \leq 0$ für $t \in [0, t_0)$. Dies hätte zur Folge, dass $F = 0$ in ganz $[0, t_0)$, d.h. $\partial_t u = 0$ und $\nabla_x u = 0$ in $C(x_0, t_0)$. Also wäre u konstant in $C(x_0, t_0)$ und somit, aufgrund der Anfangswerte, identisch 0.

Um zu sehen, dass F differenzierbar ist und um die Ableitung zu berechnen, betrachten wir die Funktion

$$\varphi(r, t) = \frac{1}{2} \int_{B_r} ((\partial_t u(x, t))^2 + |\nabla_x u(x, t)|^2) dx,$$

definiert für $0 \leq t < t_0$ und $0 \leq r \leq t_0 - t$. Diese Funktion ist nach t differenzierbar und wie im

Beweis von Lemma 4.3 sehen wir, dass

$$\partial_t \varphi(r, t) = \int_{B_r} ((\partial_t^2 u)(\partial_t u) + \langle \nabla_x u, \nabla_x \partial_t u \rangle) dx = \int_{\partial B_r} (\partial_t u)(\partial_{\nu(x)} u) d\sigma(x).$$

Insbesondere ist $\partial_t \varphi$ auch stetig. Da

$$(\partial_t u)(\partial_{\nu(x)} u) \leq |\partial_t u| |\nabla_x u| \leq \frac{1}{2} ((\partial_t u)^2 + |\nabla_x u|^2),$$

erhalten wir ferner

$$(*) \quad \partial_t \varphi(r, t) \leq \frac{1}{2} \int_{\partial B_r} ((\partial_t u)^2 + |\nabla_x u|^2) d\sigma(x).$$

Stellen wir andererseits φ mittels Zwiebelintegration (vgl. Erinnerung 1.6) dar als

$$\varphi(r, t) = \frac{1}{2} \int_0^r \left(\int_{\partial B_s} ((\partial_t u(x, t))^2 + |\nabla_x u(x, t)|^2) d\sigma(x) \right) ds,$$

so sehen wir, dass φ auch nach r stetig differenzierbar ist und dass

$$\partial_r \varphi(r, t) = \frac{1}{2} \int_{\partial B_r} ((\partial_t u(x, t))^2 + |\nabla_x u(x, t)|^2) d\sigma(x) \stackrel{(*)}{\geq} \partial_t \varphi(r, t).$$

Insgesamt folgt, dass auch die Funktion $F(t) = \varphi(t_0 - t, t)$ differenzierbar ist und mit der Kettenregel erhalten wir

$$F'(t) = -\partial_r \varphi(t_0 - t, t) + \partial_t \varphi(t_0 - t, t) \leq 0.$$

Dies komplettiert den Beweis. □

Aus diesem Lemma folgt nicht nur die Eindeutigkeit des Cauchy-Problems für die Wellengleichung auf \mathbb{R}^d sondern auch die endliche Ausbreitungsgeschwindigkeit von Störungen.

Satz 4.6. Sei $0 < T \leq \infty$, $f \in C(\mathbb{R}^d \times (0, T))$ und $u_0, v_0 \in C(\mathbb{R}^d)$.

(i) **Eindeutigkeit auf \mathbb{R}^d :** Das Cauchy-Problem

$$\begin{cases} \square u = f \text{ in } \mathbb{R}^d \times (0, T) \\ u(x, 0) = u_0(x) \text{ für } x \in \mathbb{R}^d \\ \partial_t u(x, 0) = v_0(x) \text{ für } x \in \mathbb{R}^d \end{cases}$$

besitzt höchstens eine Lösung $u \in C^2(\mathbb{R}^d \times [0, T])$.⁴

(ii) **Endliche Ausbreitungsgeschwindigkeit:** Gilt

$$\text{supp}(u_0) \subseteq B[0, R] \quad \text{und} \quad \text{supp}(v_0) \subseteq B[0, R],$$

so folgt für jede Lösung $u \in C^2(\mathbb{R}^d \times [0, T])$ des Cauchy-Problems, dass

$$\forall t \in (0, T) : \quad \text{supp}(u(\cdot, t)) \subseteq B[0, R + t].$$

Beweis. (i) Seien $u_1, u_2 \in C^2(\mathbb{R}^d \times [0, T])$ zwei Lösungen und $u := u_1 - u_2$. Wähle beliebige $x_0 \in \mathbb{R}^d, t_0 \in (0, T)$. Da $u(x, 0) = \partial_t u(x, 0) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^d$, erhalten wir aus Lemma 4.5, dass $u = 0$ im Abhängigkeitskegel $C(x_0, t_0)$, d.h. insbesondere gilt $u(x_0, t_0) = 0$. Also ist $u = 0$ auf $\mathbb{R}^d \times [0, T)$ und die Behauptung folgt.

(ii) Sei $t \in (0, T)$ und $x \notin B[0, R + t]$. Dann sind die Kugeln $B[0, R]$ und $B[x, t]$ disjunkt, d.h. u_0, v_0 verschwinden in $B(x, t)$. Aus Lemma 4.5 folgt also, dass u im Abhängigkeitskegel $C(x, t)$ verschwindet. Somit ist $u(x, t) = 0$ und daher $\text{supp}(u(\cdot, t)) \subseteq B[0, R + t]$. \square

Bemerkung 4.7. Man beachte die **Unterschiede zur Wärmeleitungsgleichung**:

- (i) Die Eindeutigkeit der Lösung des Cauchy-Problems zur Wellengleichung auf \mathbb{R}^d erhalten wir, ohne Wachstums- oder Beschränktheitsanforderungen an die Lösung stellen zu müssen.
- (ii) Bei der Wärmeleitungsgleichung hatten wir es mit einer unendlichen Ausbreitungsgeschwindigkeit zu tun, vergleiche Bemerkung 3.34.

4.2. Existenz von Lösungen

In diesem Abschnitt wollen wir kurz auf die Existenz von Lösungen eingehen. Hierbei behandeln wir nur den eindimensionalen Fall noch etwas ausführlicher. Außerdem beschränken wir uns auf den homogenen Fall ($f = 0$). Die inhomogene Wellengleichung kann, analog zur Wärmeleitungsgleichung, dann mit einer Version der Duhamelschen Formel gelöst werden (vergleiche Satz 3.36 und dessen Motivation).

Lemma 4.8. Für $u \in C^2(\mathbb{R}^2)$ sind äquivalent:

- (i) $\square u(x, t) = 0$ für alle $(x, t) \in \mathbb{R}^2$.
- (ii) Es existieren $F, G \in C^2(\mathbb{R})$, so dass $u(x, t) = F(x - t) + G(x + t)$ für alle $(x, t) \in \mathbb{R}^2$, d.h. u ist eine Überlagerung von nach rechts bzw. links laufenden Wellen.



Beweis. (ii) \Rightarrow (i) : Direktes Nachrechnen.

(i) \Rightarrow (ii) : Sei $u \in C^2(\mathbb{R}^2)$ eine Lösung von $\partial_t^2 u - \partial_x^2 u = 0$. Setze nun

$$x = \frac{a+b}{2}, t = \frac{a-b}{2} \quad \text{bzw.} \quad a = x+t, b = x-t$$

und definiere $v \in C^2(\mathbb{R}^2)$ durch

$$v(a, b) := u\left(\frac{a+b}{2}, \frac{a-b}{2}\right) = u(x, t).$$

Dann folgt aus der Kettenregel, dass

$$\partial_a v(a, b) = \frac{1}{2}(\partial_x u(x, t) + \partial_t u(x, t)), \quad \partial_b v(a, b) = \frac{1}{2}(\partial_x u(x, t) - \partial_t u(x, t))$$

und somit (unter Vertauschung der partiellen Ableitungen)

$$\partial_a \partial_b v(a, b) = \frac{1}{4}(\partial_x + \partial_t)(\partial_x - \partial_t)u(x, t) = \frac{1}{4}(\partial_x^2 - \partial_t^2)u(x, t) = 0.$$

Dies zeigt, dass $\partial_b v(a, b)$ unabhängig von a ist, d.h. es existiert $f \in C^1(\mathbb{R})$ mit $\partial_b v(a, b) = f(b)$ für alle $a, b \in \mathbb{R}$. Nun sei $F \in C^2(\mathbb{R})$ eine Stammfunktion von f . Dann folgt

$$v(a, b) - v(a, a) = \int_a^b \partial_b v(a, s) ds = \int_a^b f(s) ds = F(b) - F(a).$$

Mit $G(a) := v(a, a) - F(a)$ folgt

$$u(x, t) = v(a, b) = F(b) + G(a) = F(x - t) + G(x + t).$$

□

Wir verwenden Lemma 4.8 nun, um eine klassische Lösung der eindimensionalen homogenen Wellengleichung zu gewinnen, die für $u_0 \in C^2(\mathbb{R})$ und $u_1 \in C^1(\mathbb{R})$ die Anfangsbedingungen

$$u(x, 0) = u_0(x) \quad \text{und} \quad \partial_t u(x, 0) = v_0(x)$$

für $x \in \mathbb{R}$ erfüllt. Nach dem Lemma ist $u \in C^2(\mathbb{R}^2)$ genau dann eine Lösung von $\square u = 0$, wenn $F, G \in C^2(\mathbb{R})$ existieren, so dass

$$u(x, t) = F(x - t) + G(x + t), \quad (x, t) \in \mathbb{R}^2.$$

Die Anfangsbedingungen werden genau dann erfüllt, wenn

$$\begin{cases} u_0(x) &= F(x) + G(x) \\ v_0(x) &= -F'(x) + G'(x). \end{cases}$$

Nun integrieren wir die zweite Gleichung und erhalten, dass dieses System genau dann erfüllt wird, wenn

$$\begin{cases} u_0(x) &= F(x) + G(x) \\ \int_0^x v_0(y) dy &= -F(x) + G(x) + (F(0) - G(0)). \end{cases}$$

Dieses lineare System für F, G hat die Lösungen

$$F(x) = \frac{1}{2} \left(u_0(x) - \int_0^x v_0(y) dy \right) + \frac{1}{2} (F(0) - G(0))$$

und

$$G(x) = \frac{1}{2} \left(u_0(x) + \int_0^x v_0(y) dy \right) - \frac{1}{2} (F(0) - G(0)).$$

Hiermit erhalten wir dann auch sofort eine Formel für $u(x, t) = F(x - t) + G(x + t)$. Wir haben damit den folgenden Satz gezeigt.

Satz 4.9 (D'Alembert). Seien $u_0 \in C^2(\mathbb{R}), v_0 \in C^1(\mathbb{R})$ und

$$u(x, t) = \frac{1}{2} (u_0(x - t) + u_0(x + t)) + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} v_0(y) dy, \quad (x, t) \in \mathbb{R}^2.$$

Dann ist $u \in C^2(\mathbb{R}^2)$ und es gilt $\square u = 0$ auf \mathbb{R}^2 . Ferner ist $u|_{\mathbb{R} \times [0, \infty)}$ die eindeutige klassische Lösung des Cauchy-Problems $\square u = 0$ auf $\mathbb{R}^d \times (0, \infty)$ und

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad \partial_t u(x, 0) = v_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^d.$$

Bemerkung 4.10. Im Vergleich zum Cauchy-Problem für die Wärmeleitungsgleichung fallen

wieder ein paar Unterschiede auf:

- (i) Wir erhalten sogar eine Lösung auf ganz \mathbb{R}^2 . Bei **zeitumkehr** $(x, t) \mapsto (x, -t)$ bleibt dies eine Lösung. Bei der Wärmeleitungsgleichung ist dies nicht der Fall, denn gilt $(\partial_t - \partial_x^2)u = 0$ auf $\mathbb{R} \times (0, \infty)$, so löst $v(x, t) := u(x, -t)$ zwar die Gleichung $(\partial_t + \partial_x^2)v = 0$ auf $\mathbb{R} \times (-\infty, 0)$, aber im Allgemeinen **nicht** die Gleichung $(\partial_t - \partial_x^2)v = 0$.
- (ii) Die Lösung u ist nicht glatter als der Anfangswert u_0 (**keine Glättung**).
- (iii) Die Lösung erfüllt **kein Maximumprinzip**. Zum Beispiel ist u im Falle $v_0 \equiv 0$ und u_0 periodisch sowohl zeit- als auch ortsperiodisch.

Werfen wir auch einen kurzen Blick auf den Fall $\Omega = \mathbb{R}^d$ für $d \geq 2$, d.h.

$$(\diamond) \quad \begin{cases} \partial_t^2 u = \Delta_x u & \text{in } \mathbb{R}^d \times (0, \infty), \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{für } x \in \mathbb{R}^d, \\ \partial_t u(x, 0) = v_0(x) & \text{für } x \in \mathbb{R}^d. \end{cases}$$

Wir gehen wieder formal vor und leiten unter Verwendung der partiellen Fouriertransformation \mathcal{F}_x aus obigem Anfangswertproblem u die folgende gewöhnliche Differentialgleichung für $t \mapsto \hat{u}(\xi, t) := (\mathcal{F}_x u)(\xi, t)$ her:

$$\partial_t^2 \hat{u}(\xi, t) = -|\xi|^2 \hat{u}(\xi, t), \quad \hat{u}(\xi, 0) = \hat{u}_0(\xi), \quad \partial_t \hat{u}(\xi, 0) = \hat{v}_0(\xi).$$

Diese gewöhnliche Differentialgleichung wird, mitsamt der Anfangsbedingungen, eindeutig gelöst durch

$$\hat{u}(\xi, t) = \hat{u}_0(\xi) \cos(|\xi|t) + \hat{v}_0(\xi) \frac{\sin(|\xi|t)}{|\xi|}$$

Wenden wir die inverse partielle Fouriertransformation an, so erhalten wir hieraus wieder einen möglichen Kandidaten für die Lösung von (\diamond) . Dass sich diese formalen Rechnungen unter geeigneten Voraussetzungen an u_0 und v_0 tatsächlich rechtfertigen lassen (obwohl beispielsweise \sin, \cos keine Schwartz-Funktionen sind), zeigt der folgende Satz (auf dessen Beweis wir verzichten).

Satz 4.11. Seien $k, d \in \mathbb{N}$ mit $k \geq \frac{d+1}{2}$. Ferner seien $u_0 \in C_c^{k+2}(\mathbb{R}^d)$, $v_0 \in C_c^{k+1}(\mathbb{R}^d)$ und

$$v(\xi, t) := \hat{u}_0(\xi) \cos(|\xi|t) + \hat{v}_0(\xi) \frac{\sin(|\xi|t)}{|\xi|}, \quad (\xi, t) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}.$$

Definieren wir $u : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$ durch

$$u(x, t) := (2\pi)^{-d/2} \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\langle x, \xi \rangle} v(\xi, t) d\xi,$$

so ist $u \in C^2(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R})$ und $u|_{\mathbb{R}^d \times [0, \infty)}$ ist die eindeutige klassische Lösung von (\diamond) .

Bemerkung 4.12. Zur Berechnung obiger Lösung müssen zunächst die Fouriertransformierten der Anfangsdaten v_0 und u_0 berechnet werden, was eine nicht-triviale Aufgabe sein kann. Es existieren andere Methoden, die Lösungen direkt über v_0 und h_0 ausdrücken, etwa die **Methode der sphärischen Mittel**, die die Berechnung auf den eindimensionalen Fall zurückführt, siehe Anhang.⁵

Werfen wir zum Abschluss auch noch einen Blick auf die Existenz von Lösungen für gemischte Probleme auf beschränkten Teilmengen $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$. Exemplarisch soll das folgende homogene Problem

mit homogenen Dirichlet-Randwerten betrachtet werden:

$$\begin{cases} \square u = 0 & \text{in } \Omega \times (0, \infty), \\ u = 0 & \text{auf } \partial\Omega \times [0, \infty), \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{für } x \in \Omega, \\ \partial_t u(x, 0) = v_0(x) & \text{für } x \in \Omega. \end{cases}$$

Beachte: Die Konsistenz der Rand- und Anfangsbedingungen erfordert, dass $u_0|_{\partial\Omega} = v_0|_{\partial\Omega} = 0$.

Unsere Methode der Wahl ist hier, wie bei der Wärmeleitungsgleichung, die **Trennung der Variablen**, d.h. wir machen den Ansatz $u(x, t) = v(t)w(x)$. Um die Randbedingung zu erfüllen, fordern wir hier wieder, dass $w \in C_0^2(\overline{\Omega})$.

Lemma 4.13. Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ offen und beschränkt mit C^1 -Rand. Ferner seien $v \in C^2((0, \infty)) \setminus \{0\}$, $w \in C_0^2(\overline{\Omega}) \setminus \{0\}$ und

$$u(x, t) := v(t)w(x), \quad (x, t) \in \Omega \times (0, \infty).$$

Dann sind äquivalent:

- (i) $\square u = 0$ in $\Omega \times (0, \infty)$.
- (ii) Es existieren $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$, die nicht beide verschwinden, und $\lambda > 0$, so dass

$$\forall x \in \Omega : \quad \Delta w(x) = -\lambda w(x),$$

d.h. $-\lambda$ ist negativer Eigenwert von Δ zur Eigenfunktion w , und

$$\forall t > 0 : \quad v(t) = C_1 \cos(\sqrt{\lambda}t) + C_2 \sin(\sqrt{\lambda}t).$$

Beweis. (ii) \Rightarrow (i): Beachten wir, dass obiges v die allgemeine Lösung von $v'' = -\lambda v$ ist, folgt sofort für alle $(x, t) \in \Omega \times (0, \infty)$, dass

$$\square u(x, t) = v''(t)w(x) - v(t)\Delta w(x) = -\lambda v(t)w(x) + \lambda v(t)w(x) = 0.$$

(i) \Rightarrow (ii): Aus $\square u = 0$ folgt

$$v''(t)w(x) = v(t)\Delta w(x), \quad (x, t) \in \Omega \times (0, \infty).$$

Ist nun $u(x_0, t_0) \neq 0$, so folgt

$$\Delta w(x) = \underbrace{\left(\frac{v''(t_0)}{v(t_0)}\right)}_{=:-\lambda} w(x), \quad x \in \Omega,$$

und

$$v''(t) = \left(\frac{\Delta w(x_0)}{w(x_0)}\right) v(t) = -\lambda v(t), \quad t > 0.$$

Hieraus folgt die Behauptung unter Beachtung der Tatsache, dass die Eigenwerte von Δ in $C_0^2(\overline{\Omega})$ nach Lemma 3.37 negativ sind. \square

Mittels Fourierreentwicklung erhalten wir nun wie im Falle der Wärmeleitungsgleichung einen Lösungsansatz für unser gemischtes Problem, sofern wir eine ONB von Eigenfunktionen des Laplace-Operators kennen.

Proposition 4.14. Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ offen und beschränkt mit C^1 -Rand. Weiterhin seien $u_0 \in C_0^2(\overline{\Omega})$ und $v_0 \in L_2(\Omega)$. Schließlich sei $(w_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $C_0^2(\overline{\Omega})$ bestehend aus Eigenfunktionen von Δ zum Eigenwert $-\lambda_k$ mit $\lambda_k > 0$. Ist dann $(w_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine ONB von $L_2(\Omega)$, so konvergieren die Reihen

$$(\heartsuit) \quad u(t) := \sum_{k=1}^{\infty} \left(\cos(\sqrt{\lambda_k} t) \langle u_0, w_k \rangle + \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} \sin(\sqrt{\lambda_k} t) \langle v_0, w_k \rangle \right) w_k$$

und (dessen formale Zeitableitung)

$$v(t) := \sum_{k=1}^{\infty} \left(-\sqrt{\lambda_k} \sin(\sqrt{\lambda_k} t) \langle u_0, w_k \rangle + \cos(\sqrt{\lambda_k} t) \langle v_0, w_k \rangle \right) w_k$$

für jedes $t \geq 0$ in $L_2(\Omega)$ und es gilt

$$\lim_{t \searrow 0} \|u(t) - u_0\|_2 = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{t \searrow 0} \|v(t) - v_0\|_2 = 0.$$

Beweis. Analog zum Beweis von Proposition 3.40. Details im Anhang.⁶ □

Unter den Voraussetzungen der Proposition haben wir also mittels (\heartsuit) wieder einen **Kandidaten für eine Lösung** unseres gemischten Problems erhalten (nämlich $u(t, x) := u(t)(x)$). Für konkretere Situationen muss dann gezeigt werden, dass es sich tatsächlich um eine klassische Lösung handelt. Wie im Falle der Wärmeleitungsgleichung hängt das Verfahren auch hier davon ab, dass man Informationen über die Eigenwerte des Laplace-Operators auf $C_0^2(\overline{\Omega})$ erhalten kann. Dies wird später wieder thematisiert.

Wir betrachten exemplarisch noch den einfachen eindimensionalen Fall $\Omega = (0, \pi)$, d.h.

$$(\star) \quad \begin{cases} \partial_t^2 u = \partial_x^2 u & \text{in } (0, \pi) \times (0, \infty), \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0 & \text{für } t \in [0, \infty), \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{für } x \in [0, \pi], \\ \partial_t u(x, 0) = v_0(x) & \text{für } x \in [0, \pi]. \end{cases}$$

Aus Lemma 3.41 wissen wir schon, dass $\Delta_x = \partial_x^2$ in diesem Fall die Eigenwerte $-k^2, k \in \mathbb{N}$, mit zugehörigen L_2 -normierten Eigenfunktionen $w_k(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(kx)$ besitzt. Der Ansatz (\heartsuit) hat in diesem Fall also die Form

$$(\star\star) \quad u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos(kt) + \frac{b_k}{k} \sin(kt) \right) \sin(kx),$$

mit den Fourier-Sinus-Koeffizienten

$$a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi u_0(x) \sin(kx) dx \quad \text{und} \quad b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi v_0(x) \sin(kx) dx.$$

Satz 4.15. Es sei $u_0 \in C_0^3([0, \pi])$ und $v_0 \in C_0^2([0, \pi])$. Dann ist die durch $(\star\star)$ definierte Funktion $u \in C^2([0, \pi] \times [0, \infty))$ und u ist die eindeutige klassische Lösung des gemischten Problems (\star) .

Beweis. Analog zum Beweis von Satz 3.42, siehe Anhang.⁷ □

5. Klassifikation von partiellen Differentialgleichungen

Zum Abschluss des ersten Teiles der Vorlesung wollen wir nun noch kurz auf die schon des öfteren angerissene Klassifizierung von partiellen Differentialoperatoren zu sprechen kommen. Wir betrachten hierbei nur **lineare Differentialoperatoren 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten** (vergleiche Definition 0.1). Ein solcher Operator $L : C^2(\Omega) \rightarrow C(\Omega)$ hat die Gestalt

$$(Lu)(x) = \sum_{j,k=1}^d a_{jk} \partial_{jk} u(x) + \sum_{j=1}^d b_j \partial_j u(x) + cu(x), \quad x \in \Omega,$$

mit $A = (a_{jk})_{j,k=1}^d \in \mathbb{R}^{d \times d} \setminus \{0\}$, $b = (b_1, \dots, b_d)^t \in \mathbb{R}^d$ und $c \in \mathbb{R}$. Hierbei kann ohne Einschränkung angenommen werden, dass die Matrix A **symmetrisch** ist.¹

Nun sei $M \in \mathbb{R}^{d \times d}$ invertierbar. Wir betrachten M als lineare Koordinatentransformation

$$M : \Omega \rightarrow M(\Omega) =: \tilde{\Omega}$$

und versuchen diese nun so zu wählen, dass L in den neuen Koordinaten $y := Mx$ eine möglichst einfache Gestalt hat. Dazu sei

$$j_M : C^2(\Omega) \rightarrow C^2(\tilde{\Omega}), \quad (j_M u)(y) := u(M^{-1}y) = u(x).$$

Stellen wir nun L in den neuen Koordinaten dar, d.h. betrachten wir

$$L_M : C^2(\tilde{\Omega}) \rightarrow C(\tilde{\Omega}), \quad L_M := j_M \circ L \circ j_M^{-1} = j_M \circ L \circ j_{M^{-1}},$$

so zeigt eine kurze Rechnung unter Verwendung der Kettenregel, dass

$$(L_M v)(y) = \sum_{j,k=1}^d (MAM^t)_{jk} \partial_{jk} v(y) + \sum_{j=1}^d (Mb)_j \partial_j v(y) + cv(y).$$

Aus der linearen Algebra wissen Sie, dass die symmetrische Matrix $A \in \mathbb{R}^{d \times d}$ durch eine orthogonale Matrix M in **Diagonalgestalt** überführt werden kann, d.h. wir können erreichen, dass

$$MAM^t = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_d)$$

mit $\lambda_1, \dots, \lambda_d \in \mathbb{R}$. Man beachte, dass dies genau die Eigenwerte von A sind (mit ihrer algebraischen Vielfachheit gezählt). Mit dieser Wahl von M gilt dann also

$$L_M = \sum_{k=1}^d \lambda_k \partial_k^2 + \sum_{j=1}^d (Mb)_j \partial_j + c.$$

Diese Darstellung führt nun zu folgender Klassifizierung: Wir ignorieren die Terme niedrigerer Ordnung und nennen L

- (i) **elliptisch**, falls alle Eigenwerte von A (oder von $-A$) positiv (d.h. > 0) sind,²
- (ii) **hyperbolisch**, falls A (oder $-A$) genau $(d-1)$ positive und einen negativen Eigenwert besitzt,
- (iii) **parabolisch**, falls A (oder $-A$) $(d-1)$ positive Eigenwerte und den Eigenwert 0 besitzt.

Bemerkung 5.1. (i) Diese Klassifizierung umfasst nur im Falle $d = 2$ alle möglichen Fälle. Die Terminologie erklärt sich dadurch, dass man zeigen kann, dass L im Falle $d = 2$ genau dann elliptisch ist, wenn die Menge $\{\zeta \in \mathbb{R}^2 : \langle A\zeta, \zeta \rangle = \mu\}$ für jedes $\mu \in \mathbb{R}$ eine Ellipse (oder leer) ist. Entsprechend für hyperbolisch (Hyperbel) und parabolisch (Parabel).

(ii) Hängen die Koeffizienten doch von $x \in \Omega$ ab, betrachtet man entsprechend die Koeffizientenmatrizen $A(x)$ und spricht von Elliptizität im Punkte x , usw. In diesen Fällen kann der Typ des Operators in verschiedenen Punkten von Ω natürlich unterschiedlich sein.

Betrachten wir den elliptischen Fall genauer. Transformieren wir den Operator L_M mittels einer weiteren Koordinatentransformation

$$N = \text{diag}\left(\frac{1}{\sqrt{|\lambda_1|}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{|\lambda_d|}}\right)$$

so erhalten wir in den neuen Koordinaten, dass

$$L_{N \circ M} = \pm \sum_{k=1}^d \partial_k^2 + \text{Terme niedrigerer Ordnung} = \pm \Delta + \text{Terme niedrigerer Ordnung}.$$

Genauso können wir die anderen Fälle behandeln und erhalten zusammengefasst:

- L ist genau dann **elliptisch**, wenn $c_0, c_1, \dots, c_d \in \mathbb{R}$ und $\sigma \in \{\pm 1\}$ existieren, so dass L nach einer linearen Koordinatentransformation die folgende Gestalt besitzt:

$$L = \sigma \Delta + \sum_{k=1}^d c_k \partial_k + c_0.$$

- L ist genau dann **hyperbolisch**, wenn $c_0, c_1, \dots, c_d \in \mathbb{R}$ und $\sigma \in \{\pm 1\}$ existieren, so dass L nach einer linearen Koordinatentransformation die folgende Gestalt besitzt:

$$L = \sigma \left(\partial_d^2 - \sum_{k=1}^{d-1} \partial_k^2 \right) + \sum_{k=1}^d c_k \partial_k + c_0.$$

Hierbei ist $\partial_d^2 - \sum_{k=1}^{d-1} \partial_k^2$ gerade der d'Alembert-Operator in $\mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}$ mit $x_d = t$.

- L ist genau dann **parabolisch**, wenn $c_0, c_1, \dots, c_d \in \mathbb{R}$ und $\sigma \in \{\pm 1\}$ existieren, so dass L nach einer linearen Koordinatentransformation die folgende Gestalt besitzt:

$$L = \sigma \left(\sum_{k=1}^{d-1} \partial_k^2 \right) + \sum_{k=1}^d c_k \partial_k + c_0.$$

Gilt in diesem Fall $c_d \neq 0$ (genannt **parabolisch nicht ausgeartet**), so kann L durch eine weitere Koordinatentransformation sogar auf die Gestalt

$$L = \sigma \left(\partial_d - \sum_{k=1}^{d-1} \partial_k^2 \right) + \sum_{k=1}^{d-1} c_k \partial_k + c_0$$

transformiert werden. Hierbei ist $\partial_d - \sum_{k=1}^{d-1} \partial_k^2$ gerade der Wärmeleitungsoperator in $\mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}$ mit $x_d = t$.

Man nennt die hier angegebenen Darstellungen auch die **Normalformen** von elliptischen, parabolischen und hyperbolischen Differentialoperatoren.

Teil II.

**Distributionen, Sobolev-Räume und
funktionalanalytische Methoden**

6. Distributionen

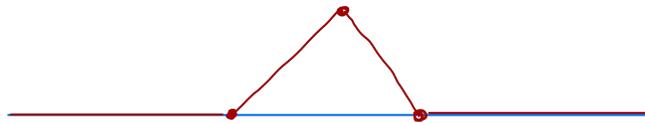
Stichpunkte. schwache Lösungen der Wellengleichung, Testfunktionen, Distributionen, Fundamentallemma, reguläre Distributionen, Delta-Distribution, distributionelle Ableitung, schwache Ableitung, Konvergenz von Distributionen, Dirac-Familien vs. Delta-Distribution, lineare Differentialoperatoren, klassische/distributionelle/schwache Lösungen, Fundamentallösungen, Hypoelliptizität, Weylsches Lemma

6.1. Zur Motivation: schwache Lösungen der Wellengleichung

Schauen wir zu Beginn noch einmal auf die d'Alembertsche Lösung des Cauchy-Problems für die homogene Wellengleichung auf \mathbb{R} , die die Schwingungen einer (unendlich langen) Saite beschreibt. Ist die Anfangsgeschwindigkeit $v_0 = 0$, so wird die Schwingung der Saite beschrieben durch

$$(\star) \quad u(x, t) = \frac{1}{2} (u_0(x - t) + u_0(x + t)),$$

wobei $u_0 \in C^2(\mathbb{R})$ die Anfangsauslenkung der Saite beschreibt. Denken wir an eine gezupfte Saite, so ist es physikalisch durchaus sinnvoll, eine Anfangsauslenkung der folgenden Form zu betrachten:



Hierbei handelt es sich jedoch nur um eine stetige Funktion, die nicht auf ganz \mathbb{R} (zweimal stetig) differenzierbar ist. Insbesondere erhalten wir dann durch (\star) keine Lösung im klassischen Sinne. Wollen wir also solche Anfangsprofile zulassen, müssen wir unseren Lösungsbegriff abschwächen. Hierzu benötigen wir zunächst ein technisches Resultat.

Lemma 6.1 (partielle Integration). Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ offen, $f \in C^k(\Omega)$ und $g \in C_c^k(\Omega)$. Dann gilt für jedes $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$ mit $|\alpha| := \alpha_1 + \dots + \alpha_d \leq k$, dass

$$\int_{\Omega} f(x) \partial^{\alpha} g(x) \, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} \partial^{\alpha} f(x) g(x) \, dx.$$

Beweis. Setze $h := f \cdot g \in C_c^k(\Omega)$ durch 0 zu einer Funktion in $C_c^k(\mathbb{R}^d)$ fort. Dann liefert partielle Integration und der Satz von Fubini, dass

$$\int_{\Omega} \partial_1 h(x) \, dx = \int_{\mathbb{R}^d} \partial_1 h(x) \, dx = \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \left(\underbrace{\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R \partial_1 h(x_1, x') \, dx_1}_{= \lim_{R \rightarrow \infty} (h(R, x') - h(-R, x')) = 0} \right) dx' = 0.$$

Wegen $\partial_1 h = \partial_1(f \cdot g) = \partial_1 f \cdot g + f \cdot \partial_1 g$ folgt die Behauptung für $\alpha = e_1$. Ganz analog kann für $\alpha = e_j, 1 < j \leq d$, argumentiert werden. Anschließend verwende man Induktion über $|\alpha|$. \square

Mittels partieller Integration können wir nun eine Funktion u als Lösung der homogenen Wellengleichung identifizieren, ohne die Ableitungen von u zu nutzen.

Proposition 6.2. Für $u \in C^2(\mathbb{R}^2)$ sind äquivalent:

(i) $\square u = 0$ auf \mathbb{R}^2 .

(ii) Für alle $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$ gilt

$$\int_{\mathbb{R}^2} u(x, t) \square \varphi(x, t) d(x, t) = 0.$$

Beweis. Aus Lemma 6.1 folgt, dass

$$(\diamond) \quad \int_{\mathbb{R}^2} u(x, t) \square \varphi(x, t) d(x, t) = \int_{\mathbb{R}^2} \square u(x, t) \varphi(x, t) d(x, t).$$

für alle $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$.

(i) \Rightarrow (ii): Folgt nun sofort aus (\diamond) .

(ii) \Rightarrow (i): Nehmen wir an, $\square u(x_0, t_0) \neq 0$ für ein $(x_0, t_0) \in \mathbb{R}^2$. Ohne Einschränkung können wir annehmen, dass $u_0 := \square u(x_0, t_0) > 0$. Da $\square u$ nach Annahme stetig ist, existiert dann eine Kugel $B := B((x_0, t_0), \varepsilon)$ so dass $\square u > \frac{u_0}{2}$ auf B . Nun sei $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$ ein Glättungskern auf B (siehe Definition 1.17). Dann folgt unter Verwendung von (\diamond) und Annahme (ii), dass

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\mathbb{R}^2} u(x, t) \square \varphi(x, t) d(x, t) \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} \square u(x, t) \varphi(x, t) d(x, t) \\ &= \int_B \square u(x, t) \varphi(x, t) d(x, t) \\ &\geq \frac{u_0}{2} \int_B \varphi(x, t) d(x, t) = \frac{u_0}{2} > 0. \end{aligned}$$

Dieser Widerspruch zeigt, dass $\square u = 0$ auf \mathbb{R}^2 gelten muss. \square

Mit dieser Proposition haben wir also einen Weg gefunden, klassische Lösungen der homogenen Wellengleichung ohne Ableitungen zu charakterisieren. Dies verwenden wir nun, um den Lösungsbegriff abzuschwächen.

Definition 6.3. Sei $u \in L_1^{loc}(\mathbb{R}^2)$. Dann heißt u eine **schwache** oder **distributionelle Lösung** der homogenen Wellengleichung, falls Folgendes gilt:

$$\forall \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2) : \quad \int_{\mathbb{R}^2} u(x, t) \square \varphi(x, t) d(x, t) = 0 \quad (\star).$$

Man sagt in diesem Fall auch, es gilt $\square u = 0$ im **schwachen** oder **distributionellen Sinne**.

Bemerkung 6.4. (i) Da $u \in L_1^{loc}(\mathbb{R}^2)$, sind die Integrale in (\star) definiert:

$$\int_{\mathbb{R}^2} |u(x, t) \square \varphi(x, t)| d(x, t) \leq \|\square \varphi\|_\infty \int_{\text{supp}(\varphi)} |u(x, t)| d(x, t) < \infty.$$

(ii) Nach Proposition 6.2 gilt die Äquivalenz

$$u \text{ ist schwache Lsg. und } u \in C^2 \Leftrightarrow u \text{ ist eine klassische Lösung.}$$

(iii) Die schwachen Lösungen der hom. Wellengleichung bilden einen Unterraum von $L_1^{loc}(\mathbb{R}^2)$.

Es bleibt noch zu zeigen, dass es schwache (nicht klassische) Lösungen überhaupt gibt.

Proposition 6.5. Seien $F, G \in C_b(\mathbb{R})$. Dann wird durch

$$u(x, t) := F(x - t) + G(x + t), \quad (x, t) \in \mathbb{R}^2$$

eine schwache Lösung der homogenen Wellengleichung auf \mathbb{R}^2 definiert.

Diese Lösungen sind im Falle $F, G \notin C^2(\mathbb{R})$ insbesondere keine klassischen Lösungen der Wellengleichung. Ein Beispiel wäre die oben angesprochene angezupfte Saite.

Beweis. Nach Bemerkung 6.4 (iii) genügt es zu zeigen, dass $(x, t) \mapsto f(x, t) := F(x - t)$ eine schwache Lösung ist. Hierbei ist klar, dass $f \in C_b(\mathbb{R}^2) \subseteq L_1^{loc}(\mathbb{R}^2)$. Nun sei $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$ beliebig. Es ist zu zeigen, dass

$$0 \stackrel{!}{=} \int_{\mathbb{R}^2} F(x - t) \square \varphi(x, t) d(x, t) = \int_{\text{supp}(\varphi)} F(x - t) \square \varphi(x, t) d(x, t).$$

Dazu sei $(\varphi_s)_{s>0}$ eine glatte Approximation der Eins auf \mathbb{R} (vergleiche Beispiel 3.23 (iii)) und $F_s := \varphi_s * F$. Dann folgt aus Satz 1.16, dass $F_s \in C^\infty(\mathbb{R})$ und aus Lemma 3.24 folgt, dass $F_s \rightarrow F$ für $s \searrow 0$ gleichmäßig auf kompakten Teilmengen von \mathbb{R} . Nun wählen wir $R > 0$ so groß, dass $\text{supp}(\varphi) \subseteq [-R, R]^2$. Dann folgt, dass

$$\sup_{(x,t) \in \text{supp}(\varphi)} |F_s(x - t) - F(x - t)| \leq \sup_{y \in [-2R, 2R]} |F_s(y) - F(y)| \rightarrow 0 \quad (s \searrow 0).$$

Aber bei gleichmäßig konvergenten Funktionenfamilien dürfen wir Integration und Grenzwertbildung vertauschen, d.h. es folgt

$$\begin{aligned} \int_{\text{supp}(\varphi)} F(x - t) \square \varphi(x, t) d(x, t) &= \lim_{s \searrow 0} \int_{\text{supp}(\varphi)} F_s(x - t) \square \varphi(x, t) d(x, t) \\ &= \lim_{s \searrow 0} \int_{\mathbb{R}^2} F_s(x - t) \square \varphi(x, t) d(x, t) = 0, \end{aligned}$$

wobei wir in der letzten Gleichung ausgenutzt haben, dass die Funktionen $(x, t) \mapsto F_s(x - t)$ nach Lemma 4.8 klassische (und damit schwache) Lösungen der Wellengleichung sind. \square

—Ende VL 18—

6.2. Distributionen und verallgemeinerte Funktionen

Bei obiger Diskussion schwacher Lösungen der Wellengleichung haben wir dem Ausdruck $\square u = 0$ auch für $u \in L_1^{loc}(\Omega)$ einen Sinn gegeben. In diesem Abschnitt wollen wir dies nun noch weiter verallgemeinern und erklären, wie sich allgemeine lineare Differentialoperatoren auf sogenannte **Distributionen** (bzw. **verallgemeinerte Funktionen**) anwenden lassen - ein Begriff, der insbesondere auch die L_1^{loc} -Funktionen umfasst. Warum ist das von Interesse? Lässt man auch Distributionen als Lösungen partieller Differentialgleichungen zu - erweitert man also den Lösungsraum - so kann es unter Umständen einfacher sein, überhaupt eine Lösung zu finden. Gelingt dies, so kann im

Anschluss untersucht werden, ob die gefundene distributionelle Lösung möglicherweise sogar eine klassische Lösung ist.

Zunächst wollen wir dazu zeigen, dass L_1^{loc} -Funktionen durch ihre Wirkung auf sogenannten **Testfunktionen** eindeutig festgelegt sind.

Definition 6.6. Es sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ offen. Dann werden die Elemente des \mathbb{R} -Vektorraums

$$\mathcal{D}(\Omega) := \{f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d) \mid \text{supp}(f) \subseteq \Omega\}$$

als **Testfunktionen auf Ω** bezeichnet.¹

Satz 6.7 (Fundamentallemma der Variationsrechnung). Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ offen und $f, g \in L_1^{loc}(\Omega)$. Dann sind äquivalent:

- (i) $f = g$.²
- (ii) Für **jede** Testfunktion $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ gilt

$$\int_{\Omega} f(x)\varphi(x) dx = \int_{\Omega} g(x)\varphi(x) dx.$$

Das Fundamentallemma liefert eine Begründung für den Namen **Testfunktion**: Um zu zeigen, dass $f = g$ gilt, müssen wir für jedes $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ **testen**, ob $\int_{\Omega} f\varphi dx = \int_{\Omega} g\varphi dx$ erfüllt ist.

Beweis. Die Implikation (i) \Rightarrow (ii) ist offensichtlich wahr. Aufgrund der Linearität des Integrals folgt die Implikation (ii) \Rightarrow (i), sobald wir folgende Implikation gezeigt haben: Ist $h \in \mathcal{L}_1^{loc}(\Omega)$ beliebig und gilt

$$(\star) \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) : \int_{\Omega} h(x)\varphi(x) dx = 0,$$

so gilt $h = 0$ λ^d -fast sicher. Dies zeigen wir nun in drei Schritten.

1. Schritt: Für alle $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ gilt $h \cdot \varphi = 0$ λ^d -fast sicher.

Beweis: Wir setzen

$$H(x) := \begin{cases} h(x)\varphi(x), & \text{falls } x \in \Omega \\ 0, & \text{falls } x \in \mathbb{R}^d \setminus \Omega. \end{cases}$$

Dann ist $H \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^d)$, denn

$$\|H\|_1 \leq \|\varphi\|_{\infty} \int_{\text{supp}(\varphi)} |h(x)| dx < \infty.$$

Sei nun $(\varphi_t)_{t>0}$ eine glatte Approximation der Eins auf \mathbb{R}^d (vergleiche Beispiel 3.23 (iii)). Dann ist $y \mapsto \varphi(y)\varphi_t(x-y) \in \mathcal{D}(\Omega)$, d.h. (\star) zeigt, dass für jedes $x \in \mathbb{R}^d$ und $t > 0$

$$(\varphi_t * H)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \varphi_t(x-y)H(y) dy = \int_{\Omega} h(y) \cdot (\varphi(y) \cdot \varphi_t(x-y)) dy \stackrel{(\star)}{=} 0.$$

Aber dann zeigt Lemma 3.24, dass $\|H\|_1 = \|H - \varphi_t * H\|_1 \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0$. Damit ist $\|H\|_1 = 0$, d.h. auch $h \cdot \varphi = 0$ λ^d -fast sicher.

2. Schritt: Für jede kompakte Teilmenge $K \subseteq \Omega$ gilt $h \cdot \mathbf{1}_K = 0$ λ^d -fast sicher.

Beweis: In den Übungen zeigen Sie, dass eine Testfunktion $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ mit $0 \leq \varphi \leq 1$ und

$\varphi|_K = 1$ existiert. Mit Schritt 1 folgt

$$0 \leq \int_{\Omega} |h \cdot \mathbf{1}_K| \, dx = \int_K |h \cdot \varphi| \, dx \leq \int_{\Omega} |h \cdot \varphi| \, dx \stackrel{1.\text{Schritt}}{=} 0,$$

was die Behauptung impliziert.

3. und letzter Schritt: Sei $(K_m)_{m \in \mathbb{N}}$ eine kompakte Ausschöpfung von Ω , d.h. die K_m sind kompakte Teilmengen von Ω mit

$$K_m \subseteq \overset{\circ}{K}_{m+1} \subseteq \Omega \quad \text{und} \quad \bigcup_{m \in \mathbb{N}} K_m = \Omega$$

(die Existenz solcher Ausschöpfungen wird in den Übungen bewiesen). Dann gilt

$$0 \leq |h| \leq \sum_{m \in \mathbb{N}} |h| \cdot \mathbf{1}_{K_m},$$

d.h. aus monotoner Konvergenz und Schritt 2 folgt

$$0 \leq \int_{\Omega} |h| \, dx \leq \sum_{m \in \mathbb{N}} \int_{K_m} |h| \, dx = 0.$$

Dies zeigt $\int_{\Omega} |h| \, dx = 0$, d.h. $h = 0$ λ^d -fast sicher. □

Übung

Das Fundamentallemma erlaubt es, die Elemente von $L_1^{loc}(\Omega)$ mit **linearen Funktionalen** aus dem algebraischen Dualraum $\mathcal{D}^*(\Omega) := \text{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathcal{D}(\Omega), \mathbb{R})$ eindeutig zu identifizieren.

Korollar 6.8. Für $f \in L_1^{loc}(\Omega)$ sei $u_f \in \mathcal{D}^*(\Omega)$ definiert durch

$$u_f(\varphi) := \langle f, \varphi \rangle := \int_{\Omega} f(x) \varphi(x) \, dx.$$

Dann ist die Abbildung $L_1^{loc}(\Omega) \ni f \mapsto u_f \in \mathcal{D}^*(\Omega)$ linear und **injektiv**.

Statt über die Funktion $f \in L_1^{loc}(\Omega)$ zu sprechen, können wir also genauso gut das zugehörige lineare Funktional $u_f \in \mathcal{D}^*(\Omega)$ betrachten, ohne Informationen über f zu verlieren. Tatsächlich ist u_f sogar ein **stetiges** lineares Funktional auf $\mathcal{D}(\Omega)$, d.h. ein Element des topologischen Dualraum $\mathcal{D}'(\Omega)$ und somit eine sogenannte **Distribution** auf Ω . Bevor wir dies zeigen können, müssen wir $\mathcal{D}(\Omega)$ natürlich zunächst mit einer Topologie (oder zumindest einem Konvergenzbegriff) versehen.

Definition 6.9. (a) Man sagt, dass eine Folge $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ aus $\mathcal{D}(\Omega)$ gegen $\varphi_0 \in \mathcal{D}(\Omega)$ konvergiert und schreibt

$$\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{D}(\Omega)} \varphi_0 \quad \text{bzw.} \quad \mathcal{D}(\Omega) - \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n = \varphi_0,$$

falls die folgenden beiden Punkte erfüllt sind:

(i) Es existiert eine kompakte Teilmenge $K \subseteq \Omega$, so dass

$$\forall n \in \mathbb{N} : \quad \text{supp}(\varphi_n) \subseteq K.$$

(ii) Für alle $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$ konvergiert $\partial^\alpha \varphi_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \partial^\alpha \varphi_0$ gleichmäßig auf Ω .

Man beachte, dass dann auch $\text{supp}(\varphi_0) \subseteq K$.

(b) Ein folgenstetiges lineares Funktional $u : \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ heißt eine **Distribution** oder **verallgemeinerte Funktion** auf Ω . Es muss also für jede Folge $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $\mathcal{D}(\Omega)$ und jedes $\varphi_0 \in \mathcal{D}(\Omega)$ gelten, dass

$$\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{D}(\Omega)} \varphi_0 \Rightarrow u(\varphi_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} u(\varphi_0).$$

Der \mathbb{R} -Vektorraum aller Distributionen auf Ω wird mit $\mathcal{D}'(\Omega)$ bezeichnet. Weiterhin bezeichnet man die Wirkung der Distribution $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ auf der Testfunktion $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ auch mit

$$\langle u, \varphi \rangle := u(\varphi).$$

Bemerkung 6.10. Ein lineares Funktional $u : \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ ist genau dann eine Distribution, wenn es folgenstetig in der Null ist, d.h.

$$\forall (\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ in } \mathcal{D}(\Omega) : \quad \varphi_n \xrightarrow{\mathcal{D}(\Omega)} 0 \Rightarrow \langle u, \varphi_n \rangle \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Beispiel 6.11 (Jedes Element von L_1^{loc} induziert eine Distribution). Ist $f \in L_1^{loc}(\Omega)$, so ist $u_f \in \mathcal{D}'(\Omega)$, wobei wie oben

$$\langle u_f, \varphi \rangle := \langle f, \varphi \rangle := \int_{\Omega} f(x)\varphi(x) dx, \quad \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Beweis: Wegen Korollar 6.8 ist nur die Folgenstetigkeit von u_f zu zeigen. Sei also $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathcal{D}(\Omega)$ mit $\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{D}(\Omega)} 0$. Nach Definition existiert $K \subseteq \Omega$ kompakt, so dass $\text{supp}(\varphi_n) \subseteq K$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\varphi_n \rightarrow 0$ gleichmäßig auf Ω . Es folgt

$$|\langle u_f, \varphi_n \rangle| \leq \int_K |f(x)\varphi_n(x)| dx \leq \left(\int_K |f(x)| dx \right) \cdot \sup_{x \in K} |\varphi_n(x)| \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

Also gilt $\langle u_f, \varphi_n \rangle \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$. Demnach ist u_f folgenstetig, d.h. $u_f \in \mathcal{D}'(\Omega)$

Die durch eine L_1^{loc} -Funktion induzierten Distributionen bekommen eine eigene Bezeichnung.

Definition 6.12. Eine Distribution $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ heißt **regulär**, falls $f \in L_1^{loc}(\Omega)$ existiert, so dass $u = u_f$, d.h.

$$\langle u, \varphi \rangle \stackrel{!}{=} \langle f, \varphi \rangle = \int_{\Omega} f(x)\varphi(x) dx, \quad \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Nach Korollar 6.8 (bzw. dem Fundamentallemma) ist dieses f dann eindeutig bestimmt. Statt $u = u_f$ schreiben wir daher im Folgenden oft einfach $u = f$ und betrachten $L_1^{loc}(\Omega)$ als Unterraum von $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Das nächste Beispiel zeigt, dass nicht jede Distribution regulär ist.

Beispiel 6.13 (Dirac- bzw. Delta-Distribution). Sei $x_0 \in \Omega$. Dann wird durch

$$\delta_{x_0} : \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}, \quad \delta_{x_0}(\varphi) := \varphi(x_0)$$

eine Distribution auf Ω definiert, die nicht regulär ist. Diese wird auch **Dirac-** oder **Delta-Distribution** im Punkt x_0 genannt.

Beweis: Dass es sich um eine Distribution handelt (d.h. Linearität und Folgenstetigkeit) sieht

man sofort. Nehmen wir an, diese wäre regulär, d.h. es wäre $\delta_{x_0} = u_f$ für ein $f \in L_1^{loc}(\Omega)$, also

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) : \int_{\Omega} f(x) \varphi(x) dx = \delta_{x_0}(\varphi) = \varphi(x_0).$$

Da $\varphi(x_0) = 0$ für $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega \setminus \{x_0\}) \subseteq \mathcal{D}(\Omega)$ würde folgen

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega \setminus \{x_0\}) : \int_{\Omega \setminus \{x_0\}} f(x) \varphi(x) dx = 0.$$

Aber dann zeigt das Fundamentallema (Satz 6.7), dass $f|_{\Omega \setminus \{x_0\}} = 0$ λ^d -fast sicher. Da $\{x_0\}$ eine λ^d -Nullmenge ist, folgt hieraus auch $f = 0$ auf Ω λ^d -fast sicher und wir erhalten den Widerspruch $0 = u_f = \delta_{x_0}$.

Die Dirac-Distribution ist ein Beispiel einer durch ein Maß induzierten Distribution.

Beispiel 6.14 (Jedes lokal-endliche Maß induziert eine Distribution). Sei $\rho : \mathcal{B}(\Omega) \rightarrow [0, \infty]$ ein lokal-endliches Borel-Maß, d.h. $\rho(K) < \infty$ für alle $K \subseteq \Omega$ kompakt. Dann ist

$$u_{\rho} : \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}, \quad \langle u_{\rho}, \varphi \rangle := \int_{\Omega} \varphi(x) d\rho(x)$$

korrekt definiert und linear. Ist $\text{supp}(\varphi_n) \subseteq K$ mit $K \subseteq \Omega$ kompakt und gilt $\varphi_n \rightarrow 0$ gleichmäßig auf Ω , so folgt

$$|u_{\rho}(\varphi_n)| \leq \int_K |\varphi_n(x)| d\rho(x) \leq \sup_{x \in K} |\varphi_n(x)| \cdot \rho(K) \rightarrow 0.$$

Also gilt $u_{\rho} \in \mathcal{D}'(\Omega)$.

Neben obiger Dirac-Distribution kennen wir auch schon Dirac-Familien (siehe Definition 3.22). Tatsächlich haben diese miteinander zu tun: jede Dirac-Distribution ist Grenzwert einer Dirac-Familie.

Definition 6.15. (i) Sei $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathcal{D}'(\Omega)$ und $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Dann nennen wir u_n **konvergent gegen** u und schreiben $u_n \xrightarrow{\mathcal{D}'(\Omega)} u$ oder $\mathcal{D}'(\Omega) - \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = u$, falls

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) : \langle u_n, \varphi \rangle \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \langle u, \varphi \rangle.$$

(ii) Ist $(u_t)_{t > 0}$ eine Familie in $\mathcal{D}'(\Omega)$ und $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$, so schreiben wir entsprechend $u_t \xrightarrow{\mathcal{D}'(\Omega)} u$, falls

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) : \langle u_t, \varphi \rangle \xrightarrow{t \rightarrow 0} \langle u, \varphi \rangle.$$

Beispiel 6.16. (i) Sei $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $L_1^{loc}(\Omega)$ und $f \in L_1^{loc}(\Omega)$, so dass $\|(f_n - f)\mathbb{1}_K\|_1 \rightarrow 0$ für jede kompakte Teilmenge $K \subseteq \Omega$. Dann gilt $f_n \xrightarrow{\mathcal{D}'(\Omega)} f$.

Beweis: Ist $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ und $K_0 := \text{supp}(\varphi)$, so gilt

$$|\langle f_n, \varphi \rangle - \langle f, \varphi \rangle| \leq \int_{K_0} |f_n(x) - f(x)| |\varphi(x)| dx \leq \|\varphi\|_{\infty} \|(f_n - f)\mathbb{1}_{K_0}\|_1 \rightarrow 0.$$

(ii) Sei $(\varphi_t)_{t > 0}$ eine Dirac-Familie aus $\mathcal{L}_1(\mathbb{R}^d)$, siehe Definition 3.22. Dann gilt $\varphi_t \xrightarrow{\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)} \delta_0$. Jede Dirac-Familie konvergiert also als Distribution gegen die Dirac- bzw. Delta-Distribution δ_0 .

Beweis: Für $t > 0, x \in \mathbb{R}^d$ sei $\psi_t(x) := \varphi_t(-x)$. Dann ist auch $(\psi_t)_{t>0}$ eine Dirac-Familie und wir erhalten unter Verwendung von Lemma 3.24, dass für $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$

$$\langle \varphi_t, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^d} \varphi_t(y) \varphi(y) dy = \int_{\mathbb{R}^d} \psi_t(0-y) \varphi(y) dy = (\psi_t * \varphi)(0) \xrightarrow{t \rightarrow 0} \varphi(0) = \langle \delta_0, \varphi \rangle. \quad \text{3}$$

—Ende VL 19—

Wir wollen nun zeigen, dass sich jeder Distribution auf sinnvolle Art eine Ableitung zuordnen lässt. Dieser (noch zu definierende) Ableitungsbegriff sollte natürlich im Falle einer differenzierbaren Funktion mit dem „normalen“ Ableitungsbegriff zusammenfallen, d.h. für $f \in C^k(\Omega) \subseteq L_1^{loc}(\Omega)$ und $|\alpha| \leq k$ sollte gelten

$$(*) \quad \partial^\alpha u_f = u_{\partial^\alpha f}.$$

Nun zeigt aber partielle Integration (Lemma 6.1), dass für $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$

$$\langle u_{\partial^\alpha f}, \varphi \rangle = \int_{\Omega} \partial^\alpha f(x) \varphi(x) dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} f(x) \partial^\alpha \varphi(x) dx = (-1)^{|\alpha|} \langle f, \partial^\alpha \varphi \rangle,$$

d.h. (*) wird erfüllt, wenn $\langle \partial^\alpha u_f, \varphi \rangle := (-1)^{|\alpha|} \langle f, \partial^\alpha \varphi \rangle$. Dies veranlasst zu folgender Definition.

Proposition 6.17. Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ offen und $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Ferner sei $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$ und

$$\partial^\alpha u : \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}, \quad \langle \partial^\alpha u, \varphi \rangle := (-1)^{|\alpha|} \langle u, \partial^\alpha \varphi \rangle.$$

Dann gilt:

- (i) $\partial^\alpha u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ und wird **distributionelle (α -)Ableitung** von u genannt.
- (ii) Für $f \in C^k(\Omega), g \in C(\Omega)$ und $|\alpha| \leq k$ gilt

$$\partial^\alpha f = g \text{ (im klassischen Sinne)} \quad \Leftrightarrow \quad \partial^\alpha u_f = u_g$$

Insbesondere ist also jede Distribution (im distributionellen) Sinne unendlich oft differenzierbar. Identifizieren wir eine reguläre Distribution u_f mit $f \in \mathcal{L}_1^{loc}(\Omega)$, und ist f hinreichend glatt, so stimmen ferner die klassischen und die distributionellen Ableitungen überein.

Beweis. (i) Da mit φ auch $\partial^\alpha \varphi$ eine Testfunktion ist, ist $\langle \partial^\alpha u, \varphi \rangle$ korrekt definiert. Die Linearität von $\partial^\alpha u$ folgt sofort aus der Linearität von u bzw. ∂^α . Ist schließlich $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathcal{D}(\Omega)$ mit $\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{D}(\Omega)} \varphi_0$, so gilt auch $\partial^\alpha \varphi_n \xrightarrow{\mathcal{D}(\Omega)} \partial^\alpha \varphi_0$ und aus der Folgenstetigkeit von u folgt

$$\langle \partial^\alpha u, \varphi_n \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle u, \partial^\alpha \varphi_n \rangle \rightarrow (-1)^{|\alpha|} \langle u, \partial^\alpha \varphi_0 \rangle = \langle \partial^\alpha u, \varphi_0 \rangle.$$

(ii) Wie oben sehen wir mittels partieller Integration und dem Fundamentallemma

$$\begin{aligned} \partial^\alpha u_f = u_g &\Leftrightarrow \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) : \quad (-1)^{|\alpha|} \langle f, \partial^\alpha \varphi \rangle = \langle g, \varphi \rangle \\ &\Leftrightarrow \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) : \quad (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} f(x) \partial^\alpha \varphi(x) dx = \int_{\Omega} g(x) \varphi(x) dx \\ &\Leftrightarrow \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) : \quad \int_{\Omega} \partial^\alpha f(x) \varphi(x) dx = \int_{\Omega} g(x) \varphi(x) dx \\ &\Leftrightarrow \forall x \in \Omega : \quad \partial^\alpha f(x) = g(x). \end{aligned}$$

Im letzten Schritt haben wir auch genutzt, dass stetige Funktionen, die fast sicher übereinstimmen, sogar überall übereinstimmen müssen (warum?). \square

Teil (ii) der Proposition führt uns noch zu folgender Definition.

Definition 6.18. Sei $f \in L_1^{loc}(\Omega)$ und $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$.

(i) Wir schreiben die distributionelle Ableitung von f auch als $\partial^\alpha f := \partial^\alpha u_f$.

(ii) Existiert $g \in L_1^{loc}(\Omega)$, so dass $\partial^\alpha f = g$ (d.h. auch die Distribution $\partial^\alpha f$ ist regulär), so heißt f **schwach (α -)differenzierbar** und g die **schwache (α -)Ableitung** von f . Dies ist genau dann der Fall, wenn

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) : \quad (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} f(x) \partial^\alpha \varphi(x) \, dx = \int_{\Omega} g(x) \varphi(x) \, dx.$$

Bemerkung 6.19. (a) Mit Teil (ii) von Proposition 6.17 ist also jede (klassisch) differenzierbare Funktion $f \in C^k(\Omega)$ für $|\alpha| \leq k$ auch schwach α -differenzierbar und klassische und schwache Ableitung stimmen überein.

(b) Aus dem Fundamentallemma folgt wieder, dass die schwache Ableitung eindeutig ist.

(c) Jedes $f \in L_1^{loc}(\Omega)$ ist im distributionellen Sinne (sogar beliebig oft) differenzierbar, muss aber nicht schwach differenzierbar sein, wie die folgenden Beispiele zeigen.

Beispiel 6.20. (i) Sei $\Omega = \mathbb{R}$ und $H = \mathbb{1}_{(0,\infty)}$ die sogenannte **Heaviside-Funktion**.⁴ Wir berechnen die distributionelle Ableitung H' dieser nicht-differenzierbaren Funktion (genauer, aber auch umständlicher: die Ableitung der zu H zugehörigen Äquivalenzklasse von Funktionen). Für $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ gilt nach Definition

$$\langle H', \varphi \rangle := -\langle H, \varphi' \rangle = -\int_{\mathbb{R}} H(x) \varphi'(x) \, dx = -\int_0^{\infty} \varphi'(x) \, dx = -\varphi(x)|_{x=0}^{\infty} = \varphi(0) = \langle \delta_0, \varphi \rangle.$$

Die distributionelle Ableitung der Heaviside-Funktion H ist also die Delta-Distribution δ_0 , d.h. $H' = \delta_0$. Insbesondere ist H **nicht** schwach differenzierbar, denn δ_0 ist nicht regulär.

(ii) Sei $\Omega = \mathbb{R}$ und $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = |x|$ die Betragsfunktion. Setzen wir

$$g(x) := \begin{cases} -1, & \text{falls } x \leq 0 \\ 1, & \text{falls } x > 0, \end{cases}$$

so gilt für die distributionelle Ableitung f' , dass $f' = g$. Die Betragsfunktion ist also schwach differenzierbar mit schwacher Ableitung g . Den leichten Beweis finden Sie im Anhang.⁵

Nicht nur dürfen Distributionen stets beliebig oft differenziert werden, man darf auch konvergente Folgen von Distributionen stets mit Ableitungen vertauschen, d.h. es gilt

$$\partial^\alpha \left(\mathcal{D}'(\Omega) - \lim_{n \rightarrow \infty} u_n \right) = \mathcal{D}'(\Omega) - \lim_{n \rightarrow \infty} \partial^\alpha u_n.$$

Bei Ableitungen von Funktionenfolgen ist dies bekanntlich nicht so ohne weiteres möglich.

Lemma 6.21. Sei $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathcal{D}'(\Omega)$ und $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ mit $u_n \xrightarrow{\mathcal{D}'(\Omega)} u$. Dann gilt $\partial^\alpha u_n \xrightarrow{\mathcal{D}'(\Omega)} \partial^\alpha u$ für alle $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$. Eine entsprechende Aussage gilt für konvergente Familien von Distributionen.

Beweis. Für $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ gilt $\langle \partial^\alpha u_n, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle u_n, \partial^\alpha \varphi \rangle \rightarrow (-1)^{|\alpha|} \langle u, \partial^\alpha \varphi \rangle = \langle \partial^\alpha u, \varphi \rangle$. \square

Wir wollen als nächstes erklären, wie ein Differentialoperator $\sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) \partial^\alpha$ auf einer Distribution wirken soll. Dazu müssen wir zunächst noch Produkte von glatten Funktionen und Distributionen betrachten. Ist $f \in L_1^{loc}(\Omega)$ und $g \in C^\infty(\Omega)$, so ist auch $gf \in L_1^{loc}(\Omega)$ und definiert damit eine reguläre Distribution mit

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) : \quad \langle gf, \varphi \rangle = \int_{\Omega} g(x)f(x)\varphi(x) dx = \int_{\Omega} f(x) \underbrace{g(x)\varphi(x)}_{\in \mathcal{D}(\Omega)} dx = \langle f, g\varphi \rangle.$$

Diese Gleichung verwenden wir für allgemeine Distributionen nun als Definition.

Lemma 6.22. Sei $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ und $g \in C^\infty(\Omega)$. Dann wird durch

$$gu : \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}, \quad \langle gu, \varphi \rangle := \langle u, g\varphi \rangle$$

eine Distribution definiert und die Abbildung

$$C^\infty(\Omega) \times \mathcal{D}'(\Omega) \rightarrow \mathcal{D}'(\Omega), \quad (g, u) \mapsto gu$$

ist bilinear.

Beweis. Übung. □

Übung

Damit ist die Wirkung eines Differentialoperators $L = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha \partial^\alpha$, mit $a_\alpha \in C^\infty(\Omega)$, auf einer Distribution $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ nun festgelegt. Schrittweise erhalten wir für $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, dass

$$\begin{aligned} \langle Lu, \varphi \rangle &\stackrel{\text{Lin.}}{=} \sum_{|\alpha| \leq m} \langle a_\alpha \partial^\alpha u, \varphi \rangle = \sum_{|\alpha| \leq m} \langle \partial^\alpha u, a_\alpha \varphi \rangle \\ &= \sum_{|\alpha| \leq m} (-1)^{|\alpha|} \langle u, \partial^\alpha (a_\alpha \varphi) \rangle = \langle u, \sum_{|\alpha| \leq m} (-1)^{|\alpha|} \partial^\alpha (a_\alpha \varphi) \rangle =: \langle u, L^* \varphi \rangle. \end{aligned}$$

Dies halten wir nun noch einmal in einer Definition fest (als Ergänzung von Definition 0.1).

Definition 6.23. Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ offen und für $m \in \mathbb{N}$ und $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$ mit $|\alpha| \leq m$ seien $a_\alpha \in C^\infty(\Omega)$.

(i) Der lineare partielle Differentialoperator $L := \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha \partial^\alpha$ kann aufgefasst werden als

(a) lineare Abbildung $L : C^m(\Omega) \rightarrow C(\Omega)$, indem man setzt

$$(Lu)(x) := \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) \partial^\alpha u(x), \quad u \in C^m(\Omega), \quad x \in \Omega,$$

oder als

(b) lineare Abbildung $L : \mathcal{D}'(\Omega) \rightarrow \mathcal{D}'(\Omega)$, indem man setzt

$$\langle Lu, \varphi \rangle := \langle u, L^* \varphi \rangle, \quad \varphi \in \mathcal{D}(\Omega),$$

wobei der sogenannte zu L (**formal**) **adjungierte Operator** $L^* : \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathcal{D}(\Omega)$ durch

$$L^* \varphi := \sum_{|\alpha| \leq m} (-1)^{|\alpha|} \partial^\alpha (a_\alpha \varphi)$$

definiert ist.

(ii) Bei der Untersuchung der partiellen Differentialgleichung $Lu = f$ werden dann entsprechend unterschiedliche Lösungsbegriffe verwendet:

(a) Ist $f \in C(\Omega)$, so heißt eine Funktion $u \in C^m(\Omega)$ eine **klassische Lösung**, sofern

$$(Lu)(x) = f(x), \quad x \in \Omega.$$

(b.1) Ist $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$, so heißt eine Distribution $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ eine **distributionelle Lösung**, sofern $Lu = f$ im distributionellen Sinne, d.h.

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) : \quad \langle Lu, \varphi \rangle := \langle u, L^* \varphi \rangle \stackrel{!}{=} \langle f, \varphi \rangle.$$

(b.2) Ist im Fall (b.1) sogar $f \in L_1^{loc}(\Omega) \subseteq \mathcal{D}'(\Omega)$ und $u \in L_1^{loc}(\Omega) \subseteq \mathcal{D}'(\Omega)$, so heißt u eine **schwache Lösung**. In diesem Fall muss also gelten

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) : \quad \int_{\Omega} u(x)(L^* \varphi)(x) dx = \int_{\Omega} f(x)\varphi(x) dx.$$

Bemerkung 6.24. (i) Hat L **konstante Koeffizienten** $a_{\alpha} \in \mathbb{R}$, so können wir L darstellen als

$$L = P(\partial) := \sum_{|\alpha| \leq m} a_{\alpha} \partial^{\alpha} \quad \text{wobei} \quad P(x) := \sum_{|\alpha| \leq m} a_{\alpha} x^{\alpha}$$

(man vergleiche die Diskussion vor Korollar 3.14). Für den adjungierten Operator gilt in diesem Fall $L^* = P^{\#}(\partial)$ mit

$$P^{\#}(x) := P(-x) = \sum_{|\alpha| \leq m} (-1)^{|\alpha|} a_{\alpha} x^{\alpha}.$$

Insbesondere sehen wir, dass

$$\Delta^* = \Delta, \quad W^* = -\partial_t - \Delta_x \quad \text{und} \quad \square^* = \square.$$

Hierbei wirken W und \square auf Teilmengen von $\mathbb{R}^{d+1} = \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$, deren Elemente wir hier als (x, t) mit $t \in \mathbb{R}$ notieren.

(ii) Der oben definierte schwache Lösungsbegriff für die homogene Wellengleichung stimmt mit der in Definition 6.3 gegebenen überein.

(iii) Identifizieren wir wie üblich eine Funktion mit der zugehörigen Äquivalenzklasse und diese mit der zugehörigen regulären Distribution, so ist jede klassische Lösung eine schwache Lösung und jede schwache Lösung eine distributionelle Lösung (aber im Allgemeinen nicht umgekehrt). Natürlich hat man die Hoffnung, dass distributionelle Lösungen von partiellen Differentialgleichungen leichter gefunden/konstruiert werden können, als klassische oder schwache. Wir werden unten sehen, dass dies tatsächlich der Fall ist.

(iv) Sei umgekehrt $u \in L_1^{loc}(\Omega)$ eine schwache Lösung von $P(\partial)u = f$, die einen glatten Repräsentanten $u_0 \in C^{\infty}(\Omega)$ besitzt. Nehmen wir ferner an, dass auch $f \in L_1^{loc}(\Omega)$ einen stetigen

Repräsentanten $f_0 \in C(\Omega)$. besitzt. Dann gilt für alle $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, dass

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} f_0(x) \varphi(x) dx &= \int_{\Omega} f(x) \varphi(x) dx = \langle f, \varphi \rangle = \langle P(\partial)u, \varphi \rangle \stackrel{\text{Def.}}{=} \langle u, P^{\#}(\partial)\varphi \rangle \\ &= \int_{\Omega} u(x) P^{\#}(\partial)\varphi(x) dx = \int_{\Omega} u_0(x) P^{\#}(\partial)\varphi(x) dx \\ &\stackrel{\text{p.I.}}{=} \int_{\Omega} P(\partial)u_0(x) \varphi(x) dx. \end{aligned}$$

Aus dem Fundamentallema folgt also, dass $P(\partial)u_0(x) = f_0(x)$ für alle $x \in \Omega$, d.h. u_0 ist eine klassische Lösung dieser Gleichung.

Vereinbarung 6.25. In der Situation von obiger Bemerkung (iv) unterscheiden wir in der Sprech- und Schreibweise meistens nicht zwischen u (bzw. f) und den Repräsentanten u_0 (bzw. f_0). Obiger Sachverhalt wird dann einfach so formuliert: Für eine schwache Lösung u von $P(\partial)u = f$ sei $u \in C^{\infty}(\Omega)$ und $f \in C(\Omega)$. Dann ist u auch eine klassische Lösung dieser Gleichung.

Schauen wir uns zur obigen Definition zwei Beispiele an. Zunächst sehen wir, dass die in Proposition 3.40 bzw. Proposition 4.14 mittels Trennung der Variablen gefundenen Lösungskandidaten für die homogene Wärme- bzw. Wellengleichung tatsächlich schwache Lösungen dieser Gleichungen sind. Aus Zeitgründen betrachten wir nur die Wärmeleitungsgleichung.

Beispiel 6.26. Sei $u_0 \in L_2(\Omega)$ und $(w_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine ONB von $L_2(\Omega)$, die aus Eigenfunktionen $w_k \in C_0^2(\bar{\Omega})$ von Δ besteht. Ist $(\lambda_k)_{k \in \mathbb{N}}$ die zugehörige Folge von negativen Eigenwerten, so hatten wir in Proposition 3.40 schon gesehen, dass $u(t) := \sum_{k=1}^{\infty} e^{t\lambda_k} \langle u_0, w_k \rangle_{L_2(\Omega)} w_k$ für jedes $t \geq 0$ in $L_2(\Omega)$ konvergiert.

Behauptung: Gilt $\lambda_0 := \sup_{k \in \mathbb{N}} \lambda_k < 0$,⁶ so ist $v(x, t) := u(t)(x)$, $x \in \Omega$, $t > 0$, eine schwache Lösung der homogenen Wärmeleitungsgleichung $Wv = 0$ auf $\Omega \times (0, \infty)$.

Beweisskizze: Zunächst überzeugt man sich schnell, dass $v \in L_1^{loc}(\Omega \times (0, \infty))$.⁷ Nun sei $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega \times (0, \infty))$. Dann zeigt der Satz von Fubini, die L_2 -Konvergenz der Reihe $u(t)$ und dominierte Konvergenz,⁸ dass

$$\begin{aligned} \langle Wv, \varphi \rangle &:= \langle v, W^* \varphi \rangle = \int_{\Omega \times (0, \infty)} v(x, t) W^* \varphi(x, t) d(x, t) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \langle u_0, w_k \rangle_{L_2(\Omega)} \int_{\Omega \times (0, \infty)} \underbrace{e^{t\lambda_k} w_k(x)}_{=: v_k(x, t)} W^* \varphi(x, t) d(x, t) \\ &\stackrel{\text{p.I.}}{=} \sum_{k=1}^{\infty} \langle u_0, w_k \rangle_{L_2(\Omega)} \int_{\Omega \times (0, \infty)} \underbrace{Wv_k(x, t)}_{=0} \varphi(x, t) d(x, t) = 0. \end{aligned}$$

Auch die Fundamentallösung E des Laplace-Operators können wir nun in ein anderes Licht rücken.

Beispiel 6.27. Sei $\Omega = \mathbb{R}^d$, $d \geq 2$ und $E \in L_1^{loc}(\mathbb{R}^d)$ sei die Fundamentallösung des Laplace-Operators (vergleiche Definition 2.11 und Lemma 2.12).

Behauptung: Es gilt $\Delta E = \delta_0$ im distributionellen Sinne.

Beweis: Für $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ gilt $(E * \Delta\varphi) \stackrel{\text{Satz 1.16}}{=} \Delta(E * \varphi) \stackrel{\text{Lem. 2.22}}{=} \varphi$. Also folgt

$$\begin{aligned} \langle \Delta E, \varphi \rangle &:= \langle E, \Delta^* \varphi \rangle = \langle E, \Delta\varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^d} E(y) \Delta\varphi(y) dy \\ &\stackrel{E(y) = E(-y)}{=} \int_{\mathbb{R}^d} E(0 - y) \Delta\varphi(y) dy = (E * \Delta\varphi)(0) = \Delta(E * \varphi)(0) = \varphi(0) = \langle \delta_0, \varphi \rangle. \end{aligned}$$

Dieses Beispiel zeigt die eigentliche Bedeutung der Fundamentallösung eines partiellen Differentialoperators. Hierauf wollen wir im nächsten Abschnitt nun noch einmal genau eingehen.

6.3. Fundamentallösungen und Regularität

Wir betrachten in diesem Abschnitt lineare partielle Differentialoperatoren mit **konstanten Koeffizienten**, also Operatoren der Form $L = P(\partial)$ mit einem Polynom $P \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_d]$ (vergleiche Bemerkung 6.24 (i)).

Definition 6.28. Sei $P \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_d]$. Dann heißt $F \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ eine **Fundamentallösung** des partiellen Differentialoperators $P(\partial)$, falls $P(\partial)F = \delta_0$.

Bemerkung 6.29. (i) Fundamentallösungen sind nicht eindeutig, denn mit F ist auch $F + u$ für jedes $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ mit $P(\partial)u = 0$ eine solche.

(ii) Wir kennen aus den Beispielen 6.27 und 6.20 bereits die Fundamentallösungen E von Δ auf \mathbb{R}^d und $H = \mathbb{1}_{(0, \infty)}$ von $\frac{d}{dx}$ auf \mathbb{R} (denn $H' = \delta_0$). Man beachte, dass wir im ersten Fall stets von „der“ Fundamentallösung des Laplace-Operators gesprochen haben, obwohl es sich nach (i) nur um eine spezielle Fundamentallösung handelt. In der Tat, für jede harmonische Funktion u auf \mathbb{R}^d gilt $\Delta(E + u) = \delta_0$.

Schauen wir uns noch ein weiteres Beispiel an, das wir im Wesentlichen schon kennen.

Beispiel 6.30. Sei $\Omega = \mathbb{R}^{d+1}$ und schreibe dessen Elemente als (x, t) mit $x \in \mathbb{R}^d$ und $t \in \mathbb{R}$. Ferner sei $\tilde{\Phi} : \mathbb{R}^{d+1} \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$\tilde{\Phi}(x, t) := \mathbb{1}_{(0, \infty)}(t) \cdot \frac{1}{(4\pi t)^{d/2}} \exp\left(-\frac{|x|^2}{4t}\right),$$

d.h. $\tilde{\Phi}$ ist die Nullerweiterung der zunächst auf $\mathbb{R}^d \times (0, \infty)$ definierten „Fundamentallösung“ Φ des Wärmeleitungsoperators $W = \partial_t - \Delta_x$ (vergleiche Definition 3.31).

Behauptung: Es ist $\tilde{\Phi} \in \mathcal{L}_1^{loc}(\mathbb{R}^{d+1})$ und $W\tilde{\Phi} = \delta_0$, d.h. $\tilde{\Phi}$ ist eine Fundamentallösung von W im Sinne von Definition 6.28.

Beweisskizze: Die lokale Integrierbarkeit ist leicht zu sehen. Weiterhin gilt für $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{d+1})$ mit dem Satz von Fubini, dass

$$\begin{aligned} \langle W\tilde{\Phi}, \psi \rangle &= \langle \tilde{\Phi}, W^* \psi \rangle = \int_{\mathbb{R}^{d+1}} \tilde{\Phi}(x, t) (-\partial_t - \Delta_x) \psi(x, t) d(x, t) \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_0^\infty \Phi(x, t) (-\partial_t - \Delta_x) \psi(x, t) dt \right) dx. \end{aligned}$$

Mit dominierter Konvergenz und dem Satz von Fubini folgt somit, dass

$$\begin{aligned} \langle W\tilde{\Phi}, \psi \rangle &= \lim_{s \searrow 0} \left(\int_{\mathbb{R}^d} \underbrace{\left(\int_s^\infty \Phi(x, t) (-\partial_t \psi(x, t)) dt \right)}_{=\Phi(x, s)\psi(x, s) + \int_s^\infty \partial_t \Phi(x, t) \psi(x, t) dt} dx - \int_s^\infty \underbrace{\left(\int_{\mathbb{R}^d} \Phi(x, t) \Delta_x \psi(x, t) dx \right)}_{\psi(\cdot, t) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d) \int_{\mathbb{R}^d} \Delta_x \Phi(x, t) \psi(x, t) dx} dt \right) \\ &= \lim_{s \searrow 0} \left(\int_{\mathbb{R}^d} \Phi(x, s) \psi(x, s) dx + \int_{\mathbb{R}^d} \underbrace{\left(\int_s^\infty (\partial_t - \Delta_x) \Phi(x, t) \psi(x, t) dt \right)}_{=W\Phi(x, t)=0} dx \right) \\ &= \lim_{s \searrow 0} \int_{\mathbb{R}^d} \Phi(x, s) \psi(x, s) dx. \end{aligned}$$

Mit $\Phi_s(x) := \Phi(x, s) = \Phi(-x, s)$ und $\psi_s(x) := \psi(x, s)$ erhalten wir also

$$\langle W\tilde{\Phi}, \psi \rangle = \lim_{s \searrow 0} (\Phi_s * \psi_s)(0) = \lim_{s \searrow 0} (\Phi_s * \psi_0)(0) + \lim_{s \searrow 0} (\Phi_s * (\psi_s - \psi_0))(0).$$

Nach Satz 3.33 (Teil (iv) bzw. (ii)) gilt nun zum einen $\lim_{s \searrow 0} (\Phi_s * \psi_0)(0) = \psi_0(0) = \psi(0, 0)$, und zum anderen, dass

$$\|\Phi_s * (\psi_s - \psi_0)\|_\infty \leq \|\psi_s - \psi_0\|_\infty, \quad s > 0.$$

Aber aufgrund der gleichmäßigen Stetigkeit von ψ geht hier die rechte Seite für $s \searrow 0$ gegen 0. Insgesamt folgt also

$$\langle W\tilde{\Phi}, \psi \rangle = \psi(0, 0) = \langle \delta_0, \psi \rangle.$$

Welche Rolle spielen Fundamentallösungen für partielle Differentialoperatoren? Antwort: Man kann mittels Faltung aus einer Fundamentallösung von $P(\partial)$ stets eine Lösung der zugehörigen inhomogenen PDG erhalten. Schauen wir dazu zunächst noch einmal zurück.

Beispiel 6.31. (i) Nach Lemma 2.22 ist $u = E * f$ für $f \in C_c^2(\mathbb{R}^d)$ eine klassische Lösung von $\Delta u = f$ auf \mathbb{R}^d .

(ii) Betrachten wir $\tilde{\Phi}$ aus Beispiel 6.30. Sei $f : \mathbb{R}^d \times (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Wir erweitern sie auf \mathbb{R}^{d+1} mittels $f(x, t) := 0$ für $t \leq 0$. Dann können wir formal rechnen

$$\begin{aligned} u(x, t) &:= (\tilde{\Phi} * f)(x, t) = \int_{\mathbb{R}^{d+1}} \tilde{\Phi}(x - y, t - s) f(y, s) d(y, s) \\ &= \int_0^t \left(\int_{\mathbb{R}^d} \underbrace{\Phi(x - y, t - s)}_{=: \Phi_{t-s}(x-y)} \underbrace{f(y, s)}_{=: f_s(y)} dy \right) ds = \int_0^t (\Phi_{t-s} * f_s)(x) ds. \end{aligned}$$

Laut Duhamelscher Formel (Satz 3.36) ist dies unter geeigneten Voraussetzungen an f eine klassische Lösung von $Wu = f$ auf $\mathbb{R}^d \times (0, \infty)$.

Proposition 6.32. Sei $P \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_d]$ und $F \in L_1^{loc}(\mathbb{R}^d)$ sei eine Fundamentallösung von $P(\partial)$. Dann ist $u := F * f$ für jedes $f \in C_c(\mathbb{R}^d)$ eine schwache Lösung von $P(\partial)u = f$.

Beweis. Nach Satz 1.16 und Proposition 1.15 ist u korrekt definiert und $u \in C(\mathbb{R}^d) \subseteq \mathcal{L}_1^{loc}(\mathbb{R}^d)$. Nun sei $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$. Es sei daran erinnert, dass $P(\partial)^* = P^\#(\partial)$, wobei $P^\#(x) := P(-x)$, vergleiche

Bemerkung 6.24 (i). Wir erhalten also

$$\begin{aligned}\langle P(\partial)u, \varphi \rangle &= \langle u, P^\#(\partial)\varphi \rangle = \langle F * f, P^\#(\partial)\varphi \rangle \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} (F * f)(x)(P^\#(\partial)\varphi)(x) dx = \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} F(x-y)f(y) dy \right) (P^\#(\partial)\varphi)(x) dx.\end{aligned}$$

Mit der Substitution $z = x - y$, dem Satz von Fubini und der Setzung $\varphi_y := \varphi(\cdot + y) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ folgt also wegen $(P^\#(\partial)\varphi_y)(z) = (P^\#(\partial)\varphi)(z + y)$, dass

$$\begin{aligned}\langle P(\partial)u, \varphi \rangle &= \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} (P^\#(\partial)\varphi)(x)F(x-y) dx \right) f(y) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} (P^\#(\partial)\varphi)(z+y)F(z) dz \right) f(y) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} F(z)(P^\#(\partial)\varphi_y)(z) dz \right) f(y) dy = \int_{\mathbb{R}^d} \langle F, P^\#(\partial)\varphi_y \rangle f(y) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \langle P(\partial)F, \varphi_y \rangle f(y) dy = \int_{\mathbb{R}^d} \langle \delta_0, \varphi_y \rangle f(y) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \varphi_y(0)f(y) dy = \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(y)f(y) dy = \langle f, \varphi \rangle.\end{aligned}$$

Also ist u eine distributionelle, wegen $u \in L_1^{loc}(\Omega)$ sogar schwache, Lösung von $P(\partial)u = f$. \square

Bemerkung 6.33. (i) Die Voraussetzungen der Proposition lassen sich abschwächen: ist $F \in \mathcal{D}'(\Omega)$ eine Fundamentallösung von $P(\partial)$ und $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ eine „kompakt getragene“ Distribution, so ist $u = F * f$ eine distributionelle Lösung von $P(\partial)u = f$. Um dies zu zeigen (und zuvor der Faltung überhaupt einen Sinn zu geben) müssten wir den Faltungsbegriff auf Distributionen ausweiten, was hier zu weit führen würde.

(ii) Die Proposition sichert also eine distributionelle Lösung von $P(\partial)u = f$, sofern eine Fundamentallösung von $P(\partial)$ existiert. Nun sagt der **Satz von Malgrange-Ehrenpreis**⁹, dass für jeden linearen partiellen Differentialoperator mit konstanten Koeffizienten $P(\partial)$, mit $P \neq 0$, stets eine Fundamentallösung existiert. Die partielle Differentialgleichung $P(\partial)u = f$ ist also für jede kompakt getragene Distribution f im distributionellen Sinne stets lösbar. Beweisen können wir den Satz von Malgrange-Ehrenpreis im Rahmen dieser Vorlesung leider nicht.¹⁰

—Ende VL 21—

Sobald man eine distributionelle Lösung der Gleichung $P(\partial)u = f$ gefunden hat, kann man versuchen, nachzuweisen, dass es sich tatsächlich um eine klassische Lösung handelt. Eine bedeutende Klasse von Operatoren, bei denen dies der Fall ist, wird als hypoelliptisch bezeichnet.

Definition 6.34. Sei $P \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_d]$. Dann nennt man $P(\partial)$ **hypoelliptisch**, falls Folgendes gilt:

$$\forall \Omega \subseteq \mathbb{R}^d \text{ offen } \forall u \in L_1^{loc}(\Omega) : \quad P(\partial)u \in C^\infty(\Omega) \quad \Rightarrow \quad u \in C^\infty(\Omega)$$

Hierbei bedeutet die Annahme natürlich, dass die Distribution $P(\partial)u$ regulär ist und durch eine glatte Funktion dargestellt werden kann und die Folgerung, dass u einen glatten Repräsentanten besitzt.

Bemerkung 6.35. (i) Für einen hypoelliptischen Operator $P(\partial)$ gilt also unter Beachtung von Vereinbarung 6.25 und Bemerkung 6.24 (iv): Ist $f \in C^\infty(\Omega)$ und $u \in L_1^{loc}(\Omega)$ eine schwache Lösung von $P(\partial)u = f$, so gilt $u \in C^\infty(\Omega)$ und u erfüllt die Gleichung auch im klassischen Sinne.

(ii) Insbesondere folgt für hypoelliptisches $P(\partial)$ und $u \in L_1^{loc}(\Omega)$ also

$$P(\partial)u = 0 \text{ auf } \Omega \quad \Rightarrow \quad u \in C^\infty(\Omega),$$

denn die Nullfunktion ist auf Ω glatt.

(iii) In der Literatur wird in der Definition hypoelliptischer Operatoren die Gültigkeit der Implikation in der Regel sogar für beliebige $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ gefordert. Wir haben dies hier etwas abgeschwächt.

(iv) Man kann zeigen, dass jeder elliptische Operator auch hypoelliptisch ist. Wir werden dies unten nur für den Laplace-Operator zeigen.

Wie können wir feststellen, ob ein gegebener Operator $P(\partial)$ hypoelliptisch ist? Nehmen wir einmal an, dies sei der Fall. Nehmen wir ferner an, dass $P(\partial)$ eine Fundamentallösung $F \in L_1^{loc}(\mathbb{R}^d)$ besitzt. Dann gilt für alle $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d \setminus \{0\})$, dass

$$\langle P(\partial)F, \varphi \rangle = \langle \delta_0, \varphi \rangle = \varphi(0) = 0,$$

d.h. es gilt $P(\partial)F = 0$ auf $\Omega = \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$. Aus der Hypoelliptizität folgt damit, dass $F \in C^\infty(\mathbb{R}^d \setminus \{0\})$. Der nächste Satz zeigt, dass auch die Umkehrung gilt.

Satz 6.36. Sei $P \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_d]$ und zu $P(\partial)$ existiere eine Fundamentallösung

$$F \in L_1^{loc}(\mathbb{R}^d) \cap C^\infty(\mathbb{R}^d \setminus \{0\}).$$

Dann ist $P(\partial)$ **hypoelliptisch**.

Den umfangreichen Beweis dieses Satzes wollen wir noch ein bisschen verschieben und stattdessen zunächst zwei Beispiele betrachten.

Beispiel 6.37. (i) Die Fundamentallösung E des Laplace-Operators Δ auf $\mathbb{R}^d, d \geq 2$, erfüllt die Voraussetzungen des Satzes, d.h. Δ ist hypoelliptisch (vergleiche Bemerkung 2.25). Insbesondere folgt: Ist $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ offen und $u \in L_1^{loc}(\Omega)$ mit $\Delta u = 0$ im schwachen Sinne, d.h.

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) : \int_{\Omega} u(x) \Delta \varphi(x) dx = 0, \quad (\star)$$

so gilt $u \in C^\infty(\Omega)$ und $\Delta u = 0$ im klassischen Sinne. Man nennt Funktionen, die (\star) erfüllen auch **schwach harmonisch**. Damit sind schwach harmonische Funktionen also (genau wie harmonische Funktionen) automatisch glatt und damit selbst harmonisch. Dies nennt man auch das **Weylsche Lemma**.

(ii) Es lässt sich leicht zeigen, dass auch die Fundamentallösung $\tilde{\Phi}$ des Wärmeleitungsoperators W die Voraussetzungen von Satz 6.36 erfüllt, d.h. auch W ist hypoelliptisch.

Teil (ii) hat noch eine interessante Verallgemeinerung des Weylschen Lemmas zur Folge.

Korollar 6.38 (Schwache Eigenfunktionen von Δ sind glatt). Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ offen, $\lambda \in \mathbb{R}$ und $u \in L_1^{loc}(\Omega)$ sei eine schwache Lösung von $\Delta u = \lambda u$. Dann ist $u \in C^\infty(\Omega)$ und $\Delta u = \lambda u$ im klassischen Sinne.

Beweis. Die Funktion

$$\tilde{u} : \Omega \times (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad \tilde{u}(x, t) := e^{-\lambda t} u(x)$$

ist in $L_1^{loc}(\Omega \times (0, \infty))$ und erfüllt $W\tilde{u} = 0$ im schwachen Sinne, wie man leicht nachrechnet. Da W hypoelliptisch ist, folgt $\tilde{u} \in C^\infty(\Omega \times (0, \infty))$, d.h. auch die Funktion

$$(x, t) \mapsto e^{\lambda t} \tilde{u}(x, t) = u(x)$$

ist glatt auf $\Omega \times (0, \infty)$ und damit auch u auf Ω . \square

Für den Beweis von Satz 6.36 müssen wir noch einmal über Faltungen sprechen. Hierzu sei

$$L_{1,c}(\mathbb{R}^d) := \{h \in L_1(\mathbb{R}^d) : \exists K \subseteq \mathbb{R}^d \text{ kompakt mit } h\mathbb{1}_{K^c} = 0\},$$

d.h. $h \in L_{1,c}(\mathbb{R}^d)$ ist integrierbar und verschwindet (λ^d -fast sicher) außerhalb einer kompakten Menge. Es gilt $C_c(\mathbb{R}^d) \subseteq L_{1,c}(\mathbb{R}^d) \subseteq L_1(\mathbb{R}^d) \subseteq L_1^{loc}(\mathbb{R}^d)$.

Lemma 6.39. Es sei $h \in L_{1,c}(\mathbb{R}^d)$ und $f \in C(\mathbb{R}^d)$. Dann gilt:

- (i) Die Faltungen $h * f$ und $f * h$ sind auf ganz \mathbb{R}^d definiert und $h * f = f * h$. Ferner ist $h * f$ stetig und hat f kompakten Träger, so auch $h * f$. Genauer: Gilt $h\mathbb{1}_{K^c} = 0$, so ist

$$\text{supp}(h * f) \subseteq K + \text{supp}(f).$$

- (ii) Ist $f \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$, so gilt auch $h * f \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ und

$$\partial^\alpha (h * f) = h * \partial^\alpha f, \quad \alpha \in \mathbb{N}_0^d.$$

Insbesondere ist $h * f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, falls $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$.

- (iii) Für alle $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ gilt

$$\langle h * f, \varphi \rangle = \langle f, \varphi * h^\# \rangle \stackrel{\text{falls } f \in C_c}{=} \langle h, \varphi * f^\# \rangle,$$

wobei $h^\#(x) := h(-x)$ und $\langle \cdot, \cdot \rangle$ die Paarung zwischen Distribution und Testfunktion bezeichnet.

- (iv) Ist $(f_t)_{t>0}$ eine Familie in $C(\mathbb{R}^d)$ mit $f_t \xrightarrow{\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)} f$ für $t \searrow 0$, so gilt auch

$$h * f_t \xrightarrow{\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)} h * f \quad (t \searrow 0).$$

- (v) Sei $f \in C_c(\mathbb{R}^d)$ und $(h_t)_{t>0}$ eine Familie in $L_{1,c}(\mathbb{R}^d)$ mit $h_t \xrightarrow{\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)} h$ für $t \searrow 0$. Dann gilt auch

$$h_t * f \xrightarrow{\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)} h * f \quad (t \searrow 0).$$

Beweis. Es sei $K \subseteq \mathbb{R}^d$ kompakt mit $h\mathbb{1}_{K^c} = 0$.

(i) und (ii) Die Beweise dieser Aussagen sind völlig analog zu den Beweisen von Satz 1.16 und Proposition 1.15, siehe Anhang.¹¹

(iii) Zunächst ist $h * f \in C(\mathbb{R}^d) \subseteq L_1^{loc}(\mathbb{R}^d)$ nach (i), $\varphi * h^\# = h^\# * \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ nach (ii) und, im Falle $f \in C_c(\mathbb{R}^d)$, auch $\varphi * f^\# \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$. Alle drei Ausdrücke unter (iii) sind also definiert. Ferner

gilt mit dem Satz von Tonelli, dass mit $K_0 := \text{supp}(\varphi)$:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} |h(x-y)f(y)\varphi(x)| d(x,y) &= \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} |h(z)f(x-z)\varphi(x)| d(x,z) \\ &= \int_{K_0 \times K} |h(z)f(x-z)\varphi(x)| d(x,z) \leq \max_{t \in K_0 - K} |f(t)| \|\mathbf{1}_{K_0}\varphi\|_1 \|1_K h\|_1 < \infty, \end{aligned}$$

d.h. im Folgenden dürfen wir die Integrationsreihenfolgen beliebig vertauschen:

$$\begin{aligned} \langle h * f, \varphi \rangle &= \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} h(x-y)f(y) dy \right) \varphi(x) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} h(x-y)\varphi(x) dx \right) f(y) dy = \int_{\mathbb{R}^d} (h^\# * \varphi)(y)f(y) dy = \langle f, h^\# * \varphi \rangle \end{aligned}$$

und genauso

$$\begin{aligned} \langle h * f, \varphi \rangle &= \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} h(z)f(x-z) dz \right) \varphi(x) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x)f(x-z) dx \right) h(z) dz \\ &= \langle h, f^\# * \varphi \rangle = \langle h, \varphi * f^\# \rangle. \end{aligned}$$

(iv) und (v): Für $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ gilt mit Teil (iii) und (ii):

$$\langle h * f_n, \varphi \rangle = \langle f_n, \varphi * h^\# \rangle \rightarrow \langle f, \varphi * h^\# \rangle = \langle h * f, \varphi \rangle$$

und

$$\langle h_n * f, \varphi \rangle = \langle h_n, \varphi * f^\# \rangle \rightarrow \langle h, \varphi * f^\# \rangle = \langle h * f, \varphi \rangle.$$

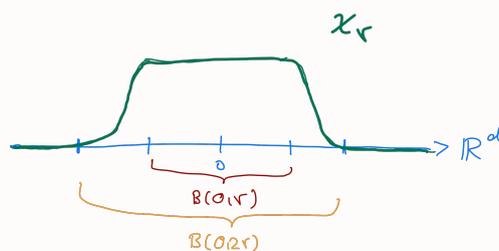
□

Damit können wir den Beweis von Satz 6.36 angehen.

Beweis (von Satz 6.36). Sei $F \in L_1^{loc}(\mathbb{R}^d) \cap C^\infty(\mathbb{R}^d \setminus \{0\})$ mit $P(\partial)F = \delta_0$. Ferner sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ offen, $u \in L_1^{loc}(\Omega)$ und es gelte $P(\partial)u =: f \in C^\infty(\Omega)$. Es ist zu zeigen, dass $u \in C^\infty(\Omega)$. Wir unterteilen den Beweis in zwei Teile und diese wiederum in mehrere Schritte.

Teil a) Wir zeigen, dass die Aussage lokal gilt, d.h. ist $x_0 \in \Omega$ beliebig, so existiert eine offene Kugel um x_0 auf der u glatt ist.

1. Wir wählen $\chi_r \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ mit $0 \leq \chi_r \leq 1$, $\chi_r = 1$ auf $B(0,r)$ und $\text{supp}(\chi_r) \subseteq B[0,2r]$ (vergleiche Übungsblatt 9).



2. Wir setzen $F_r := F\chi_r$ und $G_r := F(1 - \chi_r)$. Dann gilt

$$F = F_r + G_r.$$

Ferner ist $F_r = 0$ auf $\mathbb{R}^d \setminus B[0, 2r]$ und somit

$$F_r \in C^\infty(\mathbb{R}^d \setminus \{0\}) \cap L_{1,c}(\mathbb{R}^d).$$

Weiterhin ist $G_r = 0$ auf $B(0, r)$, d.h. die Singularität von f in 0 spielt keine Rolle und

$$G_r \in C^\infty(\mathbb{R}^d).$$

Schließlich gilt für alle $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d \setminus B[0, 2r])$:

$$\begin{aligned} \langle P(\partial)G_r, \varphi \rangle &= \langle G_r, P^\#(\partial)\varphi \rangle = \langle (1 - \chi_r)F, P^\#(\partial)\varphi \rangle \stackrel{\chi_r|_{B[0, 2r]^c} = 0}{=} \langle F, P^\#(\partial)\varphi \rangle \\ &= \langle P(\partial)F, \varphi \rangle = \langle \delta_0, \varphi \rangle = \varphi(0) = 0. \end{aligned}$$

Also gilt $\text{supp}(P(\partial)G_r) \subseteq B[0, 2r]$, d.h. $P(\partial)G_r$ hat kompakten Träger.

3. Die **Idee des Beweises** ist nun wie folgt: Wir möchten u **lokal darstellen** als

$$u = f * F_r + u * P(\partial)G_r.^{12}$$

Da hier f und $P(\partial)G_r$ glatt sind, wäre dann auch u glatt. Natürlich muss dies alles rechtfertigt werden.

4. Es sei $x_0 \in \Omega$ und $r > 0$ so gewählt, dass

$$B := B(x_0, 3r) \subseteq B(x_0, 4r) \subseteq \Omega.$$

Wir setzen

$$u_B(x) := \begin{cases} u(x), & \text{falls } x \in B \\ 0, & \text{falls } x \in \mathbb{R}^d \setminus B. \end{cases}$$

Dann gilt $u_B \in L_{1,c}(\mathbb{R}^d)$. Ist ferner $\varphi \in \mathcal{D}(B)$, so folgt

$$\langle P(\partial)u_B, \varphi \rangle = \langle u_B, P^\#(\partial)\varphi \rangle = \langle u, P^\#(\partial)\varphi \rangle = \langle P(\partial)u, \varphi \rangle = \langle f, \varphi \rangle.$$

5. Es sei $(\varphi_t)_{t>0}$ eine glatte Approximation der Eins auf \mathbb{R}^d (vergleiche Beispiel 3.23 (iii)) und

$$u_t := \varphi_t * u_B \stackrel{\text{Lem. 6.39(ii)}}{\in} \mathcal{D}(\mathbb{R}^d).$$

Dann gilt mit Lemma 3.24, dass $u_t \xrightarrow{L_1(\mathbb{R}^d)} u_B$ für $t \searrow 0$, also mit Beispiel 6.16 (ii) auch

$$u_t \xrightarrow{\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)} u_B.$$

Mit Lemma 6.21 gilt dann ferner

$$P(\partial)u_t \xrightarrow{\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)} P(\partial)u_B.$$

6. Nach Proposition 6.32 gilt $u_t = P(\partial)(u_t * F)$ und damit wegen $F = F_r + G_r$ auch

$$u_t = P(\partial)(u_t * F_r) + P(\partial)(u_t * G_r) \stackrel{\text{Lem. 6.39(ii)}}{=} (P(\partial)u_t * F_r) + (u_t * P(\partial)G_r).$$

7. Nach 2. gilt $P(\partial)G_r \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$, d.h. aus 5. und Lemma 6.39 (v) folgt

$$u_t * P(\partial)G_r \xrightarrow{\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)} u_B * P(\partial)G_r.$$

8. Wir betrachten $B(x_0, r) \subseteq B = B(x_0, 3r)$ und $\varphi \in \mathcal{D}(B(x_0, r))$. Dann gilt

$$\text{supp}(\varphi * F_r^\#) \subseteq B(x_0, r) + B[0, 2r] \subseteq B(x_0, 3r) = B,$$

also wegen 5. und Lemma 6.39 (iii) auch

$$\langle P(\partial)u_t * F_r, \varphi \rangle = \langle P(\partial)u_t, \varphi * F_r^\# \rangle \xrightarrow{t \searrow 0} \langle P(\partial)u_B, \varphi * F_r^\# \rangle \stackrel{4.}{=} \langle f, \varphi * F_r^\# \rangle = \langle f * F_r, \varphi \rangle.$$

9. Aus 5. bis 8. folgt damit für alle $\varphi \in \mathcal{D}(B(x_0, r))$:

$$\langle u, \varphi \rangle = \langle u_B, \varphi \rangle = \lim_{t \searrow 0} \langle u_t, \varphi \rangle = \langle f * F_r, \varphi \rangle + \langle u_B * P(\partial)G_r, \varphi \rangle$$

Aus dem Fundamentallema folgt also, dass

$$u|_{B(x_0, r)} = (f * F_r + u_B * P(\partial)G_r)|_{B(x_0, r)}.$$

Da f und $P(\partial)G_r$ glatt sind, ist nach Lemma 6.39 die rechte Seite eine glatte Funktion und damit ein glatter Repräsentant von $u|_{B(x_0, r)}$.

Teil b): u ist glatt auf Ω .

Seien $x_0, x_1 \in \Omega, x_0 \neq x_1$. Nach Teil a) existieren offene Kugeln $x_0 \in B_0, x_1 \in B_1$, so dass $u|_{B_0}$ und $u|_{B_1}$ glatt sind. Sind v_0, v_1 entsprechende glatte Repräsentanten und ist $B_0 \cap B_1 \neq \emptyset$, so stimmen v_0 und v_1 auf $B_0 \cap B_1$ fast sicher überein, denn beide repräsentieren $u|_{B_0 \cap B_1}$. Da die Funktionen stetig sind, folgt sogar $v_0|_{B_0 \cap B_1} = v_1|_{B_0 \cap B_1}$. Wir können also v_0 und v_1 mittels

$$v(x) := \begin{cases} v_0(x), & \text{falls } x \in B_0 \\ v_1(x), & \text{falls } x \in B_1 \end{cases}$$

zu einer glatten Funktion auf $B_0 \cup B_1$ zusammensetzen. Stellen wir nun Ω als abzählbare Vereinigung von solchen offenen Kugeln dar, $\Omega = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n$, so können wir die zugehörigen v_n genauso zu einer Funktion $v \in C^\infty(\Omega)$ zusammensetzen. Diese ist ein glatter Repräsentant von u . □

7. Sobolev-Räume und elliptische Randwertprobleme

Stichpunkte. Sobolev-Räume $W^{m,p}$, $W_0^{m,p}$ und H^m , H_0^m , Spurabbildung, Dirichlet-Problem für Poisson-Gleichung in H^1 , Variationsproblem, Dirichlet-Prinzip, Poincaré-Ungleichung, elliptische Randwertprobleme in H^1

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ offen und $p \in [1, \infty]$. Dann ist $L_p(\Omega) \subseteq L_1^{loc}(\Omega) \subseteq \mathcal{D}'(\Omega)$,¹ d.h. jedes $f \in L_p(\Omega)$ ist beliebig oft distributionell ableitbar und für jedes $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$ ist $\partial^\alpha f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ wieder eine Distribution. Nun werden wir fordern, dass diese Ableitungen sogar im schwachen Sinne existieren (vergleiche Definition 6.18 (ii)). Dann können wir $\partial^\alpha f$ als L_1^{loc} -Funktion auffassen, welche dadurch charakterisiert ist, dass

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) : \quad (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} f(x) \partial^\alpha \varphi(x) \, dx = \int_{\Omega} \partial^\alpha f(x) \varphi(x) \, dx.$$

Fordern wir für die schwache Ableitung $\partial^\alpha f \in L_1^{loc}(\Omega)$ nun noch zusätzlich, dass $\partial^\alpha f \in L^p(\Omega)$, so gelangen wir schließlich zu den sogenannten Sobolev-Räumen.²

7.1. Sobolev-Räume

Definition 7.1. Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ offen, $p \in [1, \infty]$ und $m \in \mathbb{N}_0$. Dann heißt

$$W^{m,p}(\Omega) := \{f \in L_p(\Omega) : \partial^\alpha f \in L_p(\Omega) \text{ für alle } \alpha \in \mathbb{N}_0^d \text{ mit } |\alpha| \leq m\}$$

der **Sobolev-Raum der Differentiationsordnung m und Integrationsordnung p** auf Ω . Weiterhin sei für $f \in W^{m,p}(\Omega)$ im Falle $1 \leq p < \infty$

$$\|f\|_{m,p} := \|f\|_{m,p,\Omega} := \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \|\partial^\alpha f\|_p^p \right)^{1/p}$$

und im Falle $p = \infty$

$$\|f\|_{m,\infty} := \|f\|_{m,\infty,\Omega} := \max_{|\alpha| \leq m} \|\partial^\alpha f\|_\infty.$$

Bemerkung 7.2. (i) Es ist $W^{m,p}(\Omega)$ ein linearer Unterraum von $L_p(\Omega)$. Ferner ist $W^{0,p}(\Omega) = L_p(\Omega)$ und

$$W^{m+k,p}(\Omega) \subseteq W^{m,p}(\Omega), \quad k \in \mathbb{N}.$$

Ist $\lambda^d(\Omega) < \infty$, so gilt $L_p(\Omega) \subseteq L_q(\Omega)$ ³ für $1 \leq q \leq p \leq \infty$, d.h. es gilt auch

$$W^{m,p}(\Omega) \subseteq W^{m,q}(\Omega), \quad 1 \leq q \leq p \leq \infty.$$

(ii) Da für $1 \leq p < \infty$ durch $|(x_1, \dots, x_n)|_p := (\sum_{k=1}^n |x_k|^p)^{1/p}$ eine Norm auf \mathbb{R}^n definiert wird und $\|f\|_{m,p} = \left(\|\partial^\alpha f\|_p \right)_{|\alpha| \leq m}$, sehen wir sofort, dass auch $\|\cdot\|_{m,p}$ die Dreiecksungleichung erfüllt und somit eine Norm auf $W^{m,p}(\Omega)$ definiert (man beachte, dass $\|f\|_{m,p} = 0$ wegen $\|f\|_{m,p} \geq \|f\|_p$ auch $f = 0$ impliziert). Analog kann man im Falle $p = \infty$ argumentieren.

Schauen wir uns zwei Beispiele an.

Beispiel 7.3. (i) Für $f : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = |x|$ gilt nach Beispiel 6.20 (ii), dass

$$f' = \mathbb{1}_{(0,1)} - \mathbb{1}_{(-1,0]}$$

und somit $f \in W^{1,\infty}((-1, 1))$. Da $f'' = 2\delta_0 \notin L_1^{loc}((-1, 1))$ gilt ferner $f \notin W^{2,\infty}((-1, 1))$

(ii) Ist $f \in C^1([a, b])$ (d.h. insbesondere gilt auch $f, f' \in L_\infty((a, b))$), so werden Sie in den Übungen zeigen, dass $|f'| = \text{sign}(f)f'$, d.h. $|f| \in W^{1,\infty}((a, b))$.

Die Wichtigkeit der Sobolev-Räume ist im nachfolgenden Satz begründet.

Satz 7.4. Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ offen, $m \in \mathbb{N}_0$ und $p \in [1, \infty]$. Dann ist $(W^{m,p}(\Omega), \|\cdot\|_{m,p})$ vollständig, also ein Banach-Raum.

Beweis. Sei $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $(W^{m,p}(\Omega), \|\cdot\|_{m,p})$. Es ist zu zeigen, dass diese in $W^{m,p}(\Omega)$ konvergiert. Dazu beachten wir, dass für jedes $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$ mit $|\alpha| \leq m$ gilt, dass

$$\|\partial^\alpha (f_n - f_k)\|_p \leq \|f_n - f_k\|_{m,p}.$$

Daher ist $(\partial^\alpha f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $(L_p(\Omega), \|\cdot\|_p)$. Da dieser Raum vollständig ist, existiert für jedes $|\alpha| \leq m$ ein $f_\alpha \in L_p(\Omega)$ mit $\partial^\alpha f_n \xrightarrow{L^p} f_\alpha$ für $n \rightarrow \infty$. Insbesondere für $\alpha = 0$ folgt $f_n \xrightarrow{L^p} f_0$.

Behauptung: Es ist $f_0 \in W^{m,p}(\Omega)$ und $\|f_n - f_0\|_{m,p} \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$.

Beweis: Wegen $\partial^\alpha f_n \xrightarrow{L^p} f_\alpha$ zeigt die Hölder-Ungleichung, dass für jede kompakte Teilmenge $K \subseteq \Omega$ auch $\partial^\alpha f_n \mathbb{1}_K \xrightarrow{L^1} f_\alpha \mathbb{1}_K$ für $n \rightarrow \infty$. Aus Beispiel 6.16 (i) folgt somit, dass $\partial^\alpha f_n \xrightarrow{\mathcal{D}'(\Omega)} f_\alpha$ für $n \rightarrow \infty$. Für alle $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ gilt somit

$$\langle f_\alpha, \varphi \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle \partial^\alpha f_n, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \lim_{n \rightarrow \infty} \langle f_n, \partial^\alpha \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle f_0, \partial^\alpha \varphi \rangle = \langle \partial^\alpha f_0, \varphi \rangle.$$

Für alle $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$ mit $|\alpha| \leq m$ gilt also $\partial^\alpha f_0 = f_\alpha \in L_p(\Omega)$. Also ist $f_0 \in W^{m,p}(\Omega)$ und es gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f_0\|_{m,p}^p = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{|\alpha| \leq m} \|\underbrace{\partial^\alpha f_n - \partial^\alpha f_0}_{=f_\alpha}\|_p^p = 0.$$

□

Besonders gute Eigenschaften haben die Sobolev-Räume im Falle $p = 2$.

Proposition 7.5. Es sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ offen und $m \in \mathbb{N}_0$. Ferner sei

$$H^m(\Omega) := W^{m,2}(\Omega).$$

Dann wird für $f, g \in H^m(\Omega)$ durch

$$\langle f, g \rangle_{m,2} := \sum_{|\alpha| \leq m} \langle \partial^\alpha f, \partial^\alpha g \rangle_{L_2} = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_\Omega \partial^\alpha f(x) \partial^\alpha g(x) dx$$

ein Skalarprodukt auf $H^m(\Omega)$ definiert. Ferner gilt $\|f\|_{m,2} = \sqrt{\langle f, f \rangle_{m,2}}$ und $(H^m(\Omega), \langle \cdot, \cdot \rangle_{m,2})$ ist ein Hilbert-Raum.

Beweis. Dass $\langle \cdot, \cdot \rangle_{m,2}$ ein Skalarprodukt auf $H^m(\Omega)$ definiert, folgt sofort aus den Skalarprodukt-eigenschaften von $\langle \cdot, \cdot \rangle_{L_2}$ auf $L_2(\Omega)$. Dass $\|\cdot\|_{m,2}^2 = \langle \cdot, \cdot \rangle_{m,2}$ ist klar. Die Vollständigkeit ist dann ein Spezialfall von Satz 7.4. \square

Im Hinblick auf unsere Anwendungen der Sobolev-Räume im Kontext von partiellen Differentialoperatoren, speziell im Hinblick auf Randwertprobleme, wollen wir nun noch Unterräume der Sobolev-Räume $W^{m,p}(\Omega)$ betrachten, die aus solchen Elementen $u \in W^{m,p}(\Omega)$ bestehen, die auf $\partial\Omega$ verschwinden. Dies ist nicht trivial, da überhaupt nicht klar ist, was der Wert der Äquivalenzklasse u auf $\partial\Omega$ (zumeist eine λ^d -Nullmenge!) überhaupt sein soll.

Bemerkung 7.6. Es sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ offen und beschränkt und besitze einen C^1 -Rand.

(a) Ist $u \in C(\overline{\Omega}) \cap W^{1,p}(\Omega)$, so ist $u|_{\partial\Omega}$ definiert und

$$u|_{\partial\Omega} \in C(\partial\Omega) \subseteq L_\infty(\partial\Omega, \sigma) \subseteq L_p(\partial\Omega, \sigma),$$

wobei wir für die letzten beiden Inklusionen die Kompaktheit von $\partial\Omega$ benutzen. Die Abbildung

$$(C(\overline{\Omega}) \cap W^{1,p}(\Omega), \|\cdot\|_{1,p}) \rightarrow (L_p(\partial\Omega, \sigma), \|\cdot\|_p), \quad u \mapsto u|_{\partial\Omega}$$

ist natürlich linear. Mit einigem technischen Aufwand lässt sich nun zeigen, dass diese Abbildung sogar stetig ist und sich auf eindeutige Art zu einer linearen stetigen Abbildung

$$\text{tr} : (W^{1,p}(\Omega), \|\cdot\|_{1,p}) \rightarrow (L_p(\partial\Omega, \sigma), \|\cdot\|_p)$$

erweitern lässt. Für diese sogenannte **Spurabbildung** (englisch: Spur = trace) gilt dann also insbesondere, dass

$$\forall u \in C(\overline{\Omega}) \cap W^{1,p}(\Omega) : \quad \text{tr}(u) = u|_{\partial\Omega}.$$

Damit macht es für eine gegebene Funktion $g \in L_p(\partial\Omega, \sigma)$ nun also Sinn zu fordern, dass $u \in W^{1,p}(\Omega)$ auf dem Rand von Ω den Wert g annehmen soll. Dies bedeutet einfach, dass $\text{tr}(u) = g$ gelten soll.

(b) Von besonderem Interesse für uns sind die Funktionen $u \in W^{1,p}(\Omega)$, die auf dem Rand von Ω verschwinden (d.h. $\text{tr}(u) = 0$). Jede Testfunktion $u \in \mathcal{D}(\Omega) \subseteq W^{1,p}(\Omega)$ hat natürlich diese Eigenschaft. Tatsächlich sind für $u \in W^{1,p}(\Omega)$ äquivalent:

(i) $\text{tr}(u) = 0$.

(ii) Es existiert eine Folge $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $\mathcal{D}(\Omega)$ mit $\|\varphi_n - u\|_{1,p} \rightarrow 0$.

Auch hier müssen wir auf den recht aufwendigen Beweis verzichten (siehe etwa [7]).

Die letzte Bemerkung führt uns nun direkt zur folgenden Definition.

Definition 7.7. Für $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ offen, $p \in [1, \infty]$ und $m \in \mathbb{N}_0$ sei

$$W_0^{m,p}(\Omega) := \overline{\mathcal{D}(\Omega)}^{(W^{m,p}(\Omega), \|\cdot\|_{m,p})},$$

d.h. man betrachtet den Abschluss von $\mathcal{D}(\Omega)$ im normierten Raum $(W^{m,p}(\Omega), \|\cdot\|_{m,p})$. Ferner sei

$$H_0^m(\Omega) := W_0^{m,2}(\Omega).$$

Bemerkung 7.8. (i) Als abgeschlossener Unterraum des Banach-Raums $W^{m,p}(\Omega)$ ist auch $W_0^{m,p}(\Omega)$ ein Banach-Raum. Genauso ist $H_0^m(\Omega)$ ein Hilbert-Raum.

(ii) Man beachte, dass die Definition von $W_0^{m,p}(\Omega)$ keine Anforderungen an Ω oder dessen Rand $\partial\Omega$ erfordert. Ist aber Ω beschränkt und besitzt einen C^1 -Rand, so gilt nach Bemerkung 7.6, dass $u \in W_0^{1,p}(\Omega) \Leftrightarrow \text{tr}(u) = 0$.

7.2. Elliptische Randwertprobleme

Wir wollen nun zurück zu partiellen Differentialgleichungen kommen und erklären, wie Sobolev-Räume in diesem Kontext angewendet werden. Dazu schauen wir uns exemplarisch zunächst folgende **Variante des Dirichlet-Problems für die Poisson-Gleichung** an (siehe Definition 2.2).

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ offen, $f \in L_2(\Omega)$ und $g \in H^1(\Omega) \subseteq L_2(\Omega)$. Gesucht ist $u \in H^1(\Omega)$, so dass

$$(\star) \quad \begin{cases} \Delta u = f \text{ im schwachen Sinne} \\ u - g \in H_0^1(\Omega). \end{cases}$$

Bemerkung 7.9. (i) Es sei daran erinnert, dass $\Delta u = f$ im schwachen Sinne, genau dann, wenn

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) : \quad \int_{\Omega} u(x) \Delta \varphi(x) \, dx = \int_{\Omega} f(x) \varphi(x) \, dx.$$

Gilt in diesem Fall, dass $f \in C^\infty(\Omega) \cap L_2(\Omega)$, so folgt aus der Hypoelliptizität von Δ , dass $u \in C^\infty(\Omega)$ und dass $\Delta u = f$ auch im klassischen Sinne erfüllt ist.

(ii) Die Randbedingung ist hier (im Falle Ω beschränkt und mit C^1 -Rand) gleichbedeutend mit $\text{tr}(u - g) = 0$, also $\text{tr}(u) = \text{tr}(g)$. Man beachte, dass unsere „Randfunktion“ g hier auf ganz Ω vorgegeben wird, obwohl wir streng genommen nur an ihren „Werten“ auf dem Rand von Ω interessiert sind.

Im folgenden Resultat nutzen wir für $u \in H^1(\Omega)$ die **Schreibweise**

$$|\nabla u(x)|^2 := \langle \nabla u(x), \nabla u(x) \rangle := \sum_{j=1}^d |\partial_j u(x)|^2.$$

Satz 7.10. Es sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ offen und beschränkt. Ferner sei $f \in L_2(\Omega)$ und $g \in H^1(\Omega)$. Dann gilt:

(a) Das Dirichlet-Problem (\star) besitzt in $H^1(\Omega)$ eine eindeutige Lösung u_0 .

(b) Die Lösung $u_0 \in H^1(\Omega)$ von (\star) ist der eindeutige Minimierer des **Variationsproblems**

$$\min_{u \in H^1(\Omega), u - g \in H_0^1(\Omega)} \left(\int_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 \, dx + 2 \int_{\Omega} f(x) u(x) \, dx \right).$$

Bemerkung 7.11. (i) Man beachte, dass die schwachen Ableitungen $\partial_j u$ Elemente von $L_2(\Omega)$ sind, d.h. es gilt auch $|\nabla u| \in L_2(\Omega)$.

(ii) Mit Teil (b) kann man die Lösung u_0 von (\star) also berechnen, indem man das zugehörige Variationsproblem löst. Dieser Sachverhalt wird auch das **Dirichlet-Prinzip** genannt. Es ist die Basis einiger numerischer Verfahren zur Lösung von (\star) .

Bevor wir den Satz beweisen, sei noch folgendes Korollar für den Fall $g = 0$ erwähnt.

Korollar 7.12. Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ offen und beschränkt und $f \in L_2(\Omega)$. Dann besitzt die Poisson-Gleichung $\Delta u = f$ in $H_0^1(\Omega)$ eine eindeutige Lösung.

Für den Beweis von Satz 7.10 ist es zunächst hilfreich, die Norm

$$\|u\|_{1,2} = \left(\|u\|_2^2 + \sum_{j=1}^d \|\partial_j u\|_2^2 \right)^{1/2} = \left(\int_{\Omega} |u(x)|^2 dx + \int_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 dx \right)^{1/2}$$

auf $H_0^1(\Omega)$ durch eine äquivalente Norm zu ersetzen. Hierzu benötigen wir folgendes Resultat.

Proposition 7.13 (Poincaré-Ungleichung). ⁴ Es sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ offen und beschränkt. Dann existiert eine Konstante $C(\Omega) > 0$ mit

$$\forall u \in H_0^1(\Omega) : \|u\|_{1,2}^2 \leq C(\Omega) \cdot \int_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 dx. \quad (\diamond)$$

Beweis. Da die Abbildungen $u \mapsto \|u\|_{1,2}^2$ und $u \mapsto \int_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 dx = \sum_{j=1}^d \|\partial_j u\|_2^2$ jeweils stetig auf $H_0^1(\Omega)$ sind⁵ und $\mathcal{D}(\Omega) \subseteq H_0^1(\Omega)$ dicht ist, genügt es die Gültigkeit von (\diamond) für $u \in \mathcal{D}(\Omega)$ zu zeigen.

Im Falle $u = 0$ ist die Abschätzung trivial. Sei also $u \in \mathcal{D}(\Omega) \setminus \{0\}$ und $1 \leq j \leq d$. Dann gilt

$$\begin{aligned} 0 \leq \|u\|_2^2 &= \int_{\Omega} 1 \cdot u^2(x) dx \stackrel{p.I.}{=} - \int_{\Omega} x_j \partial_j (u^2(x)) dx \\ &= -2 \int_{\Omega} x_j u(x) \partial_j u(x) dx \stackrel{\text{alles} \geq 0}{=} 2 \left| \int_{\Omega} x_j u(x) \partial_j u(x) dx \right| \\ &\leq 2 \cdot \underbrace{\sup_{x \in \Omega} |x|}_{=: D} \int_{\Omega} |u(x)| |\partial_j u(x)| dx \stackrel{C.-S.}{\leq} 2D \|u\|_2 \|\partial_j u\|_2. \end{aligned}$$

Teilen wir durch $\|u\|_2$, so folgt $\|u\|_2 \leq 2D \|\partial_j u\|_2$ für alle $1 \leq j \leq d$, also auch $\|u\|_2^2 \leq 4D^2 \sum_{j=1}^d \|\partial_j u\|_2^2$. Aber dies impliziert

$$\|u\|_{1,2}^2 = \|u\|_2^2 + \sum_{j=1}^d \|\partial_j u\|_2^2 \leq \underbrace{(1 + 4D^2)}_{=: C(\Omega)} \sum_{j=1}^d \|\partial_j u\|_2^2 = C(\Omega) \cdot \int_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 dx.$$

□

Wir setzen im Folgenden

$$\mathcal{E}_0(u, v) := \int_{\Omega} \langle \nabla u(x), \nabla v(x) \rangle dx := \sum_{j=1}^d \int_{\Omega} \partial_j u(x) \partial_j v(x) dx, \quad u, v \in H^1(\Omega),$$

und

$$\mathcal{E}_0[u] := \mathcal{E}_0(u, u) = \int_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 dx, \quad u \in H^1(\Omega).$$

Korollar 7.14. Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ offen und beschränkt. Dann gilt:

(i) Die Abbildung $\mathcal{E}_0 : H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ ist eine positiv-semidefinite symmetrische Bilinearform.⁶

(ii) Die Einschränkung $\mathcal{E}_0|_{H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)}$ ist positiv-definit, d.h. ein Skalarprodukt.

(iii) Die Poincaré-Ungleichung zeigt, dass

$$\mathcal{E}_0[u] \leq \|u\|_{1,2}^2 \leq C(\Omega)\mathcal{E}_0[u], \quad u \in H_0^1(\Omega),$$

d.h. die Norm $\|\cdot\|_{1,2}$ und die durch \mathcal{E}_0 erzeugte Norm $\sqrt{\mathcal{E}_0[\cdot]}$ sind auf $H_0^1(\Omega)$ äquivalent.

Beweis. (i) Dies ist klar.

(ii) und (iii) Da $\mathcal{E}_0[u] := \mathcal{E}_0(u, u) = \int_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 dx$ zeigt die Poincaré-Ungleichung, dass

$$\mathcal{E}_0[u] \geq C(\Omega)^{-1} \|u\|_{1,2}^2, \quad u \in H_0^1(\Omega).$$

Also ist \mathcal{E}_0 auf $H_0^1(\Omega)$ sogar positiv-definit. Weiterhin gilt $\|u\|_{1,2}^2 = \|u\|_2^2 + \mathcal{E}_0[u] \geq \mathcal{E}_0[u]$. \square

Bemerkung 7.15. Für ein Funktional $F : H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ hat Teil (iii) zur Folge, dass dessen Stetigkeit unabhängig davon ist, mit welcher der äquivalenten Normen $\|\cdot\|_{1,2}$ bzw. $\sqrt{\mathcal{E}_0[\cdot]}$ wir $H_0^1(\Omega)$ ausstatten. Im Folgenden werden wir, je nach Situation, mal die eine und mal die andere Norm (bzw. das assoziierte Skalarprodukt) verwenden.

Wir benötigen noch ein Lemma für den Beweis von Satz 7.10.

Lemma 7.16. Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ offen und beschränkt, $u \in H^1(\Omega)$ und $f \in L_2(\Omega)$. Dann gilt:

(i) Die linearen Abbildungen

$$H_0^1(\Omega) \ni v \mapsto \langle f, v \rangle_{L_2} \in \mathbb{R} \quad \text{und} \quad H_0^1(\Omega) \ni v \mapsto \mathcal{E}_0(u, v) \in \mathbb{R}$$

sind stetig.

(ii) Es ist $\Delta u = f$ im schwachen Sinne genau dann, wenn

$$\forall v \in H_0^1(\Omega) : \quad \mathcal{E}_0(u, v) = -\langle f, v \rangle_{L_2}.$$

Beweis. (i) Jedes Skalarprodukt auf einem Hilbert-Raum ist in jeder seiner Komponenten stetig.⁷ Also folgt die Stetigkeit von $v \mapsto \mathcal{E}_0(u, v)$ auf $H_0^1(\Omega)$ unter Beachtung von Korollar 7.14 (iii) und Bemerkung 7.15. Mit Cauchy-Schwarz folgt weiterhin für $v_0 \in H_0^1(\Omega)$, dass

$$|\langle f, v \rangle_{L_2} - \langle f, v_0 \rangle_{L_2}| = |\langle f, v - v_0 \rangle_{L_2}| \leq \|f\|_2 \|v - v_0\|_2 \leq \|f\|_2 \|v - v_0\|_{1,2} \rightarrow 0$$

für $v \xrightarrow{H_0^1} v_0$, d.h. auch die lineare Abbildung $v \mapsto \langle f, v \rangle_{L_2}$ ist auf $H_0^1(\Omega)$ stetig.

(ii) Zunächst beachten wir, dass für $u \in H^1(\Omega)$ die schwachen Ableitungen $\partial_j u, 1 \leq j \leq d$, existieren und Elemente von $L_2(\Omega)$ sind. Es gilt also (vergleiche die Motivation zu Beginn dieses Abschnitts)

$$\forall \psi \in \mathcal{D}(\Omega) : \quad - \int_{\Omega} u(x) \partial_j \psi(x) dx = \int_{\Omega} \partial_j u(x) \psi(x) dx.$$

Unter Verwendung der Definition des distributionellen Laplace-Operators erhalten wir also (mit $\psi = \partial_j \varphi$), dass

$$\begin{aligned} \Delta u = f & \quad \Leftrightarrow \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) : \int_{\Omega} u(x) \Delta \varphi(x) \, dx = \int_{\Omega} f(x) \varphi(x) \, dx \\ & \quad \Leftrightarrow \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) : \sum_{j=1}^d \int_{\Omega} u(x) \partial_j (\partial_j \varphi)(x) \, dx = \int_{\Omega} f(x) \varphi(x) \, dx \\ & \quad \Leftrightarrow \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) : \underbrace{\sum_{j=1}^d \int_{\Omega} \partial_j u(x) \partial_j \varphi(x) \, dx}_{=\mathcal{E}_0(u, \varphi)} = - \underbrace{\int_{\Omega} f(x) \varphi(x) \, dx}_{=\langle f, \varphi \rangle_{L_2}} \\ & \quad \Leftrightarrow \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) : \mathcal{E}_0(u, \varphi) = -\langle f, \varphi \rangle_{L_2}. \end{aligned}$$

Da $\mathcal{D}(\Omega)$ in $H_0^1(\Omega)$ dicht ist, folgt hieraus die behauptete Äquivalenz, da linke und rechte Seite als Funktionen von φ laut Teil (i) stetig sind. \square

Nun können wir Satz 7.10 mit Hilfe des Rieszschens⁸ Darstellungssatzes beweisen. Man beachte, dass dies nur möglich ist, da $(H_0^1(\Omega), \langle \cdot, \cdot \rangle_{1,2})$ vollständig, also ein Hilbert-Raum ist.

Erinnerung 7.17. Sei $(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein reeller Hilbert-Raum. Dann gilt:

(i) Ist $u \in \mathcal{H}$, so ist die Abbildung

$$\Phi_u : \mathcal{H} \ni v \mapsto \langle v, u \rangle \in \mathbb{R}$$

linear und stetig.

(ii) **Rieszscher Darstellungssatz:** Ist umgekehrt $\Phi : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}$ linear und stetig, so existiert ein eindeutiges $\tilde{u} \in \mathcal{H}$, so dass $\Phi = \Phi_{\tilde{u}}$, d.h.

$$\Phi(v) = \langle v, \tilde{u} \rangle$$

für alle $v \in \mathcal{H}$.

Einen Beweis finden Sie in Anhang A.4.

Beweis (von Satz 7.10). (a) Es sei $u \in H^1(\Omega)$, $f \in L_2(\Omega)$ und $g \in H^1(\Omega)$. Wir betrachten $H_0^1(\Omega)$ mit der zu $\|\cdot\|_{1,2}$ äquivalenten Norm $\sqrt{\mathcal{E}_0[\cdot]}$ und dem zugehörigen Skalarprodukt $\mathcal{E}_0(\cdot, \cdot)$. Dann zeigt zunächst Lemma 7.16, dass das lineare Funktional $\Phi : H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\Phi(v) := -\langle f, v \rangle_{L_2} - \mathcal{E}_0(g, v)$$

stetig ist. Nach dem Rieszschens Darstellungssatz existiert dann ein eindeutiges $\tilde{u} \in H_0^1(\Omega)$ mit

$$\forall v \in H_0^1(\Omega) : \Phi(v) = \mathcal{E}_0(v, \tilde{u}) = \mathcal{E}_0(\tilde{u}, v).$$

Einsetzen von Φ liefert also

$$\forall v \in H_0^1(\Omega) : -\langle f, v \rangle_{L_2} = \mathcal{E}_0(\tilde{u}, v) + \mathcal{E}_0(g, v) = \mathcal{E}_0(\tilde{u} + g, v).$$

Nach Lemma 7.16 (i) ist also $u_0 := \tilde{u} + g \in H^1(\Omega)$ eine schwache Lösung von $\Delta u = f$ mit $u_0 - g = \tilde{u} \in H_0^1(\Omega)$. Ist $w \in H^1(\Omega)$ eine weitere schwache Lösung von $\Delta w = f$ mit $w - g \in H_0^1(\Omega)$, so folgt wieder mit Lemma 7.16 (ii):

$$\forall v \in H_0^1(\Omega) : \mathcal{E}_0(w - g, v) = \mathcal{E}_0(w, v) - \mathcal{E}_0(g, v) \stackrel{L.7.16}{=} -\langle f, v \rangle_{L_2} - \mathcal{E}_0(g, v) = \Phi(v).$$

Aus der Eindeutigkeit im Rieszschens Darstellungssatz folgt also, dass $w - g = \tilde{u}$, d.h. $w =$

$$\tilde{u} + g = u_0.$$

(b) Es sei

$$\mathcal{E}[u] := \left(\int_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 dx + 2 \int_{\Omega} f(x)u(x) dx \right) = \mathcal{E}_0[u] + 2\langle f, u \rangle_{L_2}, \quad u \in H^1(\Omega).$$

Dann ist zu zeigen, dass $\mathcal{E}[u] > \mathcal{E}[u_0]$ für alle $u \in H^1(\Omega)$ mit $u - g \in H_0^1(\Omega)$ und $u \neq u_0$.

Sei also solch ein u gegeben. Für $w := u - u_0$ gilt dann $w = (u - g) + (g - u_0) \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}$ und somit erhalten wir $\mathcal{E}_0[w] > 0$, da $\mathcal{E}_0|_{H_0^1}$ positiv-definit ist. Weiterhin folgt

$$\begin{aligned} \mathcal{E}[u] &= \mathcal{E}[w + u_0] = \mathcal{E}_0[w + u_0] + 2\langle f, w + u_0 \rangle_{L_2} \\ &= \mathcal{E}_0(w + u_0, w + u_0) + 2\langle f, w \rangle_{L_2} + 2\langle f, u_0 \rangle_{L_2} \\ &= \mathcal{E}_0[w] + \mathcal{E}_0[u_0] + 2\mathcal{E}_0(u_0, w) + 2\langle f, w \rangle_{L_2} + 2\langle f, u_0 \rangle_{L_2} \\ &= \mathcal{E}_0[w] + \mathcal{E}[u_0] + 2(\mathcal{E}_0(u_0, w) + \langle f, w \rangle_{L_2}). \end{aligned}$$

Aber nach Lemma 7.16 (ii) gilt $\mathcal{E}_0(u_0, w) + \langle f, w \rangle_{L_2} = 0$, da $\Delta u_0 = f$, d.h. es folgt

$$\mathcal{E}[u] = \mathcal{E}_0[w] + \mathcal{E}[u_0] > \mathcal{E}[u_0].$$

—Ende VL 24—

□

Wir wollen Satz 7.10 nun noch auf allgemeinere sogenannte **elliptische Randwertprobleme in $H^1(\Omega)$** verallgemeinern. Dazu betrachten wir eine matrixwertige Funktion $A = (a_{jk})_{j,k=1}^d : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{d \times d}$, die drei Bedingungen erfüllen soll:

$$(B) \quad \forall 1 \leq j, k \leq d : a_{jk} \in L_{\infty}(\Omega)$$

$$(S) \quad \forall 1 \leq j, k \leq d : a_{jk} = a_{kj}$$

$$(E) \quad \exists \gamma > 0 \forall x \in \Omega \forall y \in \mathbb{R}^d : \langle A(x)y, y \rangle = \sum_{j,k=1}^d a_{jk}(x)y_k y_j \stackrel{!}{\geq} \gamma |y|^2.$$

Insbesondere ist $A(x) = (a_{jk}(x))_{j,k=1}^d \in \mathbb{R}^{d \times d}$ also wegen (S) für jedes $x \in \Omega$ eine symmetrische Matrix, deren Eigenwerte wegen (E) allesamt größer $\gamma > 0$ sind. Bei (E) handelt es sich um eine gleichmäßige Elliptizitätsanforderung an A im Sinne unserer Definition aus Kapitel 5.

Nehmen wir nun temporär zusätzlich an, dass die a_{jk} stetig differenzierbar sind. Dann können wir folgenden linearen Differentialoperator $L : C^2(\Omega) \rightarrow C(\Omega)$ betrachten:

$$Lu := \operatorname{div}(A \nabla u) := \operatorname{div} \left(\left(\sum_{k=1}^d a_{1k} \partial_k u, \dots, \sum_{k=1}^d a_{dk} \partial_k u \right)^t \right) = \sum_{j,k=1}^d \partial_j (a_{jk} \partial_k u).$$

Bemerkung 7.18. (i) Ist $A = E_d = \operatorname{diag}(1, \dots, 1)$ die Einheitsmatrix, so liefert dies gerade $L = \Delta$.

(ii) Man nennt solche Operatoren **von Divergenzform**. Für allgemeine Koeffizienten a_{jk} beschreiben diese Operatoren etwa die Wärmeleitung in einem **inhomogenen** Medium.

Lemma 7.19. Sei $a_{jk} \in C^1(\Omega)$ für alle $1 \leq j, k \leq d$. Dann sind für $u \in C^2(\Omega)$ und $f \in C(\Omega)$ äquivalent:

(i) $\operatorname{div}(A\nabla u) = f.$

(ii) Für alle $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ gilt

$$\sum_{j,k=1}^d \int_{\Omega} a_{jk}(x) \partial_k u(x) \partial_j \varphi(x) \, dx = - \int_{\Omega} f(x) \varphi(x) \, dx$$

bzw. in abgekürzter Schreibweise

$$\int_{\Omega} \langle A(x) \nabla u(x), \nabla \varphi(x) \rangle \, dx = - \int_{\Omega} f(x) \varphi(x) \, dx.$$

Beweis. Fundamentallemma und partielle Integration. □

Diese Äquivalenz wollen wir nun zum Anlass nehmen, wieder einen schwachen Lösungsbegriff für die Gleichung

$$\operatorname{div}(A\nabla u) = f$$

einzuführen. Um diesen möglichst kompakt darzustellen, ist noch ein weiteres Hilfsresultat nötig.

Lemma 7.20. Die Funktion $A = (a_{jk})_{j,k=1}^d : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{d \times d}$ erfülle die Voraussetzungen (B), (S) und (E). Ferner sei $c \in L_{\infty}(\Omega)$ und $c \geq 0$. Dann ist die Abbildung

$$\mathcal{E}_{A,c} : H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}, \quad \mathcal{E}_{A,c}(u, v) := \int_{\Omega} \langle A(x) \nabla u(x), \nabla v(x) \rangle \, dx + \int_{\Omega} c(x) u(x) v(x) \, dx$$

korrekt definiert und ein Skalarprodukt auf $H_0^1(\Omega)$. Ferner ist die assoziierte Norm $\sqrt{\mathcal{E}_{A,c}[\cdot]}$ äquivalent zur Norm $\sqrt{\mathcal{E}_0[\cdot]}$ (und damit zur Norm $\|\cdot\|_{1,2}$).

Beweis. Dass die Abbildung korrekt definiert ist, ist klar, denn das Produkt zweier L_2 -Funktionen liegt mit Hölder in L_1 und das Produkt einer L_1 - mit einer L_{∞} -Funktion ist wieder eine L_1 -Funktion, d.h. die Integrale

$$\int_{\Omega} \underbrace{a_{jk}}_{\in L_{\infty}} \underbrace{\partial_k u}_{\in L_2} \underbrace{\partial_k v}_{\in L_2} \, dx \quad \text{und} \quad \int_{\Omega} c u v \, dx$$

existieren. Auch die Bilinearität von $\mathcal{E}_{A,c}$ ist klar und die Symmetrie folgt sofort aus der Symmetrie der Matrizen $A(x), x \in \Omega$. Die positive Definitheit folgt aus folgender Rechnung: für alle $u \in H_0^1(\Omega)$ gilt

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{A,c}[u] &:= \mathcal{E}_{A,c}(u, u) = \int_{\Omega} \left(\langle A(x) \nabla u(x), \nabla u(x) \rangle + c(x) |u(x)|^2 \right) \, dx \\ &\stackrel{c \geq 0}{\geq} \int_{\Omega} \langle A(x) \nabla u(x), \nabla u(x) \rangle \, dx \stackrel{(E)}{\geq} \gamma \int_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 \, dx = \gamma \mathcal{E}_0[u]. \end{aligned}$$

Nun machen wir eine kurze Nebenrechnung: Für $y \in \mathbb{R}^d$ und $x \in \Omega$ gilt

$$|A(x)y|^2 \leq \sum_{j=1}^d \left(\sum_{k=1}^d |a_{jk}(x) y_k| \right)^2 \stackrel{C.-S.}{\leq} \left(\sum_{j,k=1}^d |a_{jk}(x)|^2 \right) \left(\sum_{k=1}^d |y_k|^2 \right) \leq \underbrace{\left(\sum_{j,k=1}^d \|a_{jk}\|_{\infty}^2 \right)}_{=: \alpha^2} |y|^2$$

und damit für alle $x \in \Omega$, dass

$$|\langle A(x)y, y \rangle| \stackrel{\text{C.-S.}}{\leq} |A(x)y| |y| \leq \alpha |y|^2.$$

Damit können wir für $u \in H_0^1(\Omega)$ nun noch folgende Abschätzung zur obigen hinzufügen:

$$\begin{aligned} \gamma \mathcal{E}_0[u] &\stackrel{\text{s.o.}}{\leq} \mathcal{E}_{A,c}[u] \leq \int_{\Omega} \left(|\langle A(x)\nabla u(x), \nabla u(x) \rangle| + |c(x)| |u(x)|^2 \right) dx \\ &\leq \max(\alpha, \|c\|_{\infty}) \int_{\Omega} \left(|\nabla u(x)|^2 + |u(x)|^2 \right) dx \\ &= \max(\alpha, \|c\|_{\infty}) \|u\|_{1,2}^2. \end{aligned}$$

Da wir schon wissen, dass die Normen $\sqrt{\mathcal{E}_0[\cdot]}$ und $\|\cdot\|_{1,2}$ äquivalent sind, sind mit obigen Rechnungen dann auch beide äquivalent zu $\sqrt{\mathcal{E}_{A,c}[\cdot]}$. \square

Definition 7.21. Sei $A = (a_{jk})_{j,k=1}^d$ mit den obigen Voraussetzungen (B), (S) und (E) und $c \in L_{\infty}(\Omega)$ mit $c \geq 0$. Ferner sei $f \in L_2(\Omega)$. Dann heißt $u \in H^1(\Omega)$ eine **schwache Lösung von**

$$\operatorname{div}(A\nabla u) + cu = f,$$

falls

$$\forall v \in H_0^1(\Omega) : \quad \mathcal{E}_{A,c}(u, v) = -\langle f, v \rangle_{L_2}. \quad (*)$$

Für gegebenes $g \in H^1(\Omega)$ besteht das zugehörige **elliptische Randwertproblem in $H^1(\Omega)$** ferner im Auffinden einer solchen schwachen Lösung $u \in H^1(\Omega)$ mit $u - g \in H_0^1(\Omega)$.

Bemerkung 7.22. (i) Aufgrund der Dichtheit von $\mathcal{D}(\Omega) \subseteq H_0^1(\Omega)$ und der Stetigkeit des Skalarprodukts $\mathcal{E}_{A,c}$ auf $H_0^1(\Omega)$ ist (*) genau dann für alle $v \in H_0^1(\Omega)$ erfüllt, wenn es für alle Testfunktionen $v \in \mathcal{D}(\Omega)$ erfüllt ist. Im Falle $a_{jk} \in C^1(\Omega) \cap L_{\infty}(\Omega)$, $c = 0$ und $f \in C(\Omega)$ sind die Lösungen $u \in C^2(\Omega)$ von (*) nach Lemma 7.19 gerade die klassischen Lösungen von $\operatorname{div}(A\nabla u) = f$.

(ii) Für $A = E_d$ und $c = 0$ ist $\mathcal{E}_{A,c} = \mathcal{E}_0$, d.h. (*) ist in diesem Fall mit Lemma 7.16 (ii) gerade äquivalent dazu, dass $\Delta u = f$ im schwachen Sinne.

Satz 7.23. Unter den obigen Voraussetzungen besitzt das elliptische Randwertproblem genau eine Lösung $u_0 \in H^1(\Omega)$.

Der Beweis dieses Satzes ist völlig analog zum Beweis von Satz 7.10.

Beweis. Wir statten $H_0^1(\Omega)$ mit der äquivalenten Norm $\sqrt{\mathcal{E}_{A,c}[\cdot]}$ aus und betrachten die lineare Abbildung

$$\Phi : H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}, \quad v \mapsto -\langle f, v \rangle_{L_2} - \mathcal{E}_{A,c}(g, v).$$

Diese ist stetig, d.h. mit dem Rieszschen Darstellungssatz existiert ein eindeutiges $\tilde{u} \in H_0^1(\Omega)$ mit

$$\forall v \in H_0^1(\Omega) : \quad \Phi(v) = \mathcal{E}_{A,c}(v, \tilde{u}) = \mathcal{E}_{A,c}(\tilde{u}, v)$$

also

$$\forall v \in H_0^1(\Omega) : \quad -\langle f, v \rangle_{L_2} = \mathcal{E}_{A,c}(\tilde{u} + g, v).$$

Setzen wir $u_0 := \tilde{u} + g$, so gilt $u_0 - g = \tilde{u} \in H_0^1(\Omega)$, d.h. u_0 ist tatsächlich eine Lösung des

elliptischen Randwertproblems. Dass es die einzige Lösung ist, sieht man wie im Beweis von Satz 7.10. \square

8. Eigenwertprobleme für den Laplace-Operator

Stichpunkte. Dirichlet-Laplace-Operator und dessen Inverse, Spektralsatz für kompakte selbstadjungierte Operatoren, Einbettung $H_0^1 \rightarrow L_2$ kompakt, Sätze von Rellich-Kondrachov und Kolmogorov-Riesz-Fréchet

In diesem Abschnitt wollen wir nun noch eine Lücke schließen, die wir bei der Methode der Trennung der Variablen für die Wärme- bzw. Wellengleichung offen gelassen hatten. Dort war $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ eine offene und beschränkte Teilmenge und wir hatten die Existenz einer Folge von Funktionen $w_k : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, k \in \mathbb{N}$, mit folgenden Eigenschaften vorausgesetzt:

- (i) Es ist $(w_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Orthonormalbasis von $L_2(\Omega)$.
- (ii) Für alle $k \in \mathbb{N}$ ist $w_k \in C_0^2(\overline{\Omega})$.
- (iii) Für alle $k \in \mathbb{N}$ existiert $\lambda_k > 0$ mit $\Delta w_k = -\lambda_k w_k$, d.h. w_k ist Eigenfunktion des Laplace-Operators zum negativen Eigenwert $-\lambda_k$.
- (iv) $\inf_{k \in \mathbb{N}} \lambda_k > 0$.

In diesem Abschnitt wollen wir die Existenz einer solchen Folge tatsächlich beweisen. Allerdings werden wir die Forderungen (ii), (iii) und (iv) dabei durch folgende Varianten ersetzen:

- (ii)' Für alle $k \in \mathbb{N}$ ist $w_k \in H_0^1(\Omega)$.
- (iii)' Für alle $k \in \mathbb{N}$ existiert $\lambda_k > 0$ mit $\Delta w_k = -\lambda_k w_k$ im schwachen Sinne.
- (iv)' $\lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_k = \infty$.

Mit Korollar 6.38 folgt aus (ii)' und (iii)' dann sogar, dass $w_k \in C^\infty(\Omega)$ und dass $\Delta w_k = -\lambda_k w_k$ auch im klassischen Sinne gilt. Nur dass w_k sich (inklusive seiner Ableitungen) stetig bis auf den Rand fortsetzen lässt, werden wir nicht zeigen können (aber es sei gesagt, dass diese Aussage für genügend glatten Rand tatsächlich auch wahr ist). Zum Beweis von (i), (ii)', (iii)' und (iv)' werden wir nun Resultate über lineare Operatoren im Hilbert-Raum $L_2(\Omega)$ zu Hilfe nehmen.

—Ende VL 25—

Definition 8.1. Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ offen und beschränkt. Wir definieren einen linearen Operator

$$A : D(A) \subseteq L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)$$

wie folgt:

- (a) Der Operator sei definiert auf

$$D(A) := \{u \in H_0^1(\Omega) : \Delta u \in L_2(\Omega)\}.$$

Dies ist ein linearer Unterraum von $H_0^1(\Omega) \subseteq L_2(\Omega)$. Es ist $u \in H_0^1(\Omega)$ genau dann Element von $D(A)$, wenn die Distribution Δu regulär und ein Element von $L_2(\Omega)$ ist.

- (b) Für $u \in D(A)$ setze man

$$Au := -\Delta u \in L_2(\Omega).$$

Man nennt den Operator A auch den **Dirichlet-Laplace-Operator** in $L_2(\Omega)$.

Da wir das Minuszeichen in die Definition von A eingebaut haben, sind wir nun also interessiert an Eigenfunktionen $w \in D(A)$ mit $Aw = \lambda w$ für ein $\lambda > 0$. Das nächste Lemma zeigt, dass es genügt, die Eigenfunktionen des zu A inversen Operators zu betrachten.

Lemma 8.2. (i) Der Dirichlet-Laplace-Operator $A : D(A) \subseteq L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)$ ist bijektiv, d.h. der inverse Operator

$$G := A^{-1} : L_2(\Omega) \rightarrow D(A) \subseteq L_2(\Omega)$$

existiert und ist linear.

(ii) Für $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $w \in L_2(\Omega)$ gilt:

$$w \in D(A) \text{ und } Aw = \lambda w \quad \Leftrightarrow \quad Gw = \lambda^{-1}w.$$

Beweis. (i) Sei $f \in L_2(\Omega)$ beliebig. Dann sind äquivalent:

$$(I) \quad \exists! u \in D(A) : Au = f$$

$$(II) \quad \exists! u \in H_0^1(\Omega) : \Delta u = -f.$$

Aber (II) ist nach Korollar 7.12 wahr. Also ist $A : D(A) \rightarrow L_2(\Omega)$ bijektiv. Dass der inverse Operator $G : L_2(\Omega) \rightarrow D(A) \subseteq L_2(\Omega)$ dann ebenfalls linear ist, ist klar (warum?).

(ii) Gilt $Gw = \lambda^{-1}w$, so ist $w = \lambda Gw \in D(A)$ und $Aw = \lambda AGw = \lambda w$. Ist umgekehrt $w \in D(A)$ und $Aw = \lambda w$, so folgt $w = GAw = \lambda Gw$, also $Gw = \lambda^{-1}w$. \square

Der inverse Operator $G = A^{-1}$ hat bessere Eigenschaften als der Operator A . Zum Beispiel handelt es sich um einen stetigen Operator.

Erinnerung 8.3. (i) Es seien $(X, \|\cdot\|_X), (Y, \|\cdot\|_Y), (Z, \|\cdot\|_Z)$ normierte Räume. Dann sei

$$\mathcal{B}(X, Y) := \{T : X \rightarrow Y \mid T \text{ ist linear und stetig}\}$$

und $\mathcal{B}(X) := \mathcal{B}(X, X)$. Man beachte, dass $T \in \mathcal{B}(X, Y)$ auf ganz X definiert ist.

(ii) Ein linearer Operator $T : X \rightarrow Y$ ist genau dann stetig, wenn er beschränkt ist, d.h.

$$\exists C \geq 0 \forall x \in X : \|Tx\|_Y \leq C \|x\|_X.$$

Das Infimum aller solcher Konstanten C wird die Operatornorm von T genannt und mit $\|T\|$ bezeichnet.

(iii) Gilt $T \in \mathcal{B}(X, Y)$ und $S \in \mathcal{B}(Y, Z)$, so gilt $ST \in \mathcal{B}(X, Z)$ (und $\|ST\| \leq \|S\| \|T\|$).

Um zu zeigen, dass $G = A^{-1} \in \mathcal{B}(L_2(\Omega))$ gilt, machen wir uns zunutze, dass der Wertebereich von G gleich $D(A) \subseteq H_0^1(\Omega)$ ist. Also können wir G auch als Operator von $L_2(\Omega) \rightarrow H_0^1(\Omega)$ auffassen, den wir wie folgt notieren:

$$G_1 : L_2(\Omega) \rightarrow H_0^1(\Omega), \quad G_1 u := Gu.$$

Betrachten wir weiterhin die **Einbettung**

$$J : H_0^1(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega), \quad Ju = u,$$

so gilt also $G = JG_1$, d.h. das folgende Diagramm kommutiert

$$\begin{array}{ccc} & G & \\ L_2(\Omega) & \xrightarrow{\quad} & L_2(\Omega) \\ & \searrow G_1 & \nearrow J \\ & H_0^1(\Omega) & \end{array}$$

Lemma 8.4. Es gilt $J \in \mathcal{B}(H_0^1(\Omega), L_2(\Omega))$ und $G_1 \in \mathcal{B}(L_2(\Omega), H_0^1(\Omega))$. Insbesondere folgt auch $G = JG_1 \in \mathcal{B}(L_2(\Omega))$.

Beweis. (i) Für $u \in H_0^1(\Omega)$ gilt $\|Ju\|_2 = \|u\|_2 \leq \|u\|_{1,2}$.

(ii) Es sei $f \in L_2(\Omega)$ beliebig und $u := G_1f = Gf$. Dann ist $u \in D(A) \subseteq H_0^1(\Omega)$ und es gilt $\Delta u = -Au = -f$, d.h. mit Lemma 7.16, Teil (ii), folgt für alle $v \in H_0^1(\Omega)$, dass

$$\mathcal{E}_0(u, v) = \langle f, v \rangle_{L_2}.$$

Mit der Wahl $v = u$ können wir dann weiter abschätzen:

$$\mathcal{E}_0[u] := \mathcal{E}_0(u, u) = \langle f, u \rangle_{L_2} \stackrel{\text{C.-S.}}{\leq} \|f\|_2 \|u\|_2 \leq \|f\|_2 \|u\|_{1,2} \stackrel{\text{Kor7.14(iii)}}{\leq} \sqrt{C(\Omega)} \|f\|_2 \sqrt{\mathcal{E}_0[u]}.$$

Insgesamt erhalten wir also

$$\mathcal{E}_0[u] \leq C(\Omega) \|f\|_2^2$$

bzw. wegen $u = G_1f$ auch

$$\mathcal{E}_0[G_1f] \leq C(\Omega) \|f\|_2^2, \quad f \in L_2(\Omega).$$

Somit ist der lineare Operator

$$G_1 : (L_2(\Omega), \|\cdot\|_2) \rightarrow (H_0^1(\Omega), \sqrt{\mathcal{E}_0[\cdot]})$$

beschränkt, also stetig. Zuletzt erinnere man sich noch, dass $\sqrt{\mathcal{E}_0[\cdot]}$ und die ursprüngliche Norm $\|\cdot\|_{1,2}$ auf $H_0^1(\Omega)$ äquivalent sind. \square

Der inverse Operator $G = A^{-1}$ hat eine weitere wichtige Eigenschaft.

Lemma 8.5. $G = A^{-1}$ ist **selbstadjungiert**, d.h.

$$\forall f, g \in L_2(\Omega) : \langle Gf, g \rangle_{L_2} = \langle f, Gg \rangle_{L_2},$$

und **positiv**, d.h.

$$\forall f \in L_2(\Omega) \setminus \{0\} : \langle Gf, f \rangle_{L_2} > 0.$$

Inbesondere sind dann auch alle Eigenwerte von G positiv (sofern existent).

Beweis. Seien $f, g \in L_2(\Omega)$ beliebig. Ferner sei $Gf =: v \in D(A) \subseteq H_0^1(\Omega)$ und $Gg =: u \in D(A) \subseteq H_0^1(\Omega)$. Dann gilt also $\Delta v = -Av = -f$ und $\Delta u = -Au = -g$. Mit zweimaliger Anwendung von Lemma 7.16, Teil (ii), folgt also

$$\langle Gf, g \rangle_{L_2} = \langle v, g \rangle_{L_2} = \langle g, v \rangle_{L_2} = \mathcal{E}_0(u, v)$$

und

$$\langle f, Gg \rangle_{L_2} = \langle f, u \rangle_{L_2} = \mathcal{E}_0(v, u) = \mathcal{E}_0(u, v),$$

d.h. beide Terme sind gleich. Genauso folgt mit Korollar 7.14 (iii), dass

$$\langle Gf, f \rangle_{L_2} = \langle v, f \rangle_{L_2} = \mathcal{E}_0(v, v) = \mathcal{E}_0[v] \geq C(\Omega)^{-1} \|v\|_{1,2}^2 > 0,$$

falls $v \neq 0$. Aber es ist $v \neq 0$ genau dann, wenn $f \neq 0$, da G invertierbar ist. \square

Damit wissen wir also, dass alle Eigenwerte von G positiv sind. Dass überhaupt Eigenwerte existieren, ist aber noch nicht gezeigt. Zusammen mit allen weiteren fehlenden Eigenschaften wird dies aus der Tatsache folgen, dass G ein **kompakter Operator** auf $L_2(\Omega)$ ist.

Erinnerung 8.6. (i) Ein linearer Operator $K : (X, \|\cdot\|_X) \rightarrow (Y, \|\cdot\|_Y)$ heißt **kompakt**, geschrieben $K \in \mathcal{K}(X, Y)$, falls das Bild jeder beschränkten Menge aus X in Y relativ kompakt ist, d.h.

$$\forall U \subseteq X : U \text{ beschränkt} \Rightarrow \overline{K(U)} \subseteq Y \text{ kompakt}.$$

Da jede beschränkte Menge in X in einer Kugel $B_X[0, r] = rB_X[0, 1]$ enthalten ist, ist K genau dann kompakt, wenn das Bild der (abgeschlossenen) Einheitskugel aus X in Y relativ kompakt ist, d.h.

$$\overline{K(B_X[0, 1])} \subseteq Y \text{ ist kompakt.}$$

Dies ist insbesondere der Fall, falls K endlich-dimensionales Bild in Y besitzt (d.h. sogenannte **Operatoren von endlichem Rang** sind kompakt).

(ii) Es gilt $\mathcal{K}(X, Y) \subseteq \mathcal{B}(X, Y)$. Ist $K \in \mathcal{K}(X, Y)$, $R \in \mathcal{B}(X_0, X)$, $L \in \mathcal{B}(Y, Y_1)$, so ist auch $LKR : X_0 \rightarrow Y_1$ kompakt.

(iii) Ist $K \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ mit Hilbert-Räumen $\mathcal{H}_i, i = 1, 2$, so ist der Operator K genau dann kompakt, wenn er sich in der Operatornorm beliebig genau durch Operatoren endlichen Ranges approximieren lässt.

Für uns sind kompakte Operatoren aufgrund des folgenden Satzes wichtig.

Satz 8.7 (Spektralsatz für kompakte selbstadjungierte Operatoren). Sei $(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H}})$ ein Hilbert-Raum und $K \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ sei **kompakt** und **selbstadjungiert**. Dann existiert $M \subseteq \mathbb{N}$, eine Familie $(\mu_n)_{n \in M}$ in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ (mit $\mu_n \rightarrow 0$ falls M nicht endlich ist) und ein Orthonormalsystem $(w_n)_{n \in M}$ von \mathcal{H} , so dass

$$\forall x \in \mathcal{H} : Kx = \sum_{n \in M} \mu_n \langle x, w_n \rangle_{\mathcal{H}} w_n.$$

Insbesondere ist jedes w_n eine Eigenfunktion von K zum Eigenwert μ_n , d.h. $Kw_n = \mu_n w_n$.

Beweis. Siehe zum Beispiel [13] oder [14]. □

Korollar 8.8. Zusätzlich zu den Voraussetzungen von Satz 8.7 sei \mathcal{H} unendlich-dimensional und K injektiv. Dann ist M nicht endlich, kann also ohne Einschränkung $= \mathbb{N}$ gewählt werden, und die Familie $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist eine Orthonormalbasis von \mathcal{H} .

Beweis. Es gilt

$$\{x \in \mathcal{H} \mid Kx = 0\} = \{x \in \mathcal{H} \mid \langle x, w_n \rangle_{\mathcal{H}} = 0 \text{ für alle } n \in M\} =: \{w_n\}_{n \in M}^{\perp}.$$

Da K injektiv ist, folgt also

$$\{0\} = \{w_n\}_{n \in M}^{\perp},$$

d.h.

$$\mathcal{H} = \{0\}^{\perp} = \{w_n\}_{n \in M}^{\perp\perp} = \overline{\text{Lin}(\{w_n\}_{n \in M})}.$$

Dies zeigt, dass $(w_n)_{n \in M}$ eine Orthonormalbasis von \mathcal{H} ist (siehe Erinnerung 3.39). Da \mathcal{H} unendlich-dimensional ist, kann M insbesondere nicht endlich sein. □

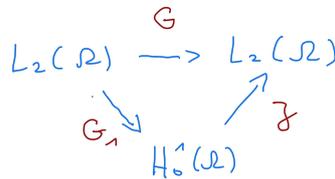
Damit bleibt für uns also zu zeigen, dass $G \in \mathcal{B}(L_2(\Omega))$ kompakt ist. Die Injektivität, Selbstadjungiertheit und Positivität von G liefert dann mit dem vorherigen Korollar, dass eine Orthonormalbasis $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von $L_2(\Omega)$ und eine Folge $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $(0, \infty)$ existiert, so dass

$$Gw_n = \mu_n w_n \quad \text{und} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n = 0.$$

Aus Lemma 8.2 folgte dann $w_n \in D(A)$ und, mit $\lambda_n := \mu_n^{-1}$,

$$Aw_n = -\Delta w_n = \lambda_n w_n \quad \text{und} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = \infty.$$

Wie zeigen wir nun die Kompaktheit von G ? Dazu schauen wir erneut auf das kommutierende Diagramm



und erinnern, dass $G_1 : L_2(\Omega) \rightarrow H_0^1(\Omega)$ beschränkt ist. Die Kompaktheit von G folgt also, sobald wir die Kompaktheit der Einbettung $J : H_0^1(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)$ gezeigt haben. Dies ist ein Spezialfall des folgenden Satzes.

—Ende VL 26—

Satz 8.9 (von Rellich-Kondrachov).¹ Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ offen und beschränkt und $1 \leq p < \infty$. Dann ist die Einbettung

$$J_p : W_0^{1,p}(\Omega) \rightarrow L_p(\Omega), \quad J_p f = f$$

kompakt.

Um diesen Satz zu beweisen, müssen wir also zeigen, dass J_p die abgeschlossene Einheitskugel von $W_0^{1,p}(\Omega)$ in eine relativ kompakte Teilmenge von $L_p(\Omega)$ abbildet. Es ist dazu ratsam, noch einmal daran zu erinnern, wie kompakte bzw. relativ kompakte Mengen in metrischen Räumen überhaupt charakterisiert werden können.

Erinnerung 8.10. Es sei (X, d) ein metrischer Raum. Es sind äquivalent:

- (i) X ist kompakt, d.h. jede offene Überdeckung von X besitzt eine endliche Teilüberdeckung.
- (ii) X ist folgenkompakt, d.h. jede Folge in X besitzt eine konvergente Teilfolge.
- (iii) X ist vollständig und total beschränkt (d.h. für jedes $\varepsilon > 0$ existieren endlich viele ε -Kugeln, die X überdecken).

Ferner heißt $M \subseteq X$ kompakt, falls $(M, d|_{M \times M})$ kompakt ist.

Wir haben es hier aber nicht mit allgemeinen metrischen Räumen zu tun, sondern mit Funktionenräumen. Das Paradebeispiel eines Kompaktheitsresultats ist hier der folgende Satz von Arzelà und Ascoli.²

Satz 8.11 (von Arzelà-Ascoli). Sei (X, d) ein kompakter metrischer Raum und $M \subseteq C(X)$, d.h. jedes $f \in M$ ist eine stetige Funktion $f : X \rightarrow \mathbb{R}$. Darüber hinaus gelte:

- (i) M ist beschränkt, d.h. $\sup_{f \in M} \|f\|_\infty < \infty$, und
- (ii) M ist gleichgradig stetig, d.h.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall f \in M \forall x, y \in X : \quad d(x, y) < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Dann ist M relativ kompakt im metrischen Raum $(C(X), \|\cdot\|_\infty)$.

Beweis. Dieser Satz wird oft in Vorlesungen über gewöhnliche Differentialgleichungen bewiesen (und dann im Beweis des Satzes von Peano benutzt). In der Literatur ist er zum Beispiel in [14] zu finden. \square

Nun sind wir leider nicht an kompakten Teilmengen von $C(X)$ interessiert, sondern an kompakten Teilmengen der L^p -Räume. Hier hilft ein Analogon des Satzes von Arzelà-Ascoli. Zu dessen Formulierung benötigen wir etwas **Notation**: für $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ und $y \in \mathbb{R}^d$ sei $f_{-y} \in L^p(\mathbb{R}^d)$ definiert durch

$$f_{-y}(x) := f(x - y), \quad x \in \mathbb{R}^d.$$

Satz 8.12 (von Kolmogorov-Riesz-Fréchet³). Sei $1 \leq p < \infty$ und $M \subseteq L^p(\mathbb{R}^d)$ habe folgende Eigenschaften:

(i) M ist beschränkt, d.h. $\sup_{f \in M} \|f\|_p < \infty$, und

(ii) $\lim_{y \rightarrow 0} \sup_{f \in M} \|f_{-y} - f\|_p = 0$.⁴

Ist dann $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ offen und beschränkt und

$$M|_{\Omega} := \{f|_{\Omega} : f \in M\},$$

so ist $M|_{\Omega}$ relativ kompakt in $L^p(\Omega)$.

Schauen wir uns zunächst an, wie der Satz von Kolmogorov-Riesz-Fréchet zum Beweis des Satzes von Rellich-Kondrachov verwendet werden kann.

Beweis (des Satzes von Rellich-Kondrachov). Es sei

$$M := \{f \in W_0^{1,p}(\mathbb{R}^d) : \|f\|_{1,p,\mathbb{R}^d} \leq 1\}.$$

Nehmen wir an, wir könnten die beiden Eigenschaften aus dem Satz von Kolmogorov-Riesz-Fréchet für diese Menge zeigen. Dann wäre $M|_{\Omega} \subseteq L^p(\Omega)$ relativ kompakt. Nun sei

$$B_0^{1,p}[0,1] := \{f \in W_0^{1,p}(\Omega) : \|f\|_{1,p,\Omega} \leq 1\},$$

d.h. $B_0^{1,p}[0,1]$ ist die abgeschlossene Einheitskugel in $W_0^{1,p}(\Omega)$. Um die Kompaktheit der Einbettung $J_p : W_0^{1,p}(\Omega) \rightarrow L^p(\Omega)$ zu beweisen, ist zu zeigen, dass $B_0^{1,p}[0,1]$ in $L^p(\Omega)$ relativ kompakt ist. Dazu erweitern wir jedes $f \in B_0^{1,p}[0,1]$ durch 0 zu einer Funktion auf \mathbb{R}^d , d.h. wir setzen

$$\tilde{f}(x) := \begin{cases} f(x), & \text{falls } x \in \Omega, \\ 0, & \text{falls } x \in \mathbb{R}^d \setminus \Omega. \end{cases}$$

In den Übungen zeigen Sie, dass

$$\tilde{f} \in W_0^{1,p}(\mathbb{R}^d) \quad \text{und} \quad \|\tilde{f}\|_{1,p,\mathbb{R}^d} = \|f\|_{1,p,\Omega} \leq 1.$$

Insbesondere gilt damit $\tilde{f} \in M$ und somit

$$f = \tilde{f}|_{\Omega} \in M|_{\Omega} \quad \text{d.h.} \quad B_0^{1,p}[0,1] \subseteq M|_{\Omega}.$$

Als Teilmenge einer relativ kompakten Menge ist $B_0^{1,p}[0,1]$ damit selbst relativ kompakt in $L^p(\Omega)$ (denn abgeschlossene Teilmengen kompakter Mengen sind kompakt), was zu zeigen war.

Es bleibt, die Eigenschaften (i) und (ii) aus dem Satz von Kolmogorov-Riesz-Fréchet für M nachzuweisen:

- (i) Für alle $f \in M$ gilt $\|f\|_p \leq \|f\|_{1,p} = \|f\|_{1,p,\mathbb{R}^d} \leq 1$, d.h. M ist beschränkt.
- (ii) Zunächst behaupten wir, dass für alle $f \in W_0^{1,p}(\mathbb{R}^d)$ und $y \in \mathbb{R}^d$ gilt, dass

$$\|f_{-y} - f\|_p \leq |y|_q \|f\|_{1,p} \quad (\star),$$

wobei $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1$ und $|y|_q := \left(\sum_{j=1}^d |y_j|^q\right)^{1/q}$ bzw. $|y|_\infty := \max_{1 \leq j \leq d} |y_j|$.

Da $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d) \subseteq W_0^{1,p}(\mathbb{R}^d)$ dicht ist, genügt es, dies für den Fall $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ zu beweisen. Hier gilt mit dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

$$\begin{aligned} \|f_{-y} - f\|_p^p &= \int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y) - f(x)|^p dx = \int_{\mathbb{R}^d} \left| \int_0^1 \frac{d}{dt} f(x-ty) dt \right|^p dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \left| \int_0^1 -\langle y, \nabla f(x-ty) \rangle dt \right|^p dx \leq \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_0^1 |\langle y, \nabla f(x-ty) \rangle| dt \right)^p dx. \end{aligned}$$

Nun folgt aus der Hölder-Ungleichung und $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1$, dass

$$|\langle y, \nabla f(z) \rangle| = \left| \sum_{j=1}^d y_j \partial_j f(z) \right| \leq \left(\sum_{j=1}^d |y_j|^q \right)^{1/q} \left(\sum_{j=1}^d |\partial_j f(z)|^p \right)^{1/p} = |y|_q \cdot |\nabla f(z)|_p,$$

d.h.

$$\begin{aligned} \|f_{-y} - f\|_p^p &\leq |y|_q^p \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_0^1 |\nabla f(x-ty)|_p dt \right)^p dx \stackrel{\text{Höld.}}{\leq} |y|_q^p \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_0^1 |\nabla f(x-ty)|_p^p dt \right) dx \\ &= |y|_q^p \int_0^1 \left(\int_{\mathbb{R}^d} |\nabla f(x-ty)|_p^p dx \right) dt = |y|_q^p \int_0^1 \left(\int_{\mathbb{R}^d} |\nabla f(z)|_p^p dz \right) dt \\ &= |y|_q^p \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla f(z)|_p^p dz = |y|_q^p \left(\sum_{j=1}^d \int_{\mathbb{R}^d} |\partial_j f(z)|^p dz \right) \leq |y|_q^p \|f\|_{1,p}^p. \end{aligned}$$

Also ist (\star) bewiesen. Aber für $f \in M$ folgt aus (\star) , dass

$$\|f_{-y} - f\|_p \leq |y|_q, \quad y \in \mathbb{R}^d,$$

d.h.

$$\limsup_{y \rightarrow 0} \sup_{f \in M} \|f_{-y} - f\|_p = 0.$$

□

Zuletzt muss nur noch der Satz von Kolmogorov-Riesz-Fréchet selbst bewiesen werden (**haben wir in der Vorlesung nicht mehr geschafft**).

—Ende VL 27—

Beweis (von Satz 8.12). Wir setzen (i) und (ii) voraus, d.h. $M \subseteq L_p(\mathbb{R}^d)$ ist eine Teilmenge, so dass zum einen

$$C_M := \sup_{f \in M} \|f\|_p < \infty$$

und zum anderen, dass für ein beliebig vorgegebenes $\varepsilon > 0$, das wir im Folgenden zunächst

fixieren und später konkret wählen werden, ein $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ existiert, so dass

$$\forall f \in M \quad \forall y \in \mathbb{R}^d : \quad |y| < \delta \quad \Rightarrow \quad \|f_{-y} - f\|_p \leq \varepsilon.$$

Wir müssen zeigen, dass $\overline{M|_\Omega}$ in $L_p(\Omega)$ kompakt ist. Da mit $L_p(\Omega)$ auch die abgeschlossene Teilmenge $\overline{M|_\Omega}$ vollständig ist, genügt es nach Erinnerung 8.10 zu zeigen, dass $M|_\Omega$ (und damit auch $\overline{M|_\Omega}$) total beschränkt ist. Als Hilfsmittel hierzu sei $(\varphi_t)_{t>0}$ eine glatte Approximation der Eins auf \mathbb{R}^d , so gewählt, dass $\text{supp}(\varphi_t) \subseteq B(0, t)$, vergleiche Beispiel 3.23 (iii).

1. Schritt: Für $0 < t \leq \delta$ gilt:

$$\forall f \in M : \quad \|f * \varphi_t - f\|_p \leq \varepsilon.$$

Beweis: Mit den üblichen Rechen-tricks für Dirac-Familien können wir rechnen

$$\begin{aligned} \|f * \varphi_t - f\|_p^p &= \int_{\mathbb{R}^d} \left| \int_{\mathbb{R}^d} (f(x-y) - f(x)) \varphi_t(y) dy \right|^p dx \\ &\stackrel{\text{Höld.}}{\leq} \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y) - f(x)|^p \varphi_t(y) dy \right) \left(\int_{\mathbb{R}^d} \varphi_t(y) dy \right)^{p/q} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y) - f(x)|^p \varphi_t(y) dy \right) dx \\ &= \int_{B(0,t)} \varphi_t(y) \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y) - f(x)|^p dx \right) dy \\ &= \int_{B(0,t)} \varphi_t(y) \|f_{-y} - f\|_p^p dy \leq \varepsilon^p \int_{B(0,t)} \varphi_t(y) dy = \varepsilon^p. \end{aligned}$$

2. Schritt: Für jedes $t > 0$ ist die Menge

$$M_t := \{(f * \varphi_t)|_{\overline{\Omega}} : f \in M\}$$

relativ kompakt in $(C(\overline{\Omega}), \|\cdot\|_\infty)$.

Beweis: Nach Satz 1.16 ist für jedes $f \in M$ die Funktion

$$f * \varphi_t \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$$

und es gilt mit Hölder, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ und Annahme (i), dass

$$\|f * \varphi_t\|_\infty \leq \sup_{x \in \mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y) \varphi_t(y)| dy \leq \|\varphi_t\|_q \|f\|_p \leq \|\varphi_t\|_q \cdot C_M. \quad (*)$$

Aus der Mittelwertungleichung (für differenzierbare Funktionen $\mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$) folgt ferner

$$\begin{aligned} \forall x, y \in \mathbb{R}^d : \quad |(f * \varphi_t)(x) - (f * \varphi_t)(y)| &\leq |x - y| \cdot \sup\{|\nabla(f * \varphi_t)(x + h(y-x))| : h \in [0, 1]\} \\ &\leq |x - y| \cdot \sup\{|\nabla(f * \varphi_t)(z)| : z \in \mathbb{R}^d\}. \end{aligned}$$

Hierbei gilt (mit $(*)$ angewandt auf $\partial_j \varphi_t$ statt φ_t), dass

$$|\nabla(f * \varphi_t)(z)| \leq \sqrt{d} \max_{1 \leq j \leq d} |\partial_j(f * \varphi_t)(z)| = \sqrt{d} \max_{1 \leq j \leq d} |f * (\partial_j \varphi_t)(z)| \stackrel{(*)}{\leq} \underbrace{\sqrt{d} \left(\max_{1 \leq j \leq d} \|\partial_j \varphi_t\|_q \right)}_{=: C_{t,d}} \cdot C_M,$$

d.h. wir erhalten

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^d : |(f * \varphi_t)(x) - (f * \varphi_t)(y)| \leq C_{t,d} \cdot C_M \cdot |x - y| \quad (**)$$

Die Abschätzungen (*) und (**) zeigen, dass M_t beschränkt und gleichgradig stetig ist, d.h. die Aussage in Schritt 2 folgt aus dem Satz von Arzelà-Ascoli.

3. Schritt: Fixiere t mit $0 < t \leq \delta$. Nach Schritt 2 ist M_t in $C(\overline{\Omega}, \|\cdot\|_\infty)$ total beschränkt, d.h. zu obigem $\varepsilon > 0$ existieren endlich viele ε -Kugeln in $(C(\overline{\Omega}, \|\cdot\|_\infty))$, die M_t überdecken. Es existiert also $m = m(\varepsilon, M_t) \in \mathbb{N}$ und $g_1, \dots, g_m \in C(\overline{\Omega})$, so dass für jedes $f \in M$ ein $j = j(f) \in \{1, \dots, m\}$ existiert mit

$$\|(f * \varphi_t)|_{\overline{\Omega}} - g_j\|_{\infty, \overline{\Omega}} \leq \varepsilon,$$

also auch

$$\|(f * \varphi_t)|_{\overline{\Omega}} - g_j\|_{p, \overline{\Omega}} \leq \varepsilon \left(\lambda^d(\overline{\Omega}) \right)^{1/p}.$$

Aber dann folgt mit Schritt 1, dass

$$\begin{aligned} \|f|_{\Omega} - g_j\|_{p, \Omega} &\leq \|f|_{\Omega} - (f * \varphi_t)|_{\Omega}\|_{p, \Omega} + \|(f * \varphi_t)|_{\Omega} - g_j\|_{p, \Omega} \\ &\leq \|f - (f * \varphi_t)\|_{p, \mathbb{R}^d} + \|(f * \varphi_t)|_{\Omega} - g_j\|_{p, \Omega} \\ &\leq \varepsilon(1 + (\lambda^d(\overline{\Omega}))^{1/p}). \end{aligned}$$

Ist nun $\tilde{\varepsilon} > 0$ beliebig vorgegeben, so können wir unser obiges ε so klein wählen, dass $\varepsilon(1 + (\lambda^d(\overline{\Omega}))^{1/p}) < \tilde{\varepsilon}$ und sehen, dass

$$M|_{\Omega} \subseteq \bigcup_{j=1}^m \{f \in L_p(\Omega) : \|f - g_j\|_{p, \Omega} \leq \tilde{\varepsilon}\}.$$

Also ist $M|_{\Omega}$ total beschränkt und der Beweis komplett. □

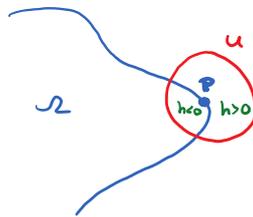
Teil A.
Anhang

A.1. Fakten aus der Vektoranalysis

Es sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ offen und beschränkt. Wir sagen Ω hat einen C^k -Rand, $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, falls zu jedem $p \in \partial\Omega$ eine offene Umgebung $p \in U \subseteq \mathbb{R}^d$ und eine Funktion $h \in C^k(U)$ existiert, so dass $\nabla h \neq 0$ auf U und

$$\Omega \cap U = \{x \in U : h(x) < 0\}, \quad \partial\Omega \cap U = \{x \in U : h(x) = 0\}.$$

In diesem Fall ist $\partial\Omega$ eine $(n-1)$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^d (eine **Hyperfläche**). Beispielsweise hat die offene Kugel $B(x, \varepsilon)$ einen C^∞ -Rand.

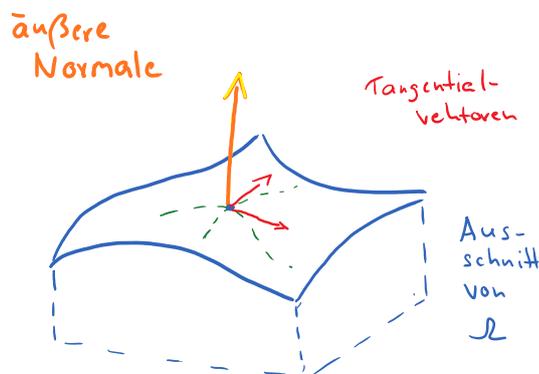


Ein Vektor $v \in \mathbb{R}^d$ heißt **tangential** an $\partial\Omega$ in p , falls $\varepsilon > 0$ und $\psi \in C^1((-\varepsilon, \varepsilon); \mathbb{R}^d)$ existiert, so dass $\psi(t) \in \partial\Omega$ für alle $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, $\psi(0) = p$ und $\psi'(0) = v$. Die Menge T_p aller solcher **Tangentialvektoren** ist ein $(n-1)$ -dimensionaler Unterraum des \mathbb{R}^d . Er heißt **Tangentialraum** in p .

Es existiert genau ein $v(p) \in \mathbb{R}^d$ mit $|v(p)| = 1$, $v(p) \in T_p^\perp$ und der Eigenschaft, dass ein $\varepsilon > 0$ existiert, so dass

$$p + tv(p) \notin \Omega \quad (0 < t < \varepsilon) \quad \text{und} \quad p + tv(p) \in \Omega \quad (-\varepsilon < t < 0).$$

Der Vektor $v(p)$ heißt die **äußere Normale** an $\partial\Omega$ in p . Die Abbildung $v : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}^d, p \mapsto v(p)$ ist stetig.



Gilt wie oben $\partial\Omega \cap U = \{x \in U : h(x) = 0\}$, so ist

$$v(p) = \frac{\nabla h(p)}{|\nabla h(p)|}, \quad p \in \partial\Omega \cap U.$$

Satz A.1.1 (Divergenzsatz). Besitzt Ω einen C^1 -Rand, so existiert genau ein Maß $\sigma = \sigma_{\partial\Omega}$ auf den Borelmengen von $\partial\Omega$, so dass

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} f(x) \, dx = \int_{\partial\Omega} \langle f(z), \nu(z) \rangle \, d\sigma(z)$$

für alle $f \in C^1(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^d)$. Dieses Maß σ heißt das **Oberflächenmaß** auf $\partial\Omega$.

Hierbei ist $C^1(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^d) := \{f \in C^1(\Omega; \mathbb{R}^d) \cap C(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^d) : \nabla f \text{ besitzt stetige Fortsetzung auf } \overline{\Omega}\}$.

A.2. Fakten aus der Maßtheorie

Parameterintegrale

Es sei (Y, \mathcal{A}, μ) ein Maßraum und T ein metrischer Raum. Ferner sei

$$G(t) := \int_Y g(y, t) d\mu(y), \quad t \in T.$$

Hierbei ist $g : Y \times T \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion, so dass für jedes $t \in T$ die Funktion

$$Y \ni y \mapsto g(y, t) \in \mathbb{R}$$

μ -integrierbar ist (damit die Definition von G überhaupt Sinn macht).

Satz A.2.1. Die Funktion $G : T \rightarrow \mathbb{R}$ sei wie oben definiert.

(i) Es sei $t_0 \in T$ und

- es existiere eine μ -integrierbare Funktion φ , so dass

$$\forall t \in T, y \in Y : |g(y, t)| \leq \varphi(y),$$

- für alle $y \in Y$ sei die Abbildung $T \ni t \mapsto g(y, t) \in \mathbb{R}$ stetig in t_0 .

Dann ist auch G stetig in t_0 .

(ii) Nun sei $T := I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und es sei

- die Abbildung $I \ni t \mapsto g(y, t) \in \mathbb{R}$ für alle $y \in Y$ differenzierbar mit Ableitung $\partial_t g(y, t)$, und
- es existiere eine μ -integrierbare Funktion ψ , sodass

$$\forall t \in I, y \in Y : |\partial_t g(y, t)| \leq \psi(y).$$

Dann ist G auf I differenzierbar, die Abbildung $Y \ni y \mapsto \partial_t g(y, t) \in \mathbb{R}$ ist μ -integrierbar für alle $t \in I$ und es gilt

$$G'(t) = \int \partial_t g(y, t) d\mu.$$

Beweis. Folgt mehr oder weniger direkt aus dem Satz von der dominierten Konvergenz (Details sind in jedem Buch/Skript zur Maßtheorie zu finden). \square

In dieser Vorlesung verwenden wir meist folgendes Korollar dieses Satzes.

Korollar A.2.2. Es sei (Y, \mathcal{A}, μ) ein endlicher Maßraum (d.h. $\mu(Y) < \infty$). Gleichzeitig sei Y ein (mit einer geeigneten Metrik ausgestatteter) kompakter metrischer Raum. Weiterhin sei $U \subseteq \mathbb{R}^d$ offen und $f : Y \times U \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion, so dass

- die Abbildung $Y \ni y \mapsto f(y, x) \in \mathbb{R}$ für jedes $x \in U$ stetig ist,
- die partielle Ableitung $\frac{\partial}{\partial x_j} f(y, x)$ für alle $(y, x) \in Y \times U$ existiert, und
- die Abbildung

$$Y \times U \ni (y, x) \mapsto \frac{\partial}{\partial x_j} f(y, x) \in \mathbb{R}$$

stetig ist.

Dann ist die Abbildung $U \ni x \mapsto \int_Y f(y, x) d\mu(y)$ in jedem $x \in U$ in Richtung x_j stetig partiell differenzierbar und

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \int_Y f(y, x) d\mu(y) = \int_Y \frac{\partial}{\partial x_j} f(y, x) d\mu(y).$$

Beweis. Da $\mu(Y) < \infty$ und die Funktion $Y \ni y \mapsto f(y, x) \in \mathbb{R}$ auf dem Kompaktum Y für jedes $x \in U$ stetig, also beschränkt, ist, existiert

$$\int_Y f(y, x) d\mu(y)$$

für jedes $x \in U$. Nun sei $x \in U$ fixiert und $\varepsilon > 0$ so klein gewählt, dass $x + te_j \in U$ falls $|t| \leq \varepsilon$. Hierbei ist e_j der j -te Standardbasisvektor von \mathbb{R}^d . Weiterhin setzen wir

$$g : Y \times [-\varepsilon, \varepsilon] \rightarrow \mathbb{R}, \quad g(y, t) := f(y, x + te_j).$$

Dann ist die Abbildung $[-\varepsilon, \varepsilon] \ni t \mapsto g(y, t)$ für alle $y \in Y$ differenzierbar und

$$\partial_t g(y, t) = \frac{\partial}{\partial x_j} f(y, x + te_j).$$

Da die Funktion $\frac{\partial}{\partial x_j} f$ nach Voraussetzung auf $Y \times U$ stetig ist, ist auch $\partial_t g : Y \times [-\varepsilon, \varepsilon] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und somit auch beschränkt (denn $Y \times [-\varepsilon, \varepsilon]$ ist kompakt). Es existiert also eine Konstante $C \geq 0$, so dass

$$\forall (y, t) \in Y \times [-\varepsilon, \varepsilon] : |\partial_t g(y, t)| \leq C.$$

Wegen $\mu(Y) < \infty$ ist die konstante Funktion $\psi : Y \ni y \mapsto C$ aber μ -integrierbar. Also zeigt Teil (ii) von Satz A.2.1, dass die Funktion

$$G : [-\varepsilon, \varepsilon] \rightarrow \mathbb{R}, \quad G(t) := \int_Y g(y, t) d\mu(y) = \int_Y f(y, x + te_j) d\mu(y)$$

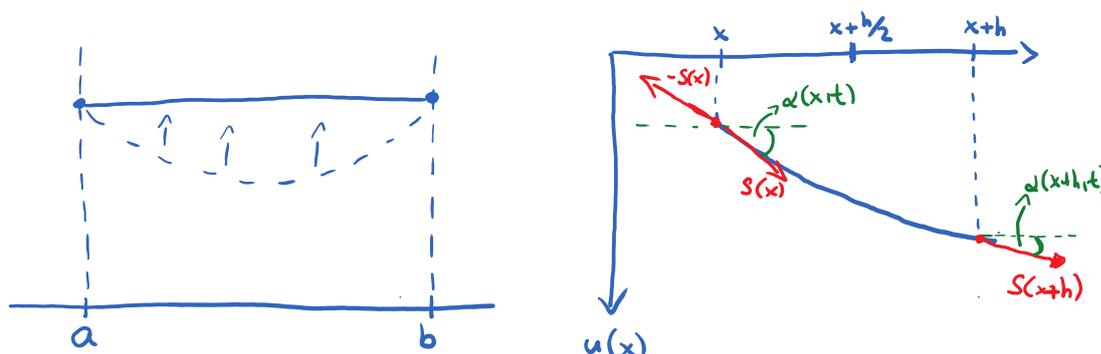
differenzierbar ist und es gilt insbesondere

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \int_Y f(y, x) d\mu(y) = G'(0) = \int_Y \partial_t g(y, 0) d\mu(y) = \int_Y \frac{\partial}{\partial x_j} f(y, x) d\mu(y).$$

Nun beachten wir nur noch, dass die Abbildung $B[x_0, r] \ni x \mapsto \int_Y \frac{\partial}{\partial x_j} f(y, x) d\mu(y)$ nach Teil (i) von Satz A.2.1 für jede kompakte Kugel $B[x_0, r] \subseteq U$ stetig ist (denn nach Voraussetzung ist $\frac{\partial}{\partial x_j} f$ auf $Y \times B[x_0, r]$ stetig, also beschränkt, so dass die Voraussetzungen von Teil (i) wieder mit einer konstanten Majorantenfunktion φ erfüllt werden können). \square

A.3. Herleitung der eindimensionalen Wellengleichung

Wir betrachten die Schwingungen einer elastischen, biegsamen Saite mit konstanter Massendichte ρ , die an zwei Enden fixiert ist. Dazu sei $u = u(x, t)$ die vertikale Auslenkung der Saite aus der Ruhelage in Abhängigkeit von Ort x und Zeit t (wir beschränken uns auf Schwingungen in der (x, u) -Ebene). Vereinfachend betrachten wir nur kleine Auslenkungen der Saite (keine Verlängerung der Saite, keine horizontalen Bewegungen).



Im Folgenden sei $S(x, t) \in \mathbb{R}^2$ die Spannungskraft, die das Saitenstück rechts von x zum Zeitpunkt t auf das Saitenstück links von x ausübt (dann ist $-S(x, t)$ die Spannung, die das Saitenstück links von x auf das Saitenstück rechts von x ausübt). Ferner sei $s(x, t) = |S(x, t)|$. Da wir eine biegsam-elastische Saite betrachten, gehen wir davon aus, dass $S(x, t)$ stets tangential zur Saite ist. Wir betrachten nun einen kleinen Abschnitt der Saite zwischen x und $x + h$. Auf diesen wirken (unter Vernachlässigung von Schwerkraft, Luftreibung, etc.) nur die äußeren Kräfte $-S(x, t)$ und $S(x + h, t)$. Um die Bewegung des Saitenstücks zu bestimmen, betrachten wir stellvertretend den Mittelpunkt $(x + h/2, u(x + h/2, t))$, den wir mit der Masse des Saitenstücks belegen, und lassen die äußeren Kräfte auf ihn wirken. Da der Mittelpunkt sich nach Annahme nur vertikal bewegt, betrachten wir nur diese Komponente der Bewegung. Nach dem 2. Newtonschen Gesetz (Kraft = Masse \cdot Beschleunigung), erhalten wir

$$s(x + h, t) \sin(\alpha(x + h, t)) - s(x, t) \sin(\alpha(x, t)) = (\rho \cdot h) \partial_t^2 u(x + h/2, t),$$

wobei wir benutzt haben, dass sich die Masse des Saitenstücks aufgrund der kleinen Auslenkungen gut durch $\rho \cdot h$ approximieren lässt.

Teilen wir durch h und schicken wir h gegen 0, so folgt (unter geeigneten Annahmen an die Funktionen)

$$\frac{d}{dx} (s(x, t) \sin(\alpha(x, t))) = \rho \partial_t^2 u(x, t).$$

Nun gilt $\tan(\alpha(x, t)) = \partial_x u(x, t)$, d.h.

$$\sin(\alpha(x, t)) = \frac{\partial_x u(x, t)}{\sqrt{1 + \partial_x u(x, t)^2}}$$

und wir erhalten die folgende partielle Differentialgleichung für u

$$\frac{d}{dx} \left(s(x, t) \frac{\partial_x u(x, t)}{\sqrt{1 + \partial_x u(x, t)^2}} \right) = \rho \partial_t^2 u(x, t).$$

Diese enthält noch die unbekannte Funktion s . Um diese loszuwerden, beobachten wir, dass die Spannung im Ruhezustand konstant ist ($s(x, 0) =: s$). Da wir nur kleine Auslenkungen betrachten, können wir also $s(x, t)$ durch die Konstante s ersetzen. Genauso ist $\sqrt{1 + \partial_x u(x, t)^2}$ bei kleinen Auslenkungen näherungsweise gleich 1. Mit $c^2 := \frac{s}{\rho}$ erhalten wir die **(eindimensionale Wellengleichung)**

$$\partial_t^2 u(x, t) = c^2 \partial_x^2 u(x, t).$$

Diese Gleichung geht zurück auf d'Alembert (1717-1783). Die Konstante c wird auch als **Wellengeschwindigkeit** bezeichnet (und oft gleich 1 gesetzt).

A.4. Der Rieszsche Darstellungssatz

Satz. Sei $(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein Hilbert-Raum über $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Dann gilt:

(i) Ist $u \in \mathcal{H}$, so ist die Abbildung

$$\Phi_u : \mathcal{H} \ni v \mapsto \langle v, u \rangle \in \mathbb{K}$$

linear und stetig.

(ii) Ist umgekehrt $\Phi : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{K}$ linear und stetig, so existiert ein eindeutiges $u \in \mathcal{H}$, so dass $\Phi = \Phi_u$, d.h.

$$\Phi(v) = \langle v, u \rangle$$

für alle $v \in \mathcal{H}$.

Beweis. (i) Dies folgt sofort aus der Cauchy-Schwarz-Ungleichung

$$|\Phi_u(v) - \Phi_u(v')| = |\langle v, u \rangle - \langle v', u \rangle| = |\langle v - v', u \rangle| \leq \|v - v'\| \|u\|.$$

(ii) Wir unterteilen den Beweis in mehrere Schritte.

1. vorbereitender Schritt: $U \subseteq \mathcal{H}$ sei ein abgeschlossener Unterraum. Ferner sei

$$U^\perp := \{v \in \mathcal{H} : \langle v, u \rangle = 0 \text{ für alle } u \in U\}$$

das **orthogonale Komplement** von U . Dann ist klar, dass auch U^\perp ein abgeschlossener Unterraum von \mathcal{H} ist. Wir zeigen nun, dass

$$\mathcal{H} = U \oplus U^\perp,$$

d.h. $\mathcal{H} = U + U^\perp$ und $U \cap U^\perp = \{0\}$.

Die letzte Aussage ist klar, denn ist $v \in U^\perp$, so gilt für alle $u \in U$, dass $\langle v, u \rangle = 0$. Gilt auch $v \in U$, so können wir $u = v$ wählen und erhalten $\langle v, v \rangle = \|v\|^2 = 0$ also $v = 0$.

Jetzt sei $x \in \mathcal{H}$ beliebig und $\delta := \inf\{\|x - u\| : u \in U\}$. Dann existiert eine Folge $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ aus U , so dass $\|x - u_n\| \rightarrow \delta$. Nun gilt in jedem Vektorraum mit Skalarprodukt die **Parallelogrammgleichung**, d.h.

$$2(\|a\|^2 + \|b\|^2) = \|a - b\|^2 + \|a + b\|^2, \quad (a, b \in \mathcal{H}).$$

Wenden wir dies an mit $a = u_n - x, b = u_m - x$, so folgt

$$2(\|u_n - x\|^2 + \|u_m - x\|^2) = \|u_n - u_m\|^2 + \|u_n + u_m - 2x\|^2, \quad n, m \in \mathbb{N}.$$

Da $\frac{1}{2}(u_n + u_m) \in U$, folgt hieraus

$$\begin{aligned} \|u_n - u_m\|^2 &= 2\|u_n - x\|^2 + 2\|u_m - x\|^2 - 4\left\|\frac{1}{2}(u_n + u_m) - x\right\|^2 \\ &\leq 2\|u_n - x\|^2 + 2\|u_m - x\|^2 - 4\delta^2. \end{aligned}$$

Hier geht die rechte Seite (wegen $\|u_n - x\| \rightarrow \delta$) für $n, m \rightarrow \infty$ gegen 0, d.h. $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist eine Cauchy-Folge, die im vollständigen Raum \mathcal{H} konvergieren muss. Wir setzen

$$u_0 := \lim_{n \rightarrow \infty} u_n.$$

Da U abgeschlossen ist und $u_n \in U, n \in \mathbb{N}$, gilt, ist auch $u_0 \in U$. Nun sei $v_0 := x - u_0$, so dass

$$x = u_0 + v_0.$$

Es bleibt zu zeigen, dass $v_0 \in U^\perp$ gilt. Dazu betrachten wir für ein beliebiges $u \in U$ und ein noch zu wählendes $\alpha \in \mathbb{K}$ die Funktion

$$f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty), \quad f(t) = \|v_0 + t\alpha u\|^2.$$

Nach Definition von u_0 und δ hat diese Funktion ein Minimum in $t = 0$ (nämlich δ^2), denn

$$v_0 + t\alpha u = x - (u_0 - t\alpha u) \quad \text{und} \quad u_0 - t\alpha u \in U.$$

Also muss auch $f'(0) = 0$ gelten. Da

$$\begin{aligned} f(t) &= \langle v_0 + t\alpha u, v_0 + t\alpha u \rangle = \|v_0\|^2 + t^2 |\alpha|^2 \|u\|^2 + t (\langle \alpha u, v_0 \rangle + \langle v_0, \alpha u \rangle) \\ &= \|v_0\|^2 + t^2 |\alpha|^2 \|u\|^2 + 2t \operatorname{Re}(\alpha \langle u, v_0 \rangle), \end{aligned}$$

gilt also

$$f'(0) = 2 \operatorname{Re}(\alpha \langle u, v_0 \rangle) = 0.$$

Nun wählen wir $\alpha = \overline{\langle u, v_0 \rangle}$ und sehen, dass

$$|\langle u, v_0 \rangle|^2 = 0$$

gilt, d.h. $\langle u, v_0 \rangle = 0$. Da $u \in U$ hier beliebig war, folgt $v_0 \in U^\perp$.

2. Schritt: Eindeutigkeit

Für $u, u' \in \mathcal{H}$ gelte

$$\Phi(v) = \langle v, u \rangle = \langle v, u' \rangle$$

für alle $v \in \mathcal{H}$. Dann folgt auch $\langle v, u - u' \rangle = 0$ für alle $v \in \mathcal{H}$. Für die Wahl $v = u - u'$ folgt

$$\langle u - u', u - u' \rangle = \|u - u'\|^2 = 0 \quad \text{also auch} \quad u - u' = 0 \quad \text{bzw.} \quad u = u'.$$

3. Schritt: Existenz

Ist $\Phi = 0$ die Nullabbildung, so können wir $u = 0$ wählen. Nun sei $\Phi \neq 0$ und

$$U := \operatorname{Kern}(\Phi) := \Phi^{-1}(\{0\}).$$

Aufgrund der Linearität von Φ ist dies ein Unterraum von \mathcal{H} und aufgrund der Stetigkeit von Φ ist dieser abgeschlossen. Nach Schritt 1 gilt also $\mathcal{H} = U \oplus U^\perp$. Wäre $U^\perp = \{0\}$, so müsste $\mathcal{H} = U$, d.h. $\Phi = 0$ gelten. Da wir annehmen, dass dies nicht der Fall ist, existiert also $0 \neq w' \in U^\perp$ (für das dann $w' \notin U$ also $\Phi(w') \neq 0$ gilt). Für $w := \frac{1}{\Phi(w')} \cdot w' \in U^\perp$ gilt damit aufgrund der Linearität $\Phi(w) = 1$. Ferner folgt $v - \Phi(v)w \in U$ für alle $v \in \mathcal{H}$, denn

$$\Phi(v - \Phi(v)w) = \Phi(v) - \Phi(v)\Phi(w) = \Phi(v) - \Phi(v) = 0.$$

Da $w \in U^\perp$ folgt somit mit der Wahl $u := \frac{1}{\|w\|^2} \cdot w$ für alle $v \in \mathcal{H}$:

$$\begin{aligned}(v, u) &= \frac{1}{\|w\|^2} \cdot \langle v, w \rangle \\ &= \frac{1}{\|w\|^2} \cdot \left(\underbrace{\langle v - \Phi(v)w, w \rangle}_{=0} + \langle \Phi(v)w, w \rangle \right) \\ &= \frac{1}{\|w\|^2} \cdot \left(\Phi(v) \|w\|^2 \right) = \Phi(v).\end{aligned}$$

□

Endnoten

Notizen zum Abschnitt "Prolog"

1. Pierre-Simon Laplace, 1749-1827, französischer Mathematiker.
2. $\int_B u(x, t) dx$ ist die abkürzende Schreibweise für das Lebesgue-Integral $\int_B u(x, t) d\lambda^d(x)$, die wir in dieser Vorlesung verwenden wollen. Falls an anderer Stelle die Notation nicht klar sein sollte, hilft eventuell ein Blick in das Symbolverzeichnis.
3. Giuseppe Peano, 1858 - 1932, italienischer Mathematiker.
4. Émile Picard, 1856-1941, französischer Mathematiker, und Ernst Leonard Lindelöf, 1870-1946, finnischer Mathematiker.
5. Hans Lewy, 1904-1988, deutsch-amerikanischer Mathematiker, und Francois Trèves, geb. 1930, italienisch-amerikanischer Mathematiker.
6. Sind in der Gleichung $\sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) \partial^\alpha u(x) = f(x)$ die rechte Seite f und die Koeffizienten-Funktionen a_α jedoch analytisch, so existieren stets lokale Lösungen u . Dies besagt der Satz von Cauchy-Kowalewskaja (nach Augustin-Louis Cauchy, 1789-1857, franz. Mathematiker, und Sofja Wassiljewna Kowalewskaja, 1850-1891, russische Mathematikerin). Allerdings ist die Analytizität auch eine sehr starke Voraussetzung.
7. Siméon Denis Poisson, 1781-1840, französischer Physiker und Mathematiker.

Notizen zum Abschnitt "Harmonische Funktionen"

1. Messbarkeit einer Funktion bedeutet für uns immer Borel-Messbarkeit.
2. Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ offen und $\varphi \in l_c^\infty(\Omega)$, d.h. $K := \text{supp}(\varphi) \subseteq \Omega$ ist kompakt. Da $\Omega^c := \mathbb{R}^d \setminus \Omega$ abgeschlossen ist, ist dann $d := \text{dist}(K, \Omega^c) > 0$. Für $x \in \Omega$ mit $\text{dist}(x, \Omega^c) < d/2$ gilt also $\varphi(x) = 0$.
3. Sei $\varphi \in C_c(B(0, R))$, d.h. $\varphi(x) = 0$ für $|x| > R$. Da φ auf der kompakten Menge $B[0, 2R]$ gleichmäßig stetig ist, existiert dann zu $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$, das wir ohne Einschränkung $< R$ wählen können, mit

$$\forall x, y \in B[0, 2R] : |x - y| \leq \delta \Rightarrow |\varphi(x) - \varphi(y)| \leq \varepsilon.$$

Aber was passiert, wenn x oder y (oder beide) nicht Element von $B[0, 2R]$ sind, aber $|x - y| < \delta < R$ erfüllen? Dann ist $\varphi(x) = \varphi(y) = 0$, denn wenn eines der Elemente nicht in $B[0, 2R]$ liegt, kann das andere nicht in $B[0, R]$ liegen. Also gilt tatsächlich

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^d : |x - y| \leq \delta \Rightarrow |\varphi(x) - \varphi(y)| \leq \varepsilon,$$

d.h. φ ist gleichmäßig stetig auf \mathbb{R}^d .

4. Tatsächlich ist $u \in h(\Omega)$ auf der zusammenhängenden Menge $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ bereits dann konstant, wenn sie in Ω ein **lokales** Minimum oder Maximum besitzt. Dies folgt aus der Tatsache, dass harmonische Funktionen reell-analytisch sind.
5. Carl Gustav Axel Harnack, 1851-1888, deutscher Mathematiker.
6. Joseph Liouville, 1809-1882, französischer Mathematiker.

Notizen zum Abschnitt "Die Poisson-Gleichung"

1. Im Prolog haben wir gezeigt, dass mittels \tilde{f} in der Gleichung $\partial_t v - \Delta_x v = \tilde{f}$ z.B. eine gegebene Wärmezufuhr in Ω modelliert werden kann.
2. Die Poisson-Gleichung $\Delta u = f$ spielt auch bei anderen physikalischen Prozessen eine wichtige Rolle, z.B.
 - in der Elektrostatik: hierbei ist $-f$ eine gegebene Ladungsdichte (Ladungsmenge in kleinem Volumen um einen Raumpunkt) und u das elektrostatische Potential (d.h. $-\nabla u$ ist das elektrische Feld),
 - in der Gravitation: hierbei ist $-f$ eine gegebene Massendichte und u das Gravitationspotential.

Man nennt die Poisson-Gleichung daher oft auch **Potential-Gleichung**.

3. Peter Gustav Lejeune Dirichlet, 1805-1859, deutscher Mathematiker.
4. Jacques Hadamard, 1865-1963, französischer Mathematiker.
5. Etwas genauer ist hierbei die Stetigkeit der Abbildung

$$T : C(\Omega) \times C(\partial\Omega) \rightarrow C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega}), \quad T(f, g) = u$$

gemeint, die die Daten (f, g) auf die zugehörige Lösung u abbildet. Hierzu muss der Daten- bzw. Lösungsraum natürlich mit einer Topologie bzw. Metrik versehen werden. Im besprochenen Fall ist die Abbildung zum Beispiel stetig, sofern wir beide Räume mit der jeweiligen Supremums- bzw. Maximumsnorm versehen.

6. Es ist

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2} |x - y| f(y) dy = \frac{1}{2} \left(\int_{-\infty}^x (x - y) f(y) dy + \int_x^{\infty} (y - x) f(y) dy \right).$$

Weiterhin folgt aus der Produktregel und dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung, dass

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left(\int_{-\infty}^x (x - y) f(y) dy \right) &= \frac{d}{dx} \left(x \cdot \int_{-\infty}^x f(y) dy - \int_{-\infty}^x y \cdot f(y) dy \right) \\ &= 1 \cdot \int_{-\infty}^x f(y) dy + x \cdot f(x) - x \cdot f(x) = \int_{-\infty}^x f(y) dy \end{aligned}$$

und genauso

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left(\int_x^{\infty} (y - x) f(y) dy \right) &= \frac{d}{dx} \left(\int_x^{\infty} y \cdot f(y) dy - x \cdot \int_x^{\infty} f(y) dy \right) \\ &= -x \cdot f(x) - 1 \cdot \int_x^{\infty} f(y) dy - x \cdot (-f(x)) = - \int_x^{\infty} f(y) dy. \end{aligned}$$

Insgesamt folgt also

$$u''(x) = \frac{1}{2} \frac{d}{dx} \left(\int_{-\infty}^x f(y) dy - \int_x^{\infty} f(y) dy \right) = \frac{1}{2} (f(x) - (-f(x))) = f(x).$$

7. George Green 1793-1841, britischer Mathematiker und Physiker.
8. Die Wahl des Wertes von E bzw. $\partial_j E$ auf der Lebesgue-Nullmenge $\{0\}$ hat keinen Einfluss auf die Existenz oder Werte der zugehörigen Integrale.
9. Wir betrachten nur den Fall $d \geq 3$, die Rechnungen für den Fall $d = 2$ sind analog und seien als Übung überlassen. Aus der Cauchy-Schwarz-Ungleichung folgt zunächst wegen $|\nu(y)| = 1$, dass

$$|\partial_\nu u(y)| = |\langle \nabla u(y), \nu(y) \rangle| \leq |\nabla u(y)| \leq \max_{y \in \bar{\Omega}} |\nabla u(y)| =: \|\nabla u\|_\infty$$

und damit wegen $E|_{\partial B(0,\varepsilon)} = \frac{1}{(2-d)\sigma_{d-1}\varepsilon^{d-2}}$, dass

$$\left| \int_{\partial B(0,\varepsilon)} E \partial_\nu u d\sigma \right| \leq \|\nabla u\|_\infty \int_{\partial B(0,\varepsilon)} |E| d\sigma = \|\nabla u\|_{L^\infty(\Omega)} \frac{\varepsilon}{(d-2)},$$

d.h. $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\partial B(0, \varepsilon)} E \partial_\nu u \, d\sigma = 0$.

10. Isaac Newton, 1643-1727, britischer Mathematiker und Physiker. Die Namenswahl **Newton-Potential** rührt daher, dass $-V_f$ gerade das Gravitationspotential einer Masse mit Dichte f beschreibt.

11. Dass auch die Normalenableitung $x \mapsto \partial_{\nu(y)} E(x - y)$ harmonisch ist, folgt daraus, dass die Operatoren $\partial_{\nu(y)}$ und Δ_x mit dem Satz von Schwarz vertauschen. Zum Beispiel gilt

$$\partial_{x_j} \partial_{\nu(y)} E(x - y) = \partial_{x_j} \langle \nabla_y E(x - y), \nu(y) \rangle = \partial_{x_j} \sum_{k=1}^d \nu_k(y) \partial_{y_k} E(x - y) = \sum_{k=1}^d \nu_k(y) \partial_{y_k} \partial_{x_j} E(x - y).$$

12. Im Falle $d = 2$ gilt

$$G(x, y) = -\frac{1}{2\pi} \left(\ln \left(\frac{1}{|x - y|} \right) - \ln \left(\frac{1}{\sqrt{\frac{|x|^2 |y|^2}{r^2} - 2 \langle x, y \rangle + r^2}} \right) \right).$$

13. Wir werden später sehen, dass $V = E * f$ im allgemeineren Fall $f \in C_c(\mathbb{R}^d)$ zumindest noch eine sogenannte distributionelle Lösung von $\Delta V = f$ ist.

14. Ist $\eta \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ ein Glättungskern auf $B(0, \frac{r}{2})$, so erfüllt $\varphi = \eta * \mathbb{1}_{B(p, \frac{5r}{2})}$ die gewünschten Forderungen.

15. Oskar Perron, 1880-1975, deutscher Mathematiker.

16. Sei w eine Barriere für Ω in x_0 und sei $\varepsilon > 0$. Da g in x_0 stetig ist, existiert $\delta > 0$ mit

$$\forall x \in B(x_0, \delta) \cap \partial\Omega : |g(x) - g(x_0)| \leq \varepsilon.$$

Beachte nun, dass $w < 0$ auf $\bar{\Omega} \setminus \{x_0\}$, d.h.

$$\alpha := \frac{\max_{x \in \partial\Omega} |g(x) - g(x_0)|}{\min_{x \in \partial\Omega \setminus B(x_0, \delta)} (-w(x))} \geq 0.$$

Mit dieser Wahl von α gilt dann auch

$$\forall x \in \partial\Omega : |g(x) - g(x_0)| \leq \max(\varepsilon, -\alpha w(x)) \leq \varepsilon - \alpha w(x).$$

Nun zeigen wir die (zu \heartsuit äquivalente) Abschätzung

$$(*) \quad \forall x \in \bar{\Omega} : g(x_0) - \varepsilon + \alpha w(x) \leq P(g)(x) \leq g(x_0) + \varepsilon - \alpha w(x).$$

Die linke Ungleichung ist hierbei klar, denn nach Wahl von α ist $x \mapsto g(x_0) - \varepsilon + \alpha w(x) \in S(g)$. Für die rechte Ungleichung beachten wir, dass ebenfalls nach Wahl von α gilt, dass

$$g(x) + \alpha w(x) \leq g(x_0) + \varepsilon, \quad x \in \partial\Omega.$$

Ist also $v \in S(g)$, so gilt auch

$$v(x) + \alpha w(x) \leq g(x) + \alpha w(x) \leq g(x_0) + \varepsilon, \quad x \in \partial\Omega.$$

Aber dann folgt mit Lemma 2.28, dass

$$v(x) + \alpha w(x) \leq g(x_0) + \varepsilon \quad \text{bzw.} \quad v(x) \leq g(x_0) + \varepsilon - \alpha w(x)$$

für alle $x \in \bar{\Omega}$, was $P(g)(x) \leq g(x_0) + \varepsilon - \alpha w(x)$ zur Folge hat.

17. Die äußere Kugelbedingung ist etwa für alle $x_0 \in \partial\Omega$ erfüllt, wenn Ω konvex ist oder wenn Ω einen C_2 -Rand besitzt. Im letzteren Fall können wir $\partial\Omega$ in der Nähe von x_0 als Graph einer quadratischen Funktion beschreiben (und in jede Parabel lässt sich eine Kugel einbetten).

Notizen zum Abschnitt "Die Wärmeleitungsgleichung"

1. Im Prolog haben wir diskutiert, dass die Lösung $u(x, t)$ von $\partial_t u(x, t) - \Delta_x u(x, t) = f(x, t)$ zum Beispiel die Temperatur zur Zeit t an der Stelle $x \in \Omega$ beschreiben könnte. In diesem Fall wäre $f = f(x, t)$ als eine gegebene Wärmequelle zu interpretieren.
2. In manchen Texten wird für eine klassische Lösung u von $(\partial_t - \Delta_x)u(x, t) = f(x, t)$ nur verlangt, dass u bezüglich x zweimal und bezüglich t nur einmal stetig differenzierbar ist. Obwohl das durchaus Sinn macht, macht unsere stärkere Forderung $u \in C^2(\Omega \times (0, T))$, wie wir sehen werden, am Ende keinen Unterschied.
3. Andrei Nikolajewitsch Tychonov, 1906–1993, russischer Mathematiker.
4. Auch die Vorgabe von anderen Typen von Randwerten wäre möglich. Auf den Übungsblättern betrachten wir einige Beispiele.
5. Wie in der Einleitung schon erwähnt wurde, ist der Wärmeleitungsoperator W ein sogenannter **parabolischer** Differentialoperator, im Gegensatz zum Laplace-Operator, der **elliptisch** ist. Wie genau diese Begriffe definiert sind, werden wir später erklären.
6. Man mache sich klar, dass das parabolische Maximumprinzip auch aus physikalischer Sicht Sinn macht: Die Anfangstemperatur wird sich mit der Zeit gleichmäßig verteilen (also absinken), nur am Rand von Ω kann es wegen äußerer Wärmezufuhr weiter warm bleiben.
7. Sei $u \in C^2(\Omega_T) \cap C(\tilde{\Omega}_T)$ nun beschränkt auf $\tilde{\Omega}_T = \bar{\Omega} \times [0, T)$ und es gelte $Wu \leq 0$ auf $\Omega_T = \Omega \times (0, T)$. Es genügt zu zeigen, dass

$$\sup_{(x,t) \in \Omega_T} u(x, t) \leq \sup_{(x,t) \in \partial^* \Omega_T} u(x, t),$$

wobei $\partial^* \Omega_T = (\Omega \times \{0\}) \cup (\partial\Omega \times [0, T))$. Dazu betrachten wir für gegebenes $\varepsilon > 0$ die Funktion

$$v_\varepsilon : \tilde{\Omega}_T \rightarrow \mathbb{R}, \quad v_\varepsilon(x, t) := u(x, t) - \varepsilon(|x|^2 + 2dt).$$

Da $(\partial_t - \Delta_x)(|x|^2 + 2dt) = 0$, gilt $Wv_\varepsilon \leq 0$ auf Ω_T . Nun sei $\Omega^R := \Omega \cap B(0, R)$, für ein noch zu wählendes $R > 0$, und wir betrachten v_ε auf $\Omega_T^R = \Omega^R \times (0, T)$. Da Ω^R beschränkt ist, dürfen wir den schon bewiesenen Teil (a) des Satzes anwenden und erhalten

$$\forall (x_0, t_0) \in \Omega^R \times [0, T) : \quad v_\varepsilon(x_0, t_0) \leq \sup_{(x,t) \in \partial^* \Omega_T^R} v_\varepsilon(x, t).$$

Wir wollen die rechte Seite nach oben abschätzen und betrachten dazu die beiden Teile des parabolischen Randes $\partial^* \Omega_T^R$. Zunächst erhalten wir

$$(x, t) \in \Omega^R \times \{0\} \quad \Rightarrow \quad v_\varepsilon(x, t) = v_\varepsilon(x, 0) = u(x, 0) - \varepsilon|x|^2 \leq \sup_{x' \in \Omega} u(x', 0) \leq \sup_{(x', t') \in \partial^* \Omega_T} u(x', t').$$

Ist andererseits $(x, t) \in \partial\Omega^R \times [0, T)$, so gilt entweder $x \in \partial\Omega$ oder $|x| = R$ (oder beides). Im ersten Fall folgt

$$(x, t) \in \partial\Omega \times [0, T) \quad \Rightarrow \quad v_\varepsilon(x, t) \leq u(x, t) \leq \sup_{(x', t') \in \partial\Omega \times [0, T)} u(x', t') \leq \sup_{(x', t') \in \partial^* \Omega_T} u(x', t').$$

Und im zweiten Fall erhalten wir (unter Verwendung der Voraus. $\|u\|_\infty := \sup_{(x,t) \in \bar{\Omega} \times [0, T)} |u(x, t)| < \infty$)

$$|x| = R, 0 \leq t < T \quad \Rightarrow \quad v_\varepsilon(x, t) \leq u(x, t) - \varepsilon R^2 \leq \|u\|_\infty - \varepsilon R^2.$$

Jetzt fixieren wir unser $R > 0$. Wir wählen es so groß, dass $R^2 \geq \varepsilon^{-1}(\|u\|_\infty - \sup_{(x', t') \in \partial^* \Omega_T} u(x', t'))$. Dann folgt also auch für $|x| = R$, dass $v_\varepsilon(x, t) \leq \sup_{(x', t') \in \partial^* \Omega_T} u(x', t')$. Insgesamt haben wir damit gezeigt, dass für jedes $\varepsilon > 0$ und hinreichend großes $R > 0$ gilt, dass

$$v_\varepsilon \leq \sup_{(x,t) \in \partial^* \Omega_T} u(x, t) \quad \text{auf} \quad \Omega^R \times [0, T).$$

Schicken wir also $R \rightarrow \infty$, so sehen wir, dass

$$v_\varepsilon \leq \sup_{(x,t) \in \partial^* \Omega_T} u(x,t) \quad \text{auf} \quad \Omega \times [0, T].$$

Da dies für alle $\varepsilon > 0$ gilt, folgt die behauptete Abschätzung.

8. Joseph Fourier, 1768-1830, franz. Mathematiker und Physiker.

9. In der Literatur finden Sie auch leicht abgewandelte Definitionen der Fourier-Transformation, etwa

$$(\mathcal{F}f)(\xi) := \hat{f}(\xi) := \int_{\mathbb{R}^d} e^{-2\pi i(x,\xi)} f(x) dx$$

oder

$$(\mathcal{F}f)(\xi) := \hat{f}(\xi) := \int_{\mathbb{R}^d} e^{-i(x,\xi)} f(x) dx.$$

Jede Wahl hat gewisse Vor- und Nachteile, auf die wir hier aber nicht näher eingehen werden.

10. Für die charakteristische Funktion $f(x) = \mathbb{1}_{[-\pi,\pi]}(x)$, $x \in \mathbb{R}$, gilt $\hat{f}(\xi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin(\xi\pi)}{\xi}$, $\xi \in \mathbb{R}$. Diese Funktion ist auf \mathbb{R} nicht integrierbar.

11. Laurent Schwartz, 1915-2002, franz. Mathematiker.

12. William Henry Young, 1863-1942, englischer Mathematiker.

13. Ist $1 < q < \infty$ und $\varphi \in L_1 \cap L_\infty$, so gilt

$$\int |\varphi|^q dx \leq \|\varphi\|_\infty^{q-1} \int |\varphi| dx = \|\varphi\|_\infty^{q-1} \|\varphi\|_1 < \infty,$$

d.h. $\varphi \in L_q$.

14. Sei $q \in (1, \infty)$ der zu $p \in (1, \infty)$ konjugierte Exponent. Dann rechnen wir unter Verwendung der Hölderschen Ungleichung zunächst für $x \in \mathbb{R}^d$

$$\begin{aligned} |(\varphi * f)(x)| &\leq \int_{\mathbb{R}^d} |\varphi(x-y)| |f(y)| dy = \int_{\mathbb{R}^d} |\varphi(x-y)|^{\frac{1}{q}} \cdot |\varphi(x-y)|^{\frac{1}{p}} |f(y)| dy \\ &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^d} |\varphi(x-y)| dy \right)^{1/q} \left(\int_{\mathbb{R}^d} |\varphi(x-y)| |f(y)|^p dy \right)^{1/p} \\ &= \|\varphi\|_1^{1/q} \left(\int_{\mathbb{R}^d} |\varphi(x-y)| |f(y)|^p dy \right)^{1/p} \end{aligned}$$

und damit mit dem Satz von Tonelli

$$\begin{aligned} \|\varphi * f\|_p^p &= \int_{\mathbb{R}^d} |(\varphi * f)(x)|^p dx \leq \|\varphi\|_1^{p/q} \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} |\varphi(x-y)| |f(y)|^p dy \right) dx \\ &= \|\varphi\|_1^{p/q} \int_{\mathbb{R}^d} |f(y)|^p \left(\int_{\mathbb{R}^d} |\varphi(x-y)| dx \right) dy = \|\varphi\|_1^{\frac{p}{q}+1} \int_{\mathbb{R}^d} |f(y)|^p dy = \|\varphi\|_1^p \|f\|_p^p. \end{aligned}$$

15. Paul Dirac, , 1902-1984, britischer Physiker.

16. Es ist zu zeigen, dass für eine Dirac-Familie $(\varphi_t)_{t>0}$ und $f \in L_p(\mathbb{R}^d)$, $1 \leq p < \infty$, gilt, dass $\varphi_t * f \rightarrow f$ in L_p . Wir betrachten zwei Fälle:

1. Fall: $f \in C_c(\mathbb{R}^d)$ und alle φ_t haben kompakten Träger mit $\text{supp}(\varphi_t) \subseteq B[0,1], t > 0$.

Ist nun x kein Element der kompakten Menge

$$K := B[0,1] + \text{supp}(f)$$

so gilt $f(x) = 0$ und

$$(\varphi_t * f)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \varphi_t(x-y)f(y) dy = \int_{\text{supp}(f)} \varphi_t(x-y)f(y) dy = 0.$$

Also erhalten wir

$$\|f - \varphi_t * f\|_p^p = \int_K |(f - \varphi_t * f)(x)|^p dx \leq \sup_{x \in K} |(f - \varphi_t * f)(x)|^p \cdot \lambda^d(K).$$

Aufgrund des schon bewiesenen Teil (i) des Satzes folgt also $\|f - \varphi_t * f\|_p \rightarrow 0$ für $k \rightarrow \infty$.

2. Fall: Im allgemeinen Fall ist $f \in L_p(\mathbb{R}^d)$ und (φ_t) eine Dirac-Familie ohne zusätzliche Eigenschaften. Wir versuchen, das Problem auf den 1. Fall zu reduzieren.

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Dann existiert $g \in C_c(\mathbb{R}^d)$ mit $\|f - g\|_p < \varepsilon$. Dies ist ein Standardresultat aus ihrer Maßtheorie-Vorlesung. Nun setzen wir

$$c_t := \int_{B(0,1)} \varphi_t(x) dx = \underbrace{\int_{\mathbb{R}^d} \varphi_t(x) dx}_{=1} - \underbrace{\int_{\mathbb{R}^d \setminus B(0,1)} \varphi_t(x) dx}_{\xrightarrow{t \rightarrow 0} 0}.$$

Dann folgt aufgrund der 2. und 3. Eigenschaft einer Dirac-Familie, dass $\lim_{t \rightarrow 0} c_t = 1$. Insbesondere existiert $t_0 > 0$ mit $c_t > 0$ für alle $0 < t < t_0$. Für jene t setzen wir

$$\psi_t := \frac{1}{c_t} \mathbb{1}_{B(0,1)} \varphi_t.$$

Dann gilt $\text{supp}(\psi_t) \subseteq B[0,1]$ und auch $(\psi_t)_{0 < t < t_0}$ ist eine Dirac-Familie. Die 1. und 2. Eigenschaft sind offensichtlich erfüllt und die 3. folgt aus der Abschätzung

$$0 \leq \int_{\mathbb{R}^d \setminus B(0,r)} \psi_t(x) dx \leq \frac{1}{c_t} \int_{\mathbb{R}^d \setminus B(0,r)} \varphi_t(x) dx,$$

da hier die rechte Seite für $t \rightarrow 0$ gegen 0 geht. Schließlich sehen wir auch noch, dass

$$\begin{aligned} \|\psi_t - \varphi_t\|_1 &= \int_{\mathbb{R}^d} |(c_t^{-1} \mathbb{1}_{B(0,1)}(x) - 1) \varphi_t(x)| dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^d \setminus B(0,1)} \varphi_t(x) dx + |c_t^{-1} - 1| \int_{B(0,1)} \varphi_t dx, \end{aligned}$$

d.h. $\lim_{t \rightarrow 0} \|\psi_t - \varphi_t\|_1 = 0$. Mit all diesen Vorüberlegungen sehen wir nun, dass unter Verwendung der Youngschen Ungleichung (und wegen $\|\varphi_t\|_1 = 1$) folgt, dass

$$\begin{aligned} \|f - \varphi_t * f\|_p &= \|(f - g) + (g - \psi_t * g) + (\psi_t - \varphi_t) * g + \varphi_t * (g - f)\|_p \\ &\leq \|f - g\|_p + \|g - \psi_t * g\|_p + \|(\psi_t - \varphi_t) * g\|_p + \|\varphi_t * (g - f)\|_p \\ &\leq \|f - g\|_p + \|g - \psi_t * g\|_p + \|\psi_t - \varphi_t\|_1 \|g\|_p + \|g - f\|_p \\ &\leq 2\varepsilon + \underbrace{\|g - \psi_t * g\|_p}_{\rightarrow 0 \text{ wegen 1. Fall}} + \underbrace{\|\psi_t - \varphi_t\|_1}_{\rightarrow 0} \|g\|_p. \end{aligned}$$

Also folgt $\overline{\lim}_{t \rightarrow 0} \|f - \varphi_t * f\|_p \leq \varepsilon$ für alle $\varepsilon > 0$, was die Behauptung impliziert.

17. Die Formel

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{i(x,\xi)} \hat{f}(\xi) d\xi$$

besagt, dass f eine „Überlagerung“ von „ebenen Wellen“ $\xi \mapsto e^{i(x,\xi)}$ ist. Man kann diese Darstellung als das kontinuierliche Analogon der Fourierentwicklung 2π -periodischer Funktionen $g : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$ verstehen (d.h. $g(\theta) \sim \sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{ik\theta} \hat{g}(k)$).

18. Michel Plancherel, 1885-1967, schweizer Mathematiker.

19. Es gilt $\widehat{K * f} = (2\pi)^{d/2} \widehat{K} \widehat{f} = \frac{1}{p} \widehat{f} = \widehat{u}$, also $u = K * f$, falls $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.

20. Es genügt, $(x, t) \in B(0, R) \times (\gamma, \infty)$, mit $R, \gamma > 0$ beliebig, zu betrachten.

Zunächst zeigt man leicht per Induktion, dass für jedes $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$ und $\beta \in \mathbb{N}_0$ ein Polynom $p = p_{\alpha, \beta} : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ existiert, so dass

$$\partial_x^\alpha \partial_t^\beta \Phi(x - y, t) = p\left(x - y, \frac{1}{\sqrt{t}}\right) \exp\left(-\frac{|x - y|^2}{4t}\right) = p\left(x - y, \frac{1}{\sqrt{t}}\right) \exp\left(-\frac{|x - y|^2}{8t}\right) \exp\left(-\frac{|x - y|^2}{8t}\right).$$

Da $t > \gamma > 0$ finden wir damit eine Konstante $C = C_{\alpha, \beta, \gamma}$, so dass für alle $x, y \in \mathbb{R}^d$

$$\left| \partial_x^\alpha \partial_t^\beta \Phi(x - y, t) \right| \leq C \exp\left(-\frac{|x - y|^2}{8t}\right).$$

Betrachten wir nun nur noch $x \in B(0, R)$, so folgt wegen

$$|x - y|^2 = |x|^2 - 2\langle x, y \rangle + |y|^2 \geq -2R|y| + |y|^2,$$

dass schließlich für alle $y \in \mathbb{R}^d$

$$\left| \partial_x^\alpha \partial_t^\beta \Phi(x - y, t) \cdot u_0(y) \right| \leq C \cdot \underbrace{\exp\left(-\frac{|y|^2 - 2R|y|}{8t}\right)}_{\in \mathcal{L}_q \text{ für alle } q \geq 1} \cdot \underbrace{|u_0(y)|}_{\in \mathcal{L}_p}.$$

Aber mit der Hölder-Ungleichung sehen wir sofort, dass die rechte Seite als Funktion von y integrierbar ist. Damit rechtfertigt sich die gewünschte Vertauschung von Differentiation und Integration also mit dem Satz über Parameterintegrale (siehe Satz A.2.1).

21. In der Realität breiten sich lokale Temperaturschwankungen natürlich nicht unendlich schnell aus. Am Ende beschreibt die Wärmeleitungsgleichung eben doch nur eine idealisierte Wirklichkeit. Die Ausbreitungsgeschwindigkeit von Störungen wird mit ihr nicht gut erfasst.

22. Wie im Falle der harmonischen Funktionen folgt die Glattheit von Lösungen von $Wu = 0$ auch daraus, dass solche Lösungen eine Mittelwerteigenschaft erfüllen (man siehe etwa [10] für Details hierzu).

23. Jean Marie Duhamel, 1797-1872, franz. Mathematiker und Physiker.

24. Man beachte, dass die Summe für beliebige Indexmengen I definiert ist, nämlich als

$$\sum_{k \in I} |\langle f, e_k \rangle|^2 := \sup_{F \subset I \text{ endl.}} \sum_{k \in F} |\langle f, e_k \rangle|^2.$$

25. Dies ist zu verstehen als

$$\inf_{F \subset I \text{ endlich}} \left\| f - \sum_{k \in F} \langle f, e_k \rangle e_k \right\| = 0.$$

26. Da die Funktionen $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx}, k \in \mathbb{Z}$, eine ONB von $L_2((-\pi, \pi); \mathbb{C})$ zeigt Übergang zu Real- und Imaginärteil, dass durch

$$f_0(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad f_k(x) := \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(kx), \quad g_k(x) := \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(kx), \quad k \in \mathbb{N}$$

eine ONB von $L_2^* := L_2(-\pi, \pi)$ gebildet wird. Ist nun $\varphi \in \mathcal{L}_2((0, \pi))$, so können wir die Funktion durch $\varphi(-x) := -\varphi(x), x \in (-\pi, 0)$, ungerade auf $(-\pi, \pi)$ fortsetzen und erhalten für die fortgesetzte Funktion die Fourier-Darstellung

$$\varphi = \sum_{k=0}^{\infty} \langle \varphi, f_k \rangle_{L_2^*} f_k + \sum_{k=1}^{\infty} \langle \varphi, g_k \rangle_{L_2^*} g_k = \sum_{k=1}^{\infty} \langle \varphi, g_k \rangle_{L_2^*} g_k,$$

wobei die Reihen im L_2^* -Sinne konvergieren. Für die letzte Gleichheit benutzen wir, dass $\langle \varphi, f_k \rangle_{L_2^*} = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$, da $\varphi \cdot f_k$ ungerade ist. Ferner ist

$$\langle \varphi, g_k \rangle_{L_2^*} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\pi \varphi(x) \sin(kx) dx = \sqrt{2} \langle \varphi, w_k \rangle_{L_2(0,\pi)}$$

und somit folgt (da $g_k = w_k / \sqrt{2}$ auf $(0, \pi)$)

$$\left\| \varphi - \sum_{k=1}^n \langle \varphi, w_k \rangle_{L_2(0,\pi)} w_k \right\|_{L_2(0,\pi)}^2 = \left\| \varphi - \sum_{k=1}^n \langle \varphi, g_k \rangle_{L_2^*} g_k \right\|_{L_2(0,\pi)}^2 = \frac{1}{2} \left\| \varphi - \sum_{k=1}^n \langle \varphi, g_k \rangle_{L_2^*} g_k \right\|_{L_2(-\pi,\pi)}^2.$$

Hier konvergiert die rechte Seite für $n \rightarrow \infty$ gegen 0.

Notizen zum Abschnitt "Die Wellengleichung"

1. Jean-Baptiste le Rond d'Alembert, 1717-1783, franz. Mathematiker, Physiker und Philosoph.
2. Da $u(x, 0) = u_0(x)$, $x \in \Omega$, und $u \in C^1(\Omega \times [0, T])$ gelten soll, muss sogar $u_0 \in C^1(\Omega)$ gelten.
3. Hier fordern wir mit $u \in C^2(\overline{\Omega} \times [0, T])$ wieder etwas mehr, als für eine klassische Lösung nötig wäre, damit wir Lemma 4.3 anwenden können. Man beachte, dass diese Forderung auch die Voraussetzung $u_0 \in C^2(\Omega)$, $v_0 \in C^1(\Omega)$ zur Folge hat.
4. Auch in diesem Fall müsste dann $u_0 \in C^2(\mathbb{R}^d)$, $v_0 \in C^1(\mathbb{R}^d)$ gelten.
5. Ist $u \in C^2(\mathbb{R}^d \times (0, \infty))$ eine Lösung von $\square u = 0$, so setzt man

$$U(t, r, x) := S_{u(\cdot, t)}(x, r) = \frac{1}{\sigma(\partial B(x, r))} \int_{\partial B(x, r)} u(y, t) dy$$

und zeigt, dass U die **Euler-Poisson-Darboux Differentialgleichung**

$$\partial_t^2 U = \partial_r^2 U + \frac{d-1}{r} \partial_r$$

löst (man vergleiche Lemma 1.9). Im Falle $d = 3$ liefert dann die Substitution $\tilde{U}(t, r, x) := rU(t, r, x)$ direkt, dass \tilde{U} die eindimensionale Wellengleichung

$$\partial_t^2 \tilde{U} = \partial_r^2 \tilde{U}$$

löst, d.h. mittels des d'Alembertschen Satzes kann eine Formel für \tilde{U} und somit U erhalten werden und damit auch für $u(x, t) = \lim_{r \rightarrow 0} U(t, r, x)$. In anderen Dimensionen wird ähnlich argumentiert, siehe z.B. [10].

6. Im L_2 -Sinne gilt

$$u_0 = \sum_{k=1}^{\infty} \langle u_0, w_k \rangle w_k \quad \text{und} \quad v_0 = \sum_{k=1}^{\infty} \langle v_0, w_k \rangle w_k.$$

Insbesondere (Parsevalsche Identität) sind die Folgen $(\langle u_0, w_k \rangle)_{k \in \mathbb{N}}$ und $(\langle v_0, w_k \rangle)_{k \in \mathbb{N}}$ in $l_2(\mathbb{N})$. Wie im Beweis von Proposition 3.40 folgt die Konvergenz von $u(x, t)$, sobald wir gezeigt haben, dass auch die Koeffizientenfolge $(\cos(\sqrt{\lambda_k} t) \langle u_0, w_k \rangle + \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} \sin(\sqrt{\lambda_k} t) \langle v_0, w_k \rangle)_{k \in \mathbb{N}}$ in $l_2(\mathbb{N})$ liegt. Aber dies folgt wegen $|\sin(x)/x| \leq 1$ aus der Abschätzung

$$\left| \cos(\sqrt{\lambda_k} t) \langle u_0, w_k \rangle + \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} \sin(\sqrt{\lambda_k} t) \langle v_0, w_k \rangle \right|^2 \leq (|\langle u_0, w_k \rangle| + t |\langle v_0, w_k \rangle|)^2 \leq 2 \left(|\langle u_0, w_k \rangle|^2 + t^2 |\langle v_0, w_k \rangle|^2 \right).$$

Analog wird die Konvergenz von $v(x, t)$ gezeigt: Hierbei verwenden wir die Voraussetzung $u_0 \in C_0^2(\overline{\Omega})$. Denn dann zeigt die 2. Greensche Formel, dass

$$\left| \sqrt{\lambda_k} \sin(\sqrt{\lambda_k} t) \langle u_0, w_k \rangle \right| \leq t |\lambda_k \langle u_0, w_k \rangle| = t |\langle u_0, \Delta w_k \rangle| \stackrel{2.GF}{=} t |\langle \Delta u_0, w_k \rangle|, \quad k \geq k_0.$$

Die noch zu zeigenden Konvergenzaussagen folgen nun wie im Beweis von Proposition 3.40 mit dominierter Konvergenz.

7. Wie im Beweis von Satz 3.42 zeigt partielle Integration, dass

$$b_k = -\frac{2}{\pi} \frac{1}{k^2} \int_0^\pi v_0''(x) \sin(kx) dx = -\frac{1}{k^2} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \langle v_0'', w_k \rangle,$$

d.h. aus der Cauchy-Schwarz und Besselschen Ungleichung folgern wir, dass

$$\sum_{k=1}^\infty k |b_k| = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k} |\langle v_0'', w_k \rangle| \leq \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^2} \right)^{1/2} \left(\sum_{k=1}^\infty |\langle v_0'', w_k \rangle|^2 \right)^{1/2} < \infty.$$

Analog zeigt man

$$\sum_{k=1}^\infty k^2 |a_k| < \infty.$$

Mit einer analogen Argumentation wie in Lemma 3.41 folgt hieraus die Behauptung.

Notizen zum Abschnitt "Klassifikation von partiellen Differentialgleichungen"

1. Aufgrund des Satzes von Schwarz (d.h. $\partial_{jk} = \partial_{kj}$) gilt

$$\sum_{j,k=1}^d a_{jk} \partial_{jk} u(x) = \sum_{j,k=1}^d \tilde{a}_{jk} \partial_{jk} u(x)$$

mit den symmetrischen Koeffizienten $\tilde{a}_{jk} := \frac{1}{2}(a_{jk} + a_{kj})$.

2. Mit anderen Worten: L ist elliptisch, falls A entweder nur positive Eigenwerte oder nur negative Eigenwerte besitzt. Entsprechend ist die Bedeutung beim hyperbolischen bzw. parabolischen Fall zu verstehen.

Notizen zum Abschnitt "Distributionen"

1. Mit unserer Vereinbarung 1.13 können wir $\mathcal{D}(\Omega)$ und $C_c^\infty(\Omega)$ identifizieren.

2. Für $f, g \in L_1^{loc}$ gilt $f = g$, wenn jeder Repräsentant der Äquivalenzklasse f mit jedem Repräsentanten der Äquivalenzklasse g λ^d -fast sicher übereinstimmt.

3. In Lemma 3.24 sind wir von einer beschränkten Dirac-Folge (φ_t) ausgegangen. Die Beschränktheit der φ_t wurde allerdings nur vorausgesetzt, damit die dortige Faltung überhaupt überall definiert war. Im vorliegenden Beispiel ist die Faltung $\varphi_t * \varphi$ für jedes $\varphi_t \in L_1(\mathbb{R}^d)$ definiert, da φ kompakten Träger besitzt.

4. Oliver Heaviside, 1850-1925, britischer Mathematiker und Physiker.

5. Für $f(x) = |x|, g(x) = \begin{cases} -1, & \text{falls } x \leq 0 \\ 1, & \text{falls } x > 0, \end{cases}$ und $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ gilt

$$\begin{aligned} \langle f', \varphi \rangle &= -\langle f, \varphi' \rangle = -\left(\int_{-\infty}^0 (-x) \varphi'(x) dx + \int_0^\infty x \varphi'(x) dx \right) \\ &= -\left(\underbrace{-x \varphi(x)}_{=0} \Big|_{x=-\infty}^0 + \int_{-\infty}^0 \varphi(x) dx + \underbrace{x \varphi(x)}_{=0} \Big|_{x=0}^\infty - \int_0^\infty \varphi(x) dx \right) \\ &= \int_{-\infty}^0 -\varphi(x) dx + \int_0^\infty \varphi(x) dx = \int_{\mathbb{R}} g(x) \varphi(x) dx = \langle g, \varphi \rangle. \end{aligned}$$

6. Wir werden später sehen, dass $\lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_k = -\infty$, d.h. $\sup_{k \in \mathbb{N}} \lambda_k < 0$ ist stets erfüllt.

7. Seien $K \subseteq \Omega$ und $[a, b] \subseteq (0, \infty)$ kompakt. Ferner sei $u(t) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{t\lambda_k} \langle u_0, w_k \rangle w_k \in L_2(\Omega)$ und $v(x, t) := u(t)(x)$. Dann folgt mit der Cauchy-Schwarz-Ungleichung und der Parsevalschen Identität, dass

$$\begin{aligned} \int_K |v(x, t)| \, dx &\leq \left(\int_K |v(x, t)|^2 \, dx \right)^{1/2} \left(\int_K 1 \, dx \right)^{1/2} \\ &= \lambda^d(K)^{1/2} \|u(t)\|_{L_2(\Omega)} = \lambda^d(K)^{1/2} \left(\sum_{k=1}^{\infty} e^{2t\lambda_k} |\langle u_0, w_k \rangle|^2 \right)^{1/2} \leq \lambda^d(K)^{1/2} e^{t\lambda_0} \|u_0\|_{L_2(\Omega)}, \end{aligned}$$

wobei nach Annahme $\lambda_0 := \sup_k \lambda_k < 0$. Dies zeigt, das

$$\int_{[a,b]} \left(\int_K |v(x, t)| \, dx \right) dt \leq \lambda^d(K)^{1/2} \|u_0\|_{L_2(\Omega)} \int_{[a,b]} e^{t\lambda_0} dt < \infty,$$

d.h. $v \in L_1^{loc}(\Omega \times (0, \infty))$.

8. Im Detail: Zunächst folgt aus der L_2 -Konvergenz der Reihe $u(t) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{t\lambda_k} \langle u_0, w_k \rangle w_k$, dass

$$\begin{aligned} \langle Wv, \varphi \rangle &:= \langle v, W^* \varphi \rangle = \int_0^\infty \left(\int_\Omega v(x, t) W^* \varphi(x, t) \, dx \right) dt = \int_0^\infty \langle u(t), W^* \varphi(\cdot, t) \rangle_{L_2(\Omega)} dt \\ &= \int_0^\infty \sum_{k=1}^{\infty} e^{t\lambda_k} \langle u_0, w_k \rangle_{L_2(\Omega)} \langle w_k, W^* \varphi(\cdot, t) \rangle_{L_2(\Omega)} dt \end{aligned}$$

Weiterhin gilt für alle $t \geq 0$ und $\psi := W^* \varphi \in \mathcal{D}(\Omega \times (0, \infty))$, dass

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=1}^{\infty} e^{t\lambda_k} \langle u_0, w_k \rangle_{L_2(\Omega)} \langle w_k, \psi(\cdot, t) \rangle_{L_2(\Omega)} \right| &\stackrel{\text{Cauchy-Schwarz}}{\leq} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |e^{t\lambda_k} \langle u_0, w_k \rangle_{L_2(\Omega)}|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\langle w_k, \psi(\cdot, t) \rangle_{L_2(\Omega)}|^2 \right)^{1/2} \\ &\leq e^{t\lambda_0} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\langle u_0, w_k \rangle_{L_2(\Omega)}|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\langle w_k, \psi(\cdot, t) \rangle_{L_2(\Omega)}|^2 \right)^{1/2} \\ &\stackrel{\text{Parseval}}{=} e^{t\lambda_0} \|u_0\|_{L_2(\Omega)} \|\psi(\cdot, t)\|_{L_2(\Omega)} \leq C(\Omega, \psi) e^{t\lambda_0} \|u_0\|. \end{aligned}$$

Da $\lambda_0 < 0$, zeigt dominierte Konvergenz, dass

$$\begin{aligned} \langle Wv, \varphi \rangle &= \int_0^\infty \sum_{k=1}^{\infty} e^{t\lambda_k} \langle u_0, w_k \rangle_{L_2(\Omega)} \langle w_k, W^* \varphi(\cdot, t) \rangle_{L_2(\Omega)} dt \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \langle u_0, w_k \rangle_{L_2(\Omega)} \int_0^\infty e^{t\lambda_k} \langle w_k, W^* \varphi(\cdot, t) \rangle_{L_2(\Omega)} dt = \sum_{k=1}^{\infty} \langle u_0, w_k \rangle_{L_2(\Omega)} \int_0^\infty \left(\int_\Omega e^{t\lambda_k} w_k(x) W^* \varphi(x, t) \, dx \right) dt. \end{aligned}$$

9. Bernard Malgrange, 1928-2024, franz. Mathematiker; Leon Ehrenpreis, 1930-2010, US-amerik. Mathematiker

10. Der Beweis des Satzes von Malgrange-Ehrenpreis verwendet Fourier-Methoden (formal gilt $P(\partial)F = \delta_0 \Leftrightarrow p(\xi)\hat{F}(\xi) = \hat{\delta}_0(\xi)$), d.h. zunächst müssten wir die Definition der Fourier-Transformation auf (sogenannte temperierte) Distributionen ausweiten. Dies würde im Rahmen dieser Vorlesung aber zu weit führen. Es sei auf die Spezialvorlesung „Distributionen“ verwiesen.

11. (i) Für $x \in \mathbb{R}^d$ folgt mit der Stetigkeit von $z \mapsto f_x(z) := f(x - z)$:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} |h(x - y)f(y)| \, dy &= \int_{\mathbb{R}^d} |f(x - z)h(z)| \, dz \\ &= \int_K |f(x - z)h(z)| \, dz \leq \max_{z \in K} |f_x(z)| \int_K |h(z)| \, dz < \infty, \end{aligned}$$

d.h. $h * f$ und $f * h$ sind auf \mathbb{R}^d definiert. Dass $h * f = f * h$ folgt per Substitution im Integral. Sind $x_0 \in \mathbb{R}^d, r > 0$ beliebig, so ist die Abbildung

$$B := B[x_0, r] \ni x \mapsto f(x - z)h(z)$$

für jedes $z \in K$ stetig und da $B - K = \{b - k : b \in B, k \in K\}$ kompakt ist, gilt auch

$$\forall z \in K : \sup_{x \in B} |h(z)f(x - z)| \leq \max_{t \in B - K} |f(t)| \cdot |h(z)|.$$

Da $h \in L_1(K)$, folgt die Stetigkeit von

$$B[x_0, r] \ni x \mapsto (h * f)(x) = (f * h)(x) = \int_K f(x - z)h(z) dz$$

nun mit dem Satz über Parameterintegrale (siehe Satz A.2.1). Ist schließlich $x \notin K + \text{supp}(f)$, so ist $f(x - z) = 0$ für alle $z \in K$, woraus die letzte Aussage folgt.

(ii) Folgt analog wie (i) aus dem Satz über Parameterintegrale und Induktion über $|a|$.

12. Auf diese Formel kann man mit einer formalen Rechnung kommen:

$$u = P(\partial)(u * F) = P(\partial)(u * F_r) + P(\partial)(u * G_r) = (P(\partial)u * F_r) + (u * P(\partial)G_r) = (f * F_r) + (u * P(\partial)G_r),$$

wobei wir in der ersten Gleichung formal Proposition 6.32 genutzt haben.

Notizen zum Abschnitt "Sobolev-Räume und elliptische Randwertprobleme"

1. Mit der Hölderschen Ungleichung gilt mit $q^{-1} + p^{-1} = 1$, dass

$$\forall K \subseteq \Omega \text{ kompakt: } \int_K |f| dx \leq \left(\int_K |f|^p \right)^{1/p} \left(\int_K 1 dx \right)^{1/q} = \|f\|_p \cdot (\lambda^d(K))^{1/q} < \infty.$$

2. Sergei Lwowitsch Sobolev, 1908-1989, sowjetischer Mathematiker.

3. Sei $\lambda^d(\Omega) < \infty, f \in L_p(\Omega)$ und $1 \leq q < p$, Dann liefert die Hölder-Ungleichung mit $\alpha := p/q > 1$ und $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$, dass

$$\int_{\Omega} |f|^q dx = \int_{\Omega} |f|^q \cdot 1 dx \leq \left(\int_{\Omega} |f|^{q \cdot \alpha} dx \right)^{1/\alpha} (\lambda^d(\Omega))^{1/\beta} = \left(\int_{\Omega} |f|^p dx \right)^{1/\alpha} (\lambda^d(\Omega))^{1/\beta} < \infty,$$

d.h. $f \in L_q(\Omega)$.

4. Henri Poincaré, 1854-1912, franz. Mathematiker.

5. Es gilt

$$\left| \|u\|_{1,2} - \|u_0\|_{1,2} \right| \leq \|u - u_0\|_{1,2} \quad \text{und} \quad \left| \|\partial_j u\|_2 - \|\partial_j u_0\|_2 \right| \leq \|\partial_j u - \partial_j u_0\|_2 \leq \|u - u_0\|_{1,2}.$$

6. Die Bilinearform \mathcal{E}_0 ist ein Beispiel einer sogenannten **Dirichlet-Form**. Zu diesen Objekten wird an der TU Chemnitz eine eigene Vorlesung angeboten (Dirichletformen, Markovprozesse und Halbgruppen).

7. Sei $(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H}})$ ein Hilbert-Raum. Dann gilt mit $\|f\|_{\mathcal{H}} := \sqrt{\langle f, f \rangle_{\mathcal{H}}}$ und der Cauchy-Schwarz-Ungleichung, dass

$$|\langle f - f_0, g \rangle_{\mathcal{H}}| \leq \|f - f_0\|_{\mathcal{H}} \|g\|_{\mathcal{H}} \xrightarrow{f \rightarrow f_0} 0.$$

8. Frigyes Riesz, 1880-1956, ungarischer Mathematiker.

Notizen zum Abschnitt "Eigenwertprobleme für den Laplace-Operator"

1. Franz Rellich, 1906-1955, deutscher Mathematiker. Vladimir Kondrashov, 1909-1971, sowjetischer Mathematiker.
2. Cesare Arzelà, 1847-1912, italienischer Mathematiker. Giulio Ascoli, 1843-1896, italienischer Mathematiker.
3. Andrei Nikolajewitsch Kolmogorov, 1903-1987, sowjetischer Mathematiker. Marcel Riesz, 1886-1969, ungarischer Mathematiker. Maurice René Fréchet, 1878-1973, franz. Mathematiker.
4. Dies ist eine Art von gleichgradiger Stetigkeit in L_p .

Symbolverzeichnis

- $\partial_t := \frac{\partial}{\partial t}$
- $\partial_i := \frac{\partial}{\partial x_i}, \partial_{ij} = \partial_i \partial_j, \partial_i^2 = \partial_{ii}$
- $\partial^\alpha := \partial_1^{\alpha_1} \dots \partial_d^{\alpha_d}$ für einen Multiindex $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{N}_0^d$. Hierbei ist $\partial_i^0 u := u$.
- $|\alpha| := \alpha_1 + \dots + \alpha_d$ - Ordnung des Multiindex $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$
- $\nabla u := \nabla_x u := (\partial_1 u, \dots, \partial_d u)^T$ - Gradient von $u : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$.
- $\operatorname{div} \varphi := \operatorname{div}_x \varphi := \sum_{i=1}^d \partial_i \varphi_i$ - Divergenz von $\varphi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$
- $\Delta := \Delta_x := \operatorname{div} \nabla := \partial_1^2 + \dots + \partial_d^2$ - Laplace-Operator
- $\nu(z)$ - äußere Normale an $z \in \partial\Omega$
- $\partial_\nu u(z) := \langle \nabla u(z), \nu(z) \rangle$ - Ableitung von u im Punkte z in Richtung der äußeren Normalen $\nu(z)$
- $\sigma = \sigma_B$ - Oberflächenmaß auf B
- $dx := d\lambda^d(x)$ - Integration gegen das Lebesgue-Maß
- $\langle \cdot, \cdot \rangle$ - Skalarprodukt. Sowohl für das euklidische Skalarprodukt in \mathbb{R}^d als auch für das Skalarprodukt in $L_2(\Omega)$ benutzt. Zur Unterscheidung zur Wirkung einer Distribution (siehe unten) auch manchmal als $\langle \cdot, \cdot \rangle_{L_2}$ oder ähnlich bezeichnet
- $\langle f, g \rangle_1 := \int \nabla f(x) \nabla g(x) dx$
- $|x| := |x|_2 := \left(\sum_{k=1}^d x_k^2 \right)^{1/2}$ - euklidische Norm von $x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$
- $|x|_p := \left(\sum_{k=1}^d x_k^p \right)^{1/p}$
- $B(x, r) := \{y \in \mathbb{R}^d : |x - y| < r\}$ - offene r -Kugel um $x \in \mathbb{R}^d$
- $B[x, r] := \{y \in \mathbb{R}^d : |x - y| \leq r\}$ - abgeschlossene r -Kugel um $x \in \mathbb{R}^d$
- $\omega_d := \lambda^d(B(0, 1))$ - Volumen der Einheitskugel im \mathbb{R}^d
- $\sigma(\partial B(0, 1))$ - Fläche der Einheitskugel im \mathbb{R}^d
- $l^\infty(\Omega)$ - beschränkte messbare Funktionen $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$
- $C(\Omega)$ - stetige Funktionen $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$
- $C_b(\Omega) = C(\Omega) \cap l^\infty(\Omega)$ - stetige beschränkte Funktionen $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$
- $C(\overline{\Omega})$ - stetig auf $\overline{\Omega}$ fortsetzbare Funktionen $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, Fortsetzung von u wird auch mit u bezeichnet
- $C^k(\Omega)$ - k -mal stetig differenzierbare Funktionen $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, d.h. $\partial^\alpha u$ existiert und ist stetig für alle $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$ mit $|\alpha| \leq k$
- $C^\infty(\Omega) := \bigcap_{k \in \mathbb{N}} C^k(\Omega)$ - glatte Funktionen $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$
- $C^k(\overline{\Omega}) - \forall \alpha \in \mathbb{N}_0^d$ mit $|\alpha| \leq k$ besitzt $\partial^\alpha u$ stetige Fortsetzung auf $\overline{\Omega}$

- $C_0^k(\overline{\Omega})$ - Funktionen $f \in C^k(\overline{\Omega})$ mit $f|_{\partial\Omega} = 0$.
- $C^k(\Omega; \mathbb{R}^d)$ - k -mal stetig differenzierbare Funktionen $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$
- $C^k(\Omega; \mathbb{C})$ - k -mal stetig differenzierbare Funktionen $u : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$
- $\text{supp}(\varphi) := \overline{\{x \in \Omega : \varphi(x) \neq 0\}}^\Omega$ - Träger von $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$
- $l_c^\infty(\Omega) := \{\varphi \in l^\infty(\Omega) \mid \text{supp}(\varphi) \subseteq \Omega \text{ kompakt}\}$
- $C_c(\Omega) := C_c^0(\Omega) := l_c^\infty(\Omega) \cap C(\Omega)$ - stetige Funktionen mit kompaktem Träger
- $C_c^k(\Omega) := C_c(\Omega) \cap C^k(\Omega)$. **Beachte unsere Vereinbarung:** $C_c^k(\Omega) \subseteq C_c^k(\mathbb{R}^d)$.
- $\mathcal{L}_1^{\text{loc}}(\Omega) := \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ messbar} \mid \int_K |f(x)| dx < \infty \text{ für alle } K \subseteq \Omega \text{ kompakt}\}$
- $L_1^{\text{loc}}(\Omega), 1 \leq p \leq \infty$ - Äquivalenzklassen von λ^d -fast sicher übereinstimmenden $f \in \mathcal{L}_1^{\text{loc}}(\Omega)$
- $\mathcal{L}_p(\Omega), 1 \leq p \leq \infty$ p -integrierbare Funktionen
- $L_p(\Omega), 1 \leq p \leq \infty$ - Äquivalenzklassen von λ^d -fast sicher übereinstimmenden $f \in \mathcal{L}_p(\Omega)$
- $\mathcal{D}(\Omega)$ - Raum der Testfunktionen auf Ω
- $\mathcal{D}'(\Omega)$ - Raum der Distributionen über Ω
- u_f - reguläre Distribution zur Funktion $f \in L_1^{\text{loc}}(\Omega)$
- $\Omega_R = \{x \in \Omega : B[x, R] \subseteq \Omega\} = \{x \in \Omega : d(x, \partial\Omega) > R\}$ für $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$
- $\varphi * f$ - Faltung
- E - Fundamentallösung der Laplace-Gleichung
- $V_f(x) = \int_\Omega E(x-y)f(y) dy$ - Newton-Potential von $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$
- $G = G_\Omega$ - Greensche Funktion zu Ω
- $W = \partial_t - \Delta_x$ - Wärmeleitungsoperator
- $\Omega_T := \Omega \times (0, T)$ - Zylinder in $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$
- $\mathcal{F}f, \hat{f}$ - Fourier-Transformation von f
- $\mathcal{F}^{-1}f = \mathcal{G}f = \check{f}$ - inverse Fourier-Transformation von f
- $\square := \partial_t^2 - \Delta_x$ - d'Alembert Operator
- $C(x_0, t_0) := \{(x, t) \in \mathbb{R}^{d+1} : 0 \leq t < t_0, x \in B(x_0, t_0 - t)\}$ - Abhängigkeitskegel
- $\langle u, \varphi \rangle$ - Wirkung der Distribution $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ auf der Testfunktionen $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$
- $H = \mathbf{1}_{(0, \infty)}$ - Heaviside-Funktion
- δ_0 - Delta-Distribution
- $P(\partial)$ - lin. Differentialoperator mit konstanten Koeffizienten zu $P \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_d]$
- $p(\xi) := P(i\xi), \xi \in \mathbb{R}^d$ - Symbol von $P(\partial)$
- $(P(\partial))^* := P^\#(\partial)$ - formal adjungierter Operator von $P(\partial)$ mit $P^\#(x) := P(-x), x \in \mathbb{R}^d$
- F - Fundamentallösung zu $P(\partial)$
- $L_{1,c}$ - kompakt getragene Elemente aus L_1
- $(W^{m,p}(\Omega), \|\cdot\|_{m,p})$ - Sobolev-Raum der Ableitungsordnung m und Integrationsordnung p
- $H^m(\Omega) = W^{m,2}(\Omega)$

-
- $\text{tr}(u)$ - Spur von $u \in W^{1,p}(\Omega)$
 - $W_0^{m,p}(\Omega) = \overline{\mathcal{D}(\Omega)}^{(W^{m,p}, \|\cdot\|_{m,p})}$
 - $H_0^m(\Omega) = W_0^{m,2}(\Omega)$
 - $\text{div}(A\nabla)$ - Operator in Divergenzform

Literaturverzeichnis

- [1] Wolfgang Arendt and Karsten Urban. *Partielle Differenzialgleichungen. Eine Einführung in analytische und numerische Methoden*. Berlin: Springer Spektrum, 2. auflage edition, 2018.
- [2] Haim Brezis. *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations*. Universitext. Springer, New York, 2011.
- [3] J. J. Duistermaat and J. A. C. Kolk. *Distributions. Cornerstones*. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 2010. Theory and applications, Translated from the Dutch by J. P. van Braam Houckgeest.
- [4] Lawrence C. Evans. *Partial differential equations*, volume 19 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, 1998.
- [5] Gerald B. Folland. *Introduction to partial differential equations*. Princeton University Press, Princeton, NJ, second edition, 1995.
- [6] Thomas Kalmes. *Analysis partieller Differentialgleichungen - Vorlesungsnotizen TU Chemnitz*.
- [7] Michael Renardy and Robert C. Rogers. *An introduction to partial differential equations*, volume 13 of *Texts in Applied Mathematics*. Springer-Verlag, New York, second edition, 2004.
- [8] Walter Rudin. *Analysis*. De Gruyter Stud. Berlin: De Gruyter/Oldenbourg, 5th edition edition, 2022.
- [9] Peter Stollmann. *Analysis partieller Differentialgleichungen - Vorlesungsnotizen TU Chemnitz*.
- [10] Gerald Teschl. *Partial Differential Equations - From classical to modern - Manuskript, Uni Wien*.
- [11] Gerald Teschl. *Topics in Real Analysis, Manuskript, Uni Wien*.
- [12] Jürgen Voigt. *Partielle Differentialgleichungen I- Vorlesungsnotizen TU Dresden*.
- [13] Joachim Weidmann. *Lineare Operatoren in Hilberträumen. Teil 1. Mathematische Leitfäden*. [Mathematical Textbooks]. B. G. Teubner, Stuttgart, 2000. Grundlagen. [Foundations].
- [14] Dirk Werner. *Funktionalanalysis*. Springer-Lehrb. Berlin: Springer Spektrum, 8th revised edition edition, 2018.