Skript zur Vorlesung

# Analysis für das Lehramt

Marcel Hansmann

**Stand vom 7. Februar 2025**

Dies ist die Überarbeitung eines Skripts zur gleichnamigen Vorlesung aus den Wintersemestern 16/17, 20/21 und 22/23. Der Text ist nur oberflächlich Korrektur gelesen und nur zum internen Gebrauch gedacht. Für Kommentare und Korrekturen bin ich dankbar.

# Inhaltsverzeichnis


**1. Auftakt** **1**
1.1. Einleitung . . . 1
1.2. Woher kommt unsere Mathematik? . . . 5
1.3. Zur Notwendigkeit von Axiomen in der Analysis . . . 9

**2. Grundlagen** **11**
2.1. Logik . . . 11
2.2. Mengenlehre . . . 17
2.3. Abbildungen . . . 23
2.4. Mächtigkeit von Mengen . . . 31
2.5. Etwas Kombinatorik . . . 35

**3. Die reellen Zahlen** **39**
3.1. Die Körper-Axiome . . . 40
3.2. Die Anordnungsaxiome . . . 44
3.3. Einschub: Die natürlichen Zahlen und vollständige Induktion . . . 47
3.4. Das Vollständigkeitsaxiom . . . 53

**4. Folgen** **60**
4.1. Der Abstandsbegriff auf $\mathbb{R}$ . . . 60
4.2. Folgen reeller Zahlen . . . 62
4.3. Zwei Konvergenzkriterien . . . 76
4.4. Teilfolgen und der Satz von Bolzano-Weierstraß . . . 81
4.5. Ein kurzer Blick auf Reihen . . . 83

**5. Reelle Funktionen** **96**
5.1. Stetigkeit . . . 96
5.2. Die Hauptsätze über stetige Funktionen . . . 103
5.3. Einschub: Die allgemeine Potenz . . . 110
5.4. Grenzwerte von Funktionen . . . 114
5.5. Differenzierbarkeit . . . 119
5.6. Ableitung und Funktionseigenschaften . . . 130

**Literaturverzeichnis** **138**

# 1. Auftakt

## 1.1. Einleitung

Der Studiengang Lehramt an Grundschulen mit *studiertem Fach Mathematik* besteht aus zwei Komponenten,

- einer **didaktischen Ausbildung**, in der Sie lernen, wie sie den Grundschullehrstoff an Ihre Schülerinnen und Schüler vermitteln können, und
- einer **fachlichen Ausbildung**.

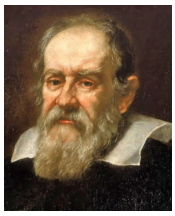
Im fachlichen Teil geht es nicht um den Grundschulstoff, den beherrschen Sie hoffentlich schon ☺, sondern um einen Einblick in verschiedene Gebiete der Wissenschaft Mathematik (**Analysis**, Algebra, Geometrie, Stochastik). Hierbei werden Ihnen zum einen die **Grundlagen der einzelnen Disziplinen** vermittelt, zum anderen geht es aber auch um einige weitergehende Ziele: So sollen Sie

- allgemeine **mathematische Denkweisen** und **Problemlösungsstrategien** kennenlernen, und
- die Mathematik als eine **historisch gewachsene**, aber immer noch sehr **lebendige Wissenschaft** erleben.

Idealerweise sollen Sie dies in Ihren späteren Unterricht einfließen lassen und damit Schülerinnen und Schülern abstraktes Denken, aber auch den Spaß an der Mathematik vermitteln.

### Wozu brauchen wir (höhere) Mathematik?

In unserem täglichen Leben kommen wir ständig mit Zahlen und elementarer Mathematik in Kontakt. Zum Beispiel beim Bezahlen von Rechnungen (Grundrechenarten), beim Vergleichen von Preisen (Dreisatz) oder bei der Geldanlage (Prozentrechnung). Aber brauchen wir darüber hinaus noch mehr Mathematik? Gibt es überhaupt noch mehr?



*Galileo Galilei. Bildquelle: Wikipedia*

Schauen wir uns dazu das folgende Zitat von **Galileo Galilei** (1564-1642) an: *„Das Buch der Natur ist in der Sprache der Mathematik geschrieben."* Dieses Zitat hat heute mehr denn je seine Richtigkeit, denn alle Naturwissenschaften (Physik, Biologie, Chemie) benutzen mathematische Modelle und Methoden, um die Welt um uns herum zu beschreiben und zu verstehen. Auch für andere Wissenschaften ist Mathematik fundamental, so etwa für die Informatik, die Sozialwissenschaften oder die Medizin. Betrachten wir ein paar Beispiele:

- Newtons[1] Gravitationsgesetze beschreiben die Bewegung der Planeten um die Sonne, aber auch die Bewegung einer Sonde auf dem Weg zum Mars. Für die modernen GPS-Systeme sind die Newtonschen Gesetze nicht mehr präzise genug, für ihre korrekte Funktion bedarf es der Einsteinschen[2] speziellen und allgemeinen Relativitätstheorien (ohne Betrachtung der Raumkrümmung Abweichungen bis zu 50m). Aus mathematischer Sicht wird man in beiden Fällen auf sogenannte **Differentialgleichungen** geführt, deren Behandlung ein Thema der Analysis ist.
- Die moderne Medizin wäre ohne Computertomographen (und ihre Verwandten) nur noch schwer vorstellbar. Mathematisch steckt dahinter die sogenannte Radontransformation, eine spezielle **Integraltransformation**. Auch dies führt in das Gebiet der Analysis.
- Moderne **Verschlüsselungsverfahren**, die etwa beim Online-Banking verwendet werden, beruhen auf der Tatsache, dass das Produkt $p = a \cdot b$ von zwei Primzahlen $a, b$ zwar sehr schnell berechnet werden kann, dass es umgekehrt aber sehr aufwendig ist, nur aus der Kenntnis von $p$ auf dessen Primfaktoren $a, b$ zu schließen. Dies führt in das Gebiet der Zahlentheorie.
- Die Google-Suche beruht auf dem sogenannten Page-Rank-Algorithmus. Dieser führt zu einem Eigenwert-Problem für **Matrizen**, welches mit Mitteln der linearen Algebra untersucht wird.
- Auch ChatGPT und andere „intelligente" Software beruht auf höherer Mathematik, etwa aus der linearen Algebra, der Statistik und auch aus der Analysis.

Die hier vorgestellten Beispiele benutzen zum Teil sehr aktuelle (und auch schwere) Mathematik. Um diese wird es in dieser Vorlesung nicht gehen. Trotzdem zeigen die Beispiele, wie wichtig auch fortgeschrittene Mathematik für unser Leben und unsere Gesellschaft ist. Die Grundlagen hierfür werden an den Schulen gelegt. **Guter Mathematikunterricht** ist daher **essentiell**.

[1] Isaac Newton (1643-1727).
[2] Albert Einstein (1879-1955).

## Warum ist die Mathematik so vielseitig?

Wie wir gesehen haben, findet die Mathematik in unterschiedlichsten Bereichen ihre Anwendung. Warum ist das so? Kurze Antwort: Die Mathematik ist abstrakt[3] und damit übertragbar.

- So spielen beispielsweise Differentialgleichungen eine Rolle in sehr vielen verschiedenen physikalischen Prozessen (die Planetenbewegung haben wir oben besprochen), aber zum Beispiel auch bei der Beschreibung des Aktienmarkts. Allgemeine Lösungsmethoden und Aussagen über mögliche Lösungen solcher Gleichungen können also in sehr vielen verschiedenen Kontexten eingesetzt werden.

Der hohe Abstraktionsgrad der Mathematik ist gleichzeitig auch der Grund, warum die Mathematik oft als schwer verständlich angesehen wird. Tatsächlich benötigt man einige Zeit, um die mathematische Sprache, so wie sie an der Universität gelehrt wird, zu verstehen und selbst sprechen zu können.

## Wie lernt man Mathematik?

Das Verstehen von **Mathematik ist ein aktiver Prozess**. Es geht nicht darum, Fakten zur Kenntnis zu nehmen.

- Um einen mathematischen Gedanken/Beweis zu verstehen, müssen Sie ihn selbst wiederentdecken.
- Gerade auch für die Mathematik gilt, dass erst die Übung den Meister macht.
- Für Sie heißt das: **Nacharbeit ist angesagt**. Für jede 90-minütige Vorlesung sollten Sie mindestens noch einmal die gleiche Zeit an Nacharbeit einplanen, und zwar zeitnah. Neue Definitionen und wesentliche Aussagen sollten bis zur nächsten Vorlesung im Kopf sein. Denn dann kommt schon wieder neuer Stoff. Bleiben Sie also am Besten die ganze Zeit am Ball und schieben Sie die Nacharbeit nicht auf.
- Obwohl nach jeder Vorlesung ein elektronisches Manuskript zur Vorlesung zur Verfügung gestellt wird, empfehle ich Ihnen dringend, eine **eigene Vorlesungsmitschrift** zu **erstellen**.
- **Mathematik ist Teamarbeit:** Wichtige neue mathematische Erkenntnisse wurden sehr oft in Kooperationen erzielt. Auch für Sie gilt, dass Sie neue Konzepte oft schneller begreifen werden, wenn Sie sie mit anderen diskutieren.

[3] „Abstraktion“ ist laut Wikipedia der Denkprozess des Weglassens von Einzelheiten und des Überführens auf etwas Allgemeineres oder Einfacheres.

## Worum geht es in Vorlesung und Übung?

- Die folgenden Themen sollen u.a. in der Vorlesung behandelt werden:
  - Grundlegendes (Logik, Mengenlehre, Abbildungen, ...)
  - Axiomatik der reellen Zahlen
  - Folgen und Grenzwerte
  - Reihen, Dezimaldarstellung
  - Stetige Funktionen
  - Differenzierbarkeit
- Es gibt jede Woche zwei Vorlesungen. Hier werden neue Konzepte und allgemeine Aussagen vorgestellt und erläutert.
- In der Vorlesung werden auch Beispiele präsentiert. Hauptsächlich ist hierfür aber die Präsenzübung zuständig. Es gibt jede Woche ein Übungsblatt, welches in der Präsenzübung besprochen wird. Weiterhin gibt es (in fast jeder Woche) auch ein Hausaufgabenblatt. Dieses muss von Ihnen bearbeitet und abgegeben werden und wird von uns korrigiert. Auch eine Musterlösung werden wir zur Verfügung stellen. **Wichtig: Das Bearbeiten der Hausaufgaben ist essentiell**. Durch das alleinige Besuchen der Vorlesung und der Präsenzübung werden Sie den Stoff nicht verstehen.
- Die Übungszettel und weitere Informationen zum Vorlesungs- und Übungsbetrieb finden Sie auf der Opal-Seite des Kurses.
- Zum Abschluss des Semesters findet eine 90-minütige Klausur statt. Sie müssen 40 Prozent der Hausaufgabenpunkte erreichen, um zur Klausur zugelassen zu werden.

> **Beachte.** Hier schon einmal ein kleiner Hinweis: In der Klausur sollen Sie zeigen, dass Sie die behandelten Konzepte der Vorlesung verstanden haben und anwenden können, und dass Sie in der Lage sind, Ihre Gedanken und Lösungen klar und verständlich zu Papier zu bringen. Die Aufgaben der Klausur werden so formuliert sein, dass sie ohne Taschenrechner oder sonstige elektronische Hilfe lösbar sind. Solche Hilfsmittel werden daher in der Klausur auch nicht zugelassen sein.
>
> Auch bei den Hausaufgaben benötigen Sie keine elektronischen Hilfsmittel. Da wir es sowieso nicht kontrollieren können, werden wir ihren Einsatz hier aber auch nicht verbieten. Denken Sie aber bitte immer daran, was der Zweck der Hausaufgaben ist: sie sollen Ihnen helfen, den Stoff zu verstehen

> und zu lernen, wie man Mathematik zu Papier bringt. Wenn Sie glauben, dass Ihnen Tools wie ChatGPT hierbei nützlich sein können, benutzen Sie sie. Aber bitte nur in Verbindung mit dem eigenen Nachdenken. Stumpfes Abschreiben von durch künstliche Intelligenz erzeugten Lösungen bringt ihnen gar nichts. Obendrein ist die Wahrscheinlichkeit, dass Ihnen ChatGPT, auf sehr glaubhafte Weise, Quatsch erzählt, dabei leider auch nicht ganz so gering.

## 1.2. Woher kommt unsere Mathematik?

Während bei den oben skizzierten Anwendungen meist sehr aktuelle Mathematik verwendet wird, ist die Mathematik, die Sie in der Schule gelernt haben, schon sehr, sehr alt (daher aber auch entsprechend gut verstanden und erprobt). Um ein wirkliches Verständnis für die Mathematik zu entwickeln, sollte man sich dessen langer Geschichte auch bewusst sein. Wir wollen daher im Folgenden zumindest auf einige Episoden aus der Geschichte der Mathematik eingehen, insbesondere auf solche, die für eine Analysis-Vorlesung am relevantesten sind.[4]

**-1200 bis -600** — In Ägypten und Babylon führen Probleme der Buchführung, Vermessung und Astronomie zur **Entwicklung von Zahlensystemen** und ersten Resultaten über die **Geometrie von Flächen** (Satz des „Pythagoras“). Dies jedoch noch ohne Beweise.

**-600 bis 100** — In Griechenland und seinen Kolonien wird zum ersten mal „reine“ Mathematik betrieben. **Euklid** veröffentlicht um das Jahr -300 seine Abhandlung „Die Elemente“. Diese enthält fundamentale Resultate der Geometrie und der Zahlentheorie (welche zum Teil auf andere Autoren zurückgehen) und diente noch bis ins 19. Jahrhundert als Standardlehrbuch. Auch die heutige Schulgeometrie ist schon in den Elementen enthalten.

*Ein Fragment aus den Elementen. Quelle: Wikipedia*

Die griechischen Mathematiker um Euklid sehen zum ersten Mal die Notwendigkeit, **mathematische Aussagen zu beweisen**. Euklid bedient sich dazu der **axiomatischen**

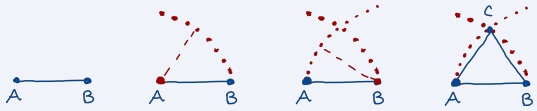
[4] Für eine kurze Übersicht über die Geschichte der Mathematik sei auf [6, Kapitel 4.1] verwiesen. Für eine ausführliche, aber sehr lesbare Darstellung siehe [9].

**Methode**, d.h. mathematische Aussagen werden durch logische Schlüsse aus einigen als unzweifelbar richtig angesehenen Postulaten/Axiomen hergeleitet. Euklids Axiome handeln von Punkten, Geraden, Strecken, usw. und schreiben vor, was man mit diesen anstellen kann.

**Beispiel.** Zwei der Euklidischen Axiome für die ebene Geometrie:

- Man kann je zwei Punkte durch eine Strecke verbinden.
- Zu jedem Mittelpunkt und Radius lässt sich ein entsprechender Kreis zeichnen.

Ausgehend von den Axiomen werden dann mathematische Sätze bewiesen (z.B. der Strahlensatz, der Satz des Pythagoras, ...). In den folgenden Skizzen sehen wir zum Beispiel eine Verbildlichung von Euklids Beweis, dass auf jeder Strecke ein gleichseitiges Dreieck konstruiert werden kann.




**Beachte.** Was ein Punkt, eine Gerade oder eine Strecke eigentlich sind, wird von Euklid zuvor **definiert**. Zum Beispiel ist eine Linie „eine breitenlose Länge". Diese Definitionen würden uns heute nicht mehr zufriedenstellen (denn der Begriff „Länge" bleibt z.B. undefiniert), aber wir kommen mit ihnen aufgrund unserer geometrischen Anschauung trotzdem zurecht. Tatsächlich ist auch gar nicht so wichtig, was diese Objekte eigentlich sind. Wichtig ist, was man mit ihnen anstellen kann und dies wird von Euklid durch seine Axiome klar festgelegt. Dies ist so ähnlich wie beim Schach: es ist nicht so wichtig, woraus die Figuren hergestellt sind, wichtig ist, welche Züge sie machen dürfen. Dieser Sicht werden wir uns später auch bei der axiomatischen Herangehensweise an die reellen Zahlen bedienen.

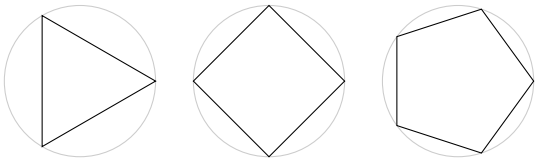
*Archimedes. Quelle: Wikipedia*

Ein weiterer wichtiger griechischer Mathematiker (und Gelehrter) war **Archimedes** (-287 bis -212). Schon die Griechen vor Archimedes wußten, dass das Verhältnis von

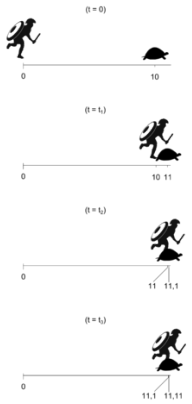
Umfang und Durchmesser eines Kreises für jeden Kreis das gleiche, also eine Konstante ist. Wir nennen diese Konstante die **Kreiszahl** $\pi$. Aber erst Archimedes konnte beweisen, dass für jeden Kreis auch die Formel

$$\pi = \frac{\text{Fläche}}{(\text{Radius})^2}$$

gilt, d.h. $F = \pi R^2$. Er bewies dies durch Approximation des Kreises durch reguläre Polygone. Hier taucht somit zum ersten Mal implizit der für die Analysis so wichtige Begriff eines **Grenzwertes** auf (der Grenzwert der Polygone ergibt den Kreis).



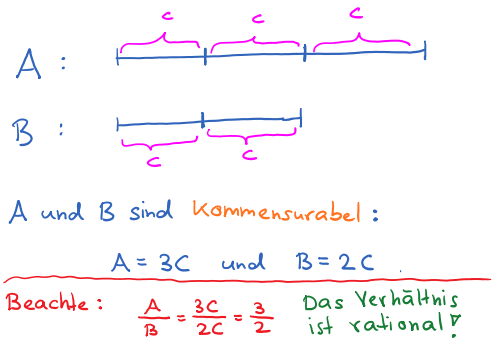
Mit dem für die Analysis ebenfalls wichtigen Begriff des **Unendlichen** hatten die Griechen allerdings noch ihre Probleme. Berühmt sind die **Zenonschen Paradoxa**[5], etwa das Paradoxon von Achilles und der Schildkröte: Diese machen einen Wettlauf. Achilles (A.) läuft 10 Meter pro Sekunde, die Schildkröte nur einen Meter pro Sekunde. Da A. ein fairer Sportler ist, erhält die Schildkröte einen Vorsprung von 10 Metern. Nun behauptet Zenon, dass A. die Schildkröte bei diesem Wettlauf nie überholen wird, denn er muss ja immer zuerst ihren Vorsprung einholen. Nach einer Sekunde ist A. bei 10 Metern, die Schildkröte aber bei 11. Eine zehntel Sekunde später ist auch A. bei 11 Metern, aber die Schildkröte ist nun schon bei 11.1 Metern. Nach weiteren 0.01 Sekunden hat A. auch die 11.1 Meter erreicht, die Schildkröte ist aber nun bei 11.11 Metern. Der Vorsprung der Schildkröte wird zwar immer kleiner, dennoch (so Zenon) bleibe immer ein Vorsprung, so dass A. sie nie einholen wird. Wie sehen Sie das?

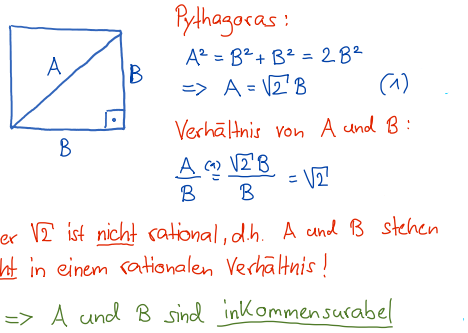



*Bildquelle: Wikipedia*

Zu einer Grundlagenkrise in der griechischen Mathematik kam es um das Jahr -500 durch die Entdeckung **inkommensurabler** Strecken durch **Hippasos von Metapont**. Man nennt zwei Strecken **kommensurabel**, wenn sie ein gemeinsames Maß besitzen, d.h. beide Strecken sind ganzzahliges Vielfaches einer kleineren Teilstrecke. Für die Griechen vor Hippasos war „klar", dass für alle Strecken ein solch gemeinsames Maß existieren sollte. Als Hippasos dann zeigte, dass dies für die Diagonale und Seite eines Quadrats nicht gilt, war der Jammer groß.

[5] Zenon von Elea, ca. -490 bis -430




Aus heutiger Sicht würden wir sagen, dass die Griechen zwar mit den rationalen Zahlen vertraut waren, mit irrationalen Größen (wie z.B. $\sqrt{2}$) jedoch nicht umgehen konnten. Dies führte insbesondere dazu, dass die Griechen die Geometrie und die Arithmetik als streng getrennte Disziplinen betrachteten. Diese wurden erst Jahrtausende später durch **Pierre de Fermat** (1601-1655) und **René Descartes** (1596-1650) mit der Entwicklung der **analytischen Geometrie** wieder zusammengeführt.

*Fermat (links) und Descartes. Quelle: Wikipedia*

Die griechische Mathematik hat durch arabische Mathematiker (die auch unter indischem Einfluss standen) schließlich erst sehr spät den Weg zurück nach Europa gefunden (mit ihnen haben auch die **arabischen Zahlen** und die (indische) **Null** Europa erreicht). Eine eigenständige europäische Mathematik startet erst wieder mit der Renaissance.

**16. Jahrhundert** — **Isaac Newton** (1643-1727) und **Gottfried Wilhelm Leibniz** (1646-1716) entwickeln unabhängig voneinander die Differential- und Integralrechnung und verleihen der Mathematik, aber auch der Physik, einen neuen Schub. Die Mathematik Newtons und Leibniz' beruht nach wie vor auf einem intuitiven Zahlenbegriff und genügt nicht der heutigen mathematischen Strenge.

Erst gegen Ende des 19. Jahrhunderts haben Mathematiker wie **Georg Cantor** (1845-1918) und **David Hilbert** (1862-1943) die Arithmetik, wie Euklid 2000 Jahre zuvor die

*Newton (links) und Leibniz. Quelle: Wikipedia*

Geometrie, auf eine solide axiomatische Basis gestellt, so dass alle mathematischen Sätze heute auf wenige Grundregeln (Axiome) zurückgeführt werden können.

*Hilbert (links) und Cantor. Quelle: Wikipedia*

Auch in dieser Vorlesung werden wir eine axiomatische Einführung der reellen Zahlen an den Anfang stellen. —Ende VL 1—

## 1.3. Zur Notwendigkeit von Axiomen in der Analysis

Axiome sind Spielregeln, die die einzige legitime Grundlage für mathematische Schlüsse bilden, aber auch die einzige Einschränkung darstellen. Dass solche Spielregeln in der Analysis (insbesondere auch beim Umgang mit dem Unendlichen) sehr wichtig sind, zeigen vielleicht die folgenden Beispiele.

**Beispiel 1.3.1.** Wir berechnen die unendliche Summe

$$S = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$$

auf drei verschiedene Weisen. Zuerst

$$S = \underbrace{1-1}_{=0} + \underbrace{1-1}_{=0} + \underbrace{1-1}_{=0} + \dots = 0.$$

Andererseits kann man auch argumentieren:

$$S = 1 \underbrace{-1+1}_{=0} \underbrace{-1+1}_{=0} \underbrace{-1+1}_{=0} \ldots = 1.$$

Zuletzt kann man auch rechnen:

$$S = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots = 1 - (1 - 1 + 1 - 1 + \ldots) = 1 - S,$$

also $S = 1/2$. Was ist nun richtig?

**Beispiel 1.3.2.** Auch beim Umgang mit Dezimalzahlen sind Spielregeln wichtig. Ist etwa

$$0,\overline{9} = 0,99999\ldots < 1\,?$$

Falls ja, warum?

**Beispiel 1.3.3.** Oder betrachten Sie die Zahl $\sqrt{2}$. Diese zeichnet sich dadurch aus, dass ihr Quadrat gleich zwei ist,

$$(\sqrt{2})^2 = 2.$$

Aber gibt es eine solche Zahl? Zum Beispiel ist,

$$(1.41)^2 = 1.9881, \quad (1.414)^2 = 1.999396, \quad \ldots,$$

aber $\sqrt{2}$ ist ja irrational, hat also keine endliche Dezimalbruchentwicklung. Existiert eine solche Zahl also überhaupt?

Eine axiomatische Beschreibung der reellen Zahlen wird uns helfen, die obigen Fragen zu beantworten. Um die Axiome überhaupt formulieren zu können, müssen wir uns allerdings zunächst mit ein paar grundlegenden Begriffen aus der Aussagenlogik und der Mengenlehre beschäftigen. Damit beginnen wir im nächsten Kapitel.

# 2. Grundlagen

Da die Logik die Basis für zuverlässiges Argumentieren bildet, wollen wir uns in diesem Kapitel zunächst mit den wichtigsten logischen Konstrukten beschäftigen. Anschließend kümmern wir uns um Grundbegriffe aus der Mengenlehre und werfen insbesondere einen Blick auf Abbildungen zwischen Mengen. Zum Schluss gehen wir dann noch der Frage nach, wie man die Größe unendlicher Mengen vergleichen kann, und wir erinnern an ein paar Begriffe aus der Kombinatorik.

## 2.1. Logik

Wir betrachten im Folgenden ein Teilgebiet der mathematischen Logik, die sogenannte **Aussagenlogik**. Unter einer **Aussage** verstehen wir einen Ausdruck, von dem es sinnvoll ist zu fragen, ob er wahr oder falsch ist.

**Beispiel 2.1.1.** (i) Einige Beispiele für Aussagen:

$$\text{„}2 > 1\text{“}, \quad \text{„}2 < 1\text{“}, \quad \text{„Die Zahl } \pi + e \text{ ist rational“}.$$

Die erste Aussage ist wahr, die zweite Aussage ist falsch und für die dritte Aussage ist gegenwärtig noch nicht bekannt, ob sie wahr oder falsch ist.

(ii) Keine Aussagen in diesem Sinne sind etwa „$5 + 4$“ oder „Mathe macht Spaß“.

In der Aussagenlogik geht es darum, den Wahrheitswert von Aussagen zu bestimmen, die durch Negation oder Kombination von Aussagen mit bekanntem Wahrheitswert entstehen. Ist zum Beispiel eine Aussage $A$ wahr, so ist ihre **Negation** (Verneinung)

$$\neg A \quad (\text{gesprochen „nicht } A\text{“})$$

falsch. Ist umgekehrt $A$ falsch, so ist $\neg A$ wahr. Diese Zusammenhänge stellt man oft in sogenannten **Wahrheitstafeln** dar. Hier steht „w“ für wahr und „f“ für falsch.

| $A$ | $\neg A$ |
|---|---|
| w | f |
| f | w |

**Beispiel 2.1.2.** Für $A =$ „$2 > 1$“ ist $\neg A =$ „$2 \leq 1$“. In diesem speziellen Fall ist $A$ wahr und $\neg A$ falsch.

**Quiz:** Was ist die Negation der Aussage „Alle Blumen sind rot“?

Sind $A, B$ Aussagen, so können wir diese durch das logische „und“ bzw. das logische „oder“ zu neuen Aussagen verknüpfen: wir schreiben dies als

$$A \wedge B \quad (\textbf{„A und B“, Konjunktion})$$

und

$$A \vee B \quad (\textbf{„A oder B“, Disjunktion}).$$

Die zugehörigen Wahrheitstafeln sehen wie folgt aus:

| $A$ | $B$ | $A \wedge B$ |
|---|---|---|
| w | w | w |
| w | f | f |
| f | w | f |
| f | f | f |

(a) *Wahrheitstafel Konjunktion*

| $A$ | $B$ | $A \vee B$ |
|---|---|---|
| w | w | w |
| w | f | w |
| f | w | w |
| f | f | f |

(b) *Wahrheitstafel Disjunktion*

**Vorsicht.** Während man in der Umgangssprache das „oder“ oft als ein „entweder-oder“ benutzt („Möchtest Du Kaffee oder Tee?“), ist das logische „oder“ **einschließend**, d.h. $(A \vee B)$ ist auch wahr, wenn sowohl $A$ als auch $B$ wahr sind.

**Beispiel 2.1.3.** Ist etwa $x$ eine reelle Zahl, so ist die Disjunktion

$$(x > 0) \vee (x < 0)$$

nur im Falle $x = 0$ falsch. Die Konjunktion

$$(x > 0) \wedge (x < 0)$$

ist dagegen für jedes $x$ eine falsche Aussage.

Schauen wir uns nun mal einen einfachen mathematischen Satz an.

**Satz 2.1.4.** Seien $x$ und $y$ reelle Zahlen. Wenn $x$ und $y$ negativ sind, so ist ihr Produkt $x \cdot y$ positiv.

In diesem Satz steckt eine weitere wichtige logische Verknüpfung, nämlich eine sogenannte **Implikation** (Wenn-Dann-Beziehung). Hierfür benutzen wir als Symbol den

Folgepfeil „$\Rightarrow$“. Damit können wir den Satz nun also auch wie folgt aufschreiben.

**Satz 2.1.4** (2. Fassung). Seien $x$ und $y$ reelle Zahlen. Dann gilt:[a]

$$((x < 0) \wedge (y < 0)) \quad \Rightarrow \quad x \cdot y > 0.$$

[a] „Dann gilt“ bedeutet, dass die nachfolgende Aussage, in diesem Fall also die Implikation, stets eine wahre Aussage ist.

Wir legen fest, dass die Implikation $A \Rightarrow B$ für beliebige Aussagen $A$ und $B$ nur dann den Wahrheitswert „falsch“ erhält, wenn $A$ wahr und $B$ falsch ist. Entsprechend sieht die Wahrheitstafel folgendermaßen aus.

| $A$ | $B$ | $A \Rightarrow B$ |
|---|---|---|
| w | w | w |
| w | f | f |
| f | w | w |
| f | f | w |

**Ist die Implikation wahr**, so sagen wir

- „$A$ impliziert $B$“, oder
- „Aus $A$ folgt $B$“, oder
- „Wenn $A$ gilt, dann gilt auch $B$“.

Weiterhin heißt in diesem Fall $A$ **hinreichend** für $B$ und $B$ **notwendig** für $A$.

**Vorsicht.** Auf den ersten Blick scheint es merkwürdig, dass die Implikation als wahr definiert ist, wenn $A$ falsch ist. Zerbrechen Sie sich hierüber bitte nicht lange den Kopf, denn in gewisser Weise handelt es sich einfach um eine willkürliche Festlegung. Ein Versuch es doch zu begründen, ginge so: Wir haben den Satz 2.1.4 als wahr identifiziert. Aber das bedeutet, dass die dortige Implikation für jede Wahl von $x$ und $y$ wahr sein muss. Für $x = y = 1$ bzw. $x = 1, y = -1$ ergibt sich aber gerade die Situation aus Zeile 3 bzw. 4 der Wahrheitstabelle.

Für die Aussage $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$ schreiben wir kurz

$$A \Leftrightarrow B$$

und sprechen von einer **Äquivalenz**. Diese ist genau dann wahr, wenn $A$ und $B$ beide den gleichen Wahrheitswert haben, wie die folgende Tabelle zeigt.

| $A$ | $B$ | $A \Leftrightarrow B$ | $A \Rightarrow B$ | $B \Rightarrow A$ | $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| w | w | w | w | w | w |
| w | f | f | f | w | f |
| f | w | f | w | f | f |
| f | f | w | w | w | w |

**Ist die Aussage $A \Leftrightarrow B$ wahr**, so sagen wir

- „$A$ ist äquivalent zu $B$“, oder
- „$A$ gilt genau dann, wenn $B$ gilt“, oder
- „$A$ ist notwendig und hinreichend für $B$“ (und umgekehrt).

**Beispiel 2.1.5.** (i) Für alle reellen Zahlen $x, y$ gilt: $x \geq y \Leftrightarrow ((x > y) \vee (x = y))$.

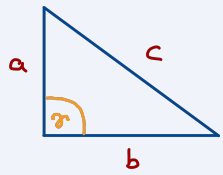
(ii) Für alle reellen Zahlen $x$ gilt: $x \geq 0 \Leftrightarrow -x \leq 0$.

**Quiz:** Gilt für alle reellen Zahlen $x, y$ die Äquivalenz

$$((x < 0) \wedge (y < 0)) \quad \Leftrightarrow \quad x \cdot y > 0\,?$$

(iii) Mathematische Sätze sagen manchmal aus, dass eine gewisse Äquivalenz gilt, d.h. stets wahr ist. Zum Beispiel behauptet der (vollständige) Satz von Pythagoras, dass in einem Dreieck mit den Seiten $a, b, c$ und dem $c$ gegenüberliegenden Winkel $\gamma$ die folgende Äquivalenz gilt:

$$\gamma = 90^\circ \quad \Leftrightarrow \quad a^2 + b^2 = c^2.$$




**Beachte.** Wie gesehen, benutzen wir Klammern, um die Auswertungsreihenfolge von logischen Ausdrücken festzulegen. Um Klammern zu sparen, vereinbaren wir folgende Bindungsstärke der (sogenannten) **Junktoren** (von stark nach schwach):

$$\neg, \wedge, \vee, \Leftrightarrow .$$

Damit können wir also etwa kurz $\neg A \vee B$ statt $(\neg A) \vee B$ schreiben.

Der folgende Satz zeigt uns ein paar Beispiele von äquivalenten Aussagen.

**Satz 2.1.6.** Seien $A, B$ Aussagen. Dann sind die folgenden Aussagen, unabhängig vom Wahrheitswert von $A, B$, immer wahr (man nennt solche Aussagen **Tautologien**):

(i) $A \vee \neg A$.

(ii) $\neg(\neg A) \quad \Leftrightarrow \quad A$.

(iii) $\neg(A \wedge B) \quad \Leftrightarrow \quad \neg A \vee \neg B$

(iv) $\neg(A \vee B) \quad \Leftrightarrow \quad \neg A \wedge \neg B$

(v) $(A \Rightarrow B) \quad \Leftrightarrow \quad (\neg B \Rightarrow \neg A)$ (**Kontraposition, Umkehrschluss**).

**Beweis.** Man beweist den Satz durch Betrachtung der zugehörigen Wahrheitstafeln. Wir schauen uns exemplarisch Teil (iii) an:

| $A$ | $B$ | $A \wedge B$ | $\neg(A \wedge B)$ | $\neg A$ | $\neg B$ | $(\neg A) \vee (\neg B)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| w | w | w | **f** | f | f | **f** |
| w | f | f | **w** | f | w | **w** |
| f | w | f | **w** | w | f | **w** |
| f | f | f | **w** | w | w | **w** |

Da die Wahrheitswerte in den fett gedruckten Spalten übereinstimmen, sind die entsprechenden Aussagen logisch äquivalent. □ —Ende VL 2—

**Beispiel 2.1.7.** (i) Die Negation der Aussage

$$(x > 0) \vee (x < -1)$$

ist die Aussage

$$(x \leq 0) \wedge (x \geq -1).$$

(ii) Die Aussage "Wenn es geregnet hat, ist die Straße nass" ist äquivalent zur Aussage "Wenn die Straße nicht nass ist, hat es nicht geregnet".

**Vorsicht.** Nicht äquivalent zur Aussage in (ii) ist die Aussage „Wenn es nicht geregnet hat, ist die Straße nicht nass". Ganz allgemein folgt aus der Gültigkeit von $A \Rightarrow B$ nicht die Gültigkeit von $\neg A \Rightarrow \neg B$ (und natürlich auch nicht die von $B \Rightarrow A$).

Wir führen nun noch drei wichtige Symbole ein, die uns die Schreibarbeit in Zukunft weiter erleichtern werden. Um die Bedeutung dieser sogenannten **Quantoren** zu

erklären sei $M$ eine Menge und $A(x)$ eine Aussage für $x \in M$ (wie z.B. "$x > 0$").

| Formel | Bedeutung |
|---|---|
| $\forall\, x \in M:\ A(x)$ | **Für alle** Elemente $x \in M$ gilt $A(x)$. |
| $\exists\, x \in M:\ A(x)$ | **Es existiert** (mindestens) ein $x \in M$, für das $A(x)$ gilt. |
| $\exists!\, x \in M:\ A(x)$ | **Es existiert genau ein** $x \in M$, für das $A(x)$ gilt. |

Man nennt den Quantor $\forall$ auch den **Allquantor** und den Quantor $\exists$ den **Existenzquantor**. In mathematischen Aussagen werden diese Quantoren oft verknüpft, also hintereinander ausgeführt. Schauen wir uns dazu einige Beispiele an. Hierbei stehe $\mathbb{R}$ für die Menge der reellen Zahlen.

**Beispiel 2.1.8.** (i) „Zu jeder reellen Zahl existiert eine noch größere reelle Zahl." Diese Aussage kann man unter Verwendung der Quantoren etwa so aufschreiben:

$$\forall x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R}: \quad y > x. \qquad (A1)$$

Ist die Aussage wahr? Ja, denn für $x \in \mathbb{R}$ ist z.B. $y := x + 1 > x$ oder $y := x + 2 > x$. Beachten Sie, dass nicht behauptet wird, dass genau eine größere Zahl $y$ existiert. Dies wäre die Aussage

$$\forall x \in \mathbb{R}\ \exists!\, y \in \mathbb{R}: \quad y > x. \qquad (A2)$$

Offensichtlich ist die Aussage (A2) nun falsch.

(ii) Was passiert, wenn wir die Reihenfolge der Quantoren in (A1) vertauschen?

$$\exists y \in \mathbb{R}\ \forall x \in \mathbb{R}: \quad y > x. \qquad (A3)$$

Diese (nun falsche) Aussage hat eine ganz andere Bedeutung als (A1). Sie besagt jetzt, dass eine reelle Zahl $y$ existiert, die größer als alle anderen reellen Zahlen ist.

**Vorsicht.** Beim Vertauschen von „$\exists$" und „$\forall$" ändert sich die Bedeutung der entsprechenden Aussagen.

Wir müssen noch die Negation von Aussagen mit Quantoren betrachten. Im folgenden Beispiel stehe $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ für die Menge der natürlichen Zahlen.

**Beispiel 2.1.9.** Betrachten wir zunächst die Aussage

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n \in \mathbb{N}: \quad \frac{1}{n} < \varepsilon. \qquad (B1)$$

Diese wahre Aussage besagt, dass jeder positive Wert $\varepsilon$ von (mindestens) einem der Kehrwerte $1/n$ unterschritten wird, wenn $n$ die natürlichen Zahlen durchläuft.

Was ist die Negation dieser Aussage? Doch, dass (mindestens) ein positiver Wert $\varepsilon$ existiert, der von keinem der Kehrwerte $1/n$ unterschritten wird. Die Negation von (B1) ist also

$$\exists \varepsilon > 0 \; \forall n \in \mathbb{N} : \quad \frac{1}{n} \geq \varepsilon. \qquad (B2).$$

**Vorsicht.** Bei der Negation wird „$\forall$“ zu „$\exists$“ und umgekehrt, und die Aussage nach dem Doppelpunkt wird negiert.

## 2.2. Mengenlehre

Mengen stellen heutzutage einen der Grundbausteine der Mathematik dar und wir sind ihnen im letzten Abschnitt ja auch schon begegnet. Was genau eine Menge allgemein ist, wollen wir dabei gar nicht weiter definieren, sondern uns im Wesentlichen auf unsere Anschauung verlassen.[1] Wichtig ist

- eine Menge enthält Objekte, nämlich ihre **Elemente**, und
- zwei Mengen sind genau dann gleich, wenn sie die gleichen Elemente besitzen.

Es hat sich eingebürgert, Mengen mit Großbuchstaben zu bezeichnen. Ist $M$ eine Menge, so schreiben wir

$$\begin{aligned} x \in M, &\quad \text{falls } x \text{ Element von } M \text{ ist, und} \\ x \notin M, &\quad \text{falls } x \text{ kein Element von } M \text{ ist.} \end{aligned}$$

**Beispiel 2.2.1.** Die Menge der natürlichen Zahlen bezeichnen wir mit $\mathbb{N}$, d.h.

$$\mathbb{N} \quad := \{1, 2, 3, 4, \ldots\}.^a$$

Es gilt z.B. $1 \in \mathbb{N}$ und $0 \notin \mathbb{N}$.

[a] Das Symbol „:=“ bedeutet, dass wir die linke Seite (in diesem Fall also das Symbol $\mathbb{N}$) durch die rechte Seite definieren.

[1] Der Begründer der Mengenlehre, Georg Cantor, hat eine Menge etwas schwammig definiert als „eine Zusammenfassung $M$ von bestimmten, wohlunterschiedenen Objekten $m$ unserer Anschauung oder unseres Denkens (welche die Elemente von $M$ genannt werden) zu einem Ganzen.“ Das müssen Sie sich aber nicht merken.

Hier haben wir schon die aus der Schule bekannte Mengenschreibweise mit den Mengenklammern „{“ und „}“ verwendet. Die Elemente der Menge stehen innerhalb der Klammern und werden durch Kommata getrennt. **Die Menge wird also beschrieben, indem wir ihre Elemente explizit auflisten**. Beachten Sie, dass wir die „Pünktchen“ nur verwenden können, wenn klar ist, wie die Elemente der Menge aussehen.

**Beispiel 2.2.2.** (i) Ein weiteres Beispiel einer Menge ist

$$M = \{a, b, c, d\},$$

die Menge der ersten vier Buchstaben des Alphabets. Hier gilt $a \in M$, aber $e \notin M$. Ferner darf man Elemente mehrfach aufführen (auch wenn das nicht üblich ist) und die Reihenfolge vertauschen, d.h. z.B.

$$M = \{a, b, c, d\} = \{a, a, b, c, d\} = \{d, a, c, b\}.$$

In der Tat, alle diese Mengen haben die gleichen Elemente und stimmen daher überein.

(ii) Die Elemente von Mengen können beliebige Objekte sein. Zum Beispiel ist auch

$$M = \{\{1, 2\}, \{3, 4, 5\}\}$$

eine Menge. Diese hat die Elemente $\{1, 2\}$ und $\{3, 4, 5\}$, die selbst wieder Mengen sind. In diesem Fall ist **keine** der Zahlen $1, 2, 3, 4, 5$ ein Element von $M$!

Es ist nützlich, auch eine Menge ohne Elemente zu haben, die **leere Menge**. Schreibweise:

$$\{\} \quad \text{oder} \quad \emptyset.$$

Wenn Sie sich Mengen als einen mit Dingen gefüllten Beutel vorstellen, ist die leere Menge einfach ein leerer Beutel.

**Vorsicht.** $\emptyset \neq \{0\}$

Schauen wir uns weitere Beispiele an.

**Beispiel 2.2.3.** Schon aus der Schule bekannt sind:

- $\mathbb{N}_0 := \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$.
- $\mathbb{Z} := \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$, die Menge der ganzen Zahlen.
- $\mathbb{Q} := \{\frac{m}{n} \mid m \in \mathbb{Z} \text{ und } n \in \mathbb{N}\}$, die Menge der rationalen Zahlen.
- $\mathbb{R}$, die Menge der reellen Zahlen.

Bei der Definition von $\mathbb{Q}$ sehen wir ein weiteres wichtiges **Konstruktionsprinzip für Mengen**: Ist $x$ ein Objekt und $E(x)$ eine Eigenschaft, die $x$ entweder hat oder nicht hat, so ist $\{x \mid E(x)\}$ die Menge aller Objekte $x$ mit der Eigenschaft $E(x)$. Mengen können also über die Eigenschaften ihrer Elemente definiert werden.

**Beispiel 2.2.4.** (i) Ist $T$ die Menge aller Studierender an der TUC, so ist

$$\{x \mid x \in T \text{ und } x \text{ ist weiblich }\}$$

die Menge der weiblichen Studierenden an der TUC. Alternative Schreibweise:

$$\{x \in T \mid x \text{ ist weiblich }\}.$$

(ii) Für $a, b \in \mathbb{R}$ setzt man

$$\begin{aligned} [a,b] &:= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\} \\ (a,b] &:= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\} \\ [a,b) &:= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\} \\ (a,b) &:= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}. \end{aligned}$$

Dies sind die sogenannten **beschränkten Intervalle**. Weiterhin gibt es die **unbeschränkten Intervalle**

$$\begin{aligned} (a,\infty) &:= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\} \\ [a,\infty) &:= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\}, \quad \text{usw.} \end{aligned}$$

**Vorsicht:** Es kann $[a,b] = \emptyset$ gelten (dies ist genau dann der Fall, wenn $b < a$)! Weiterhin ist „$\infty$“ hier nur ein Symbol, aber keine reelle Zahl. —Ende VL 3—

Eine Menge $A$ heißt **Teilmenge** einer Menge $B$ (bzw. B **Obermenge** von $A$), falls

$$\forall x \in A: \quad x \in B,$$

d.h. jedes Element von $A$ ist auch ein Element von $B$. Schreibweise:

$$A \subseteq B \quad \text{oder} \quad B \supseteq A.$$

**Beispiel 2.2.5.** (i) Für jede Menge $A$ gilt $\emptyset \subseteq A$ und $A \subseteq A$.

(ii) Es ist

$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{N}_0 \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}.$$

(iii) Für zwei Mengen $A, B$ gilt:

$$A = B \Leftrightarrow ((A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A)).$$

Diese Äquivalenz nutzt man oft in Beweisen von Mengengleichheit.

**Vorsicht.** „Teilmenge sein“ und „Element sein“ sind zwei verschiedene Dinge:

$$1 \in \mathbb{N}, \text{ aber } 1 \not\subseteq \mathbb{N},$$

$$\{1\} \notin \mathbb{N}, \text{ aber } \{1\} \subseteq \mathbb{N}.$$

**Quiz:** Kann ein Objekt gleichzeitig Teilmenge und Element einer Menge sein?

### Mengenoperationen

Aus gegebenen Mengen können wir neue gewinnen. Ein Beispiel ist die **Potenzmenge** einer Menge $A$, welche die Menge aller Teilmengen von $A$ ist:

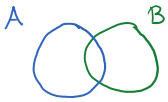
$$\mathcal{P}(A) := \{B \mid B \subseteq A\}.$$

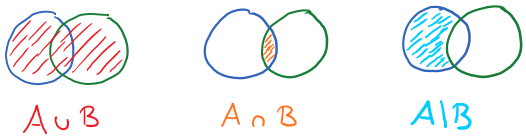
**Beispiel 2.2.6.** Es gilt etwa

- $\mathcal{P}(\{1\}) = \{\emptyset, \{1\}\}$,
- $\mathcal{P}(\{1,2\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$.
- $\mathcal{P}(\{1,2,3\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{2,3\}, \{1,3\}, \{1,2,3\}\}$.

**Quiz:** Was ist $\mathcal{P}(\{2, \{2\}, \{1,2\}\})$? Kann für eine Menge $A$ auch $\mathcal{P}(A) = \emptyset$ gelten? Was ist $\mathcal{P}(\emptyset)$? Warum hat $\mathcal{P}(A)$ immer mehr Elemente als $A$?

Sind $A$ und $B$ Mengen, so kann man mittels Vereinigungs-, Schnitt- und Differenzbildung eine neue Menge konstruieren.



Diese Bildchen, die sogenannten **Venn-Diagramme**[2], machen die Bedeutung dieser Mengenoperationen sofort klar. Trotzdem müssen wir noch eine formale Definition anschließen:

- $A \cup B := \{x \mid (x \in A) \vee (x \in B)\}$ heißt die **Vereinigung** von $A$ und $B$. Hierbei ist wichtig zu erinnern, dass das logische Oder, d.h. $\vee$, immer nicht ausschließend ist, d.h. hier darf $x$ auch gleichzeitig Element von $A$ und von $B$ sein.
- $A \cap B := \{x \mid (x \in A) \ \wedge \ (x \in B)\}$ ist der **Durchschnitt** von $A$ und $B$,
- $A \setminus B := \{x \mid (x \in A) \ \wedge \ (x \notin B)\}$ heißt das **Komplement** von $B$ in $A$ oder die **Differenz** von $A$ und $B$ (gesprochen wird es oft einfach: „$A$ ohne $B$").

Natürlich kann es passieren, dass zwei Mengen $A$ und $B$ sich nicht schneiden.

- Gilt $A \cap B = \emptyset$, so sagt man, dass die Mengen **disjunkt** sind.

**Beispiel 2.2.7.** (i) $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ und $\mathbb{N} = \mathbb{N}_0 \setminus \{0\}$.

(ii) $\{1,2,3\} \cup \{3,4,5\} = \{1,2,3,4,5\}$.

(iii) $\{1,2,3\} \cap \{3,4,5\} = \{3\}$, $\{1,2,3\} \setminus \{3,4,5\} = \{1,2\}$.

(iv) $\{1,2\} \setminus \{3,4\} = \{1,2\}$. Die Mengen $\{1,2\}$ und $\{3,4\}$ sind disjunkt.

(v) Auch auf Intervalle können wir die Mengenoperationen anwenden, z.B:

$$[1,3] \cap [2,4] = [2,3], \quad [1,3] \cup [2,4] = [1,4], \quad [1,3] \setminus [2,4] = [1,2).$$

**Quiz:** Ist es möglich, dass bei der Vereinigung/dem Schnitt/dem Komplement zweier nicht-leerer Mengen die leere Menge herauskommt?

Wir können die Mengenoperationen auch verbinden. Wie bei Zahlen und Aussagen verwenden wir Klammern, um die Reihenfolge der Ausführung festzulegen.

**Proposition 2.2.8.** [a] Seien $A, B, C$ Mengen. Dann gelten die folgenden Aussagen:

(i) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

(ii) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

(iii) $C \setminus (A \cup B) = (C \setminus A) \cap (C \setminus B)$

(iv) $C \setminus (A \cap B) = (C \setminus A) \cup (C \setminus B)$

[a] In der Mathematik werden die wichtigen Aussagen **Sätze** genannt und die nicht ganz so wichtigen **Propositionen**.

[2] John Venn (1834-1923)

(i) und (ii) sind **Distributivregeln** und (iii) und (iv) nennt man die **de Morganschen Regeln**[3] (das Komplement einer Vereinigung ist gleich dem Schnitt der Komplemente usw.). Mittels Venn-Diagrammen kann man sich sofort überzeugen, dass die Aussagen plausibel sind ... aber ein Beweis ist dies noch nicht!

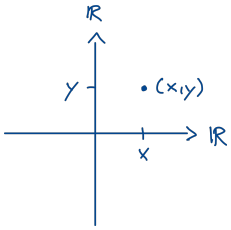
**Beweis** (von Proposition 2.2.8). Wir beweisen hier exemplarisch Teil (iii). Dazu zeigen wir, dass die Mengen $C \setminus (A \cup B)$ und $(C \setminus A) \cap (C \setminus B)$ die gleichen Elemente haben. Denn es gilt

$$\begin{aligned} x \in C \setminus (A \cup B) &\Leftrightarrow (x \in C) \wedge (x \notin (A \cup B)) \\ &\Leftrightarrow (x \in C) \wedge (x \notin A) \wedge (x \notin B) \\ &\Leftrightarrow ((x \in C) \wedge (x \notin A)) \wedge ((x \in C) \wedge (x \notin B)) \\ &\Leftrightarrow (x \in C \setminus A) \wedge (x \in C \setminus B) \\ &\Leftrightarrow x \in (C \setminus A) \cap (C \setminus B). \end{aligned}$$

□

Die letzte Mengenoperation, die wir uns anschauen wollen, ist die Produktbildung. Dies kennen sie schon aus der Schule: Die Zahlenebene lässt sich darstellen als

$$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}.$$




Sind allgemeiner $A$ und $B$ nicht-leere Mengen und $a \in A, b \in B$, so nennen wir einen Ausdruck der Form $(a, b)$ ein **geordnetes Paar**. Die erste **Komponente** (oder Koordinate) dieses Paares ist $a$, die zweite $b$. Die Menge aller solcher geordneter Paare nennen wir das **kartesische Produkt**[4] oder kurz **Produkt** von $A$ und $B$. Schreibweise:

$$A \times B := \{(a, b) \mid a \in A \text{ und } b \in B\}.$$

**Vorsicht.** (i) Für reelle Zahlen $a, b$ darf das Paar $(a, b)$ nicht mit dem Intervall $(a, b)$ verwechselt werden, obwohl wir die gleiche Schreibweise benutzen! Aus dem Kontext sollte stets klar sein, worum es sich handelt.

(ii) Im Gegensatz zu zweielementigen *Mengen* kommt es bei Paaren auf die Reihen-

[3] Augustus de Morgan (1806-1871)
[4] nach René Descartes (1596-1650).

folge an! Es ist zwar $\{1,2\} = \{2,1\}$, aber $(1,2) \neq (2,1)$. Genauer gilt

$$(a,b) = (c,d) \quad \Leftrightarrow \quad a = c \text{ und } b = d.$$

—Ende VL 4—

## 2.3. Abbildungen

Wir kommen zu einem weiteren zentralen Begriff dieser Vorlesung. Dazu seien zwei nicht-leere Mengen $A, B$ gegeben. Eine **Abbildung** (oder **Funktion**) $f$ von $A$ nach $B$ ordnet jedem Element $a \in A$ **genau ein** Element $f(a) \in B$ zu. Man nennt

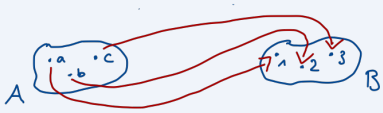
- $f(a)$ den **Wert** von $f$ an der Stelle $a$ bzw. für das **Argument** $a$ (oder das **Bild** von $a$ unter $f$).
- $a$ ein **Urbild** von $f(a)$ unter $f$.
- $A$ den **Definitionsbereich** von $f$.
- $B$ den **Zielbereich** von $f$.

Man schreibt in diesem Fall $f : A \to B, a \mapsto f(a)$.

**Vorsicht.** Wir nutzen den Pfeil $\to$ zwischen Definitions- und Zielbereich, und den Pfeil $\mapsto$ für die Abbildungsvorschrift.

**Beispiel 2.3.1.** Abbildungen $f : A \to B$ zwischen endlichen Mengen $A, B$ kann man mittels Pfeildiagrammen beschreiben.

(i) $f(a) = 1,\ f(b) = 2,\ f(c) = 3$




(ii) $f(a) = f(b) = f(c) = 1$

(iii) KEINE Abbildung!

c hat zwei Bilder

**Beachte.** (i) Zur Beschreibung einer Abbildung gehören **drei Dinge**: Definitionsbereich $A$, Zielbereich $B$ und Abbildungsvorschrift $a \mapsto f(a)$.

(ii) Gilt $B = \mathbb{R}$, so sprechen wir in der Regel von der „Funktion $f$" statt von der „Abbildung $f$", obwohl beide Sprechweisen erlaubt sind.

(iii) Während $f$ an der Stelle $a$ genau einen Wert hat (nämlich $f(a)$), kann $f(a)$ verschiedene Urbilder haben, wie das zweite Pfeildiagramm von oben zeigt.

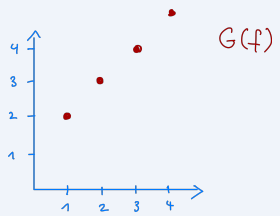
Weiterhin nennt man für eine Abbildung $f : A \to B$

- die Menge
$$f(A) := \{f(a) \mid a \in A\}$$
den **Wertebereich** (oder das **Bild**) von $f$. Man schreibt auch $W(f)$ statt $f(A)$. Es gilt stets $f(A) \subseteq B$, aber nicht notwendig $f(A) = B$!
- die Menge
$$G(f) := \{(a, f(a)) \mid a \in A\} \subseteq A \times B$$
den **Graphen** von $f$.

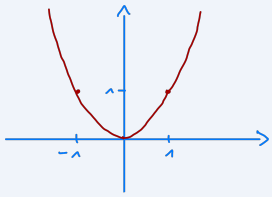
**Beispiel 2.3.2.** (i) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, n \mapsto n + 1$ (Nachfolgerabbildung). Oft verwendet man auch folgende **alternative Schreibweise**:

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \quad f(n) := n + 1.$$

Hier gilt für den Wertebereich $f(\mathbb{N}) = \{2, 3, 4, \ldots\}$.



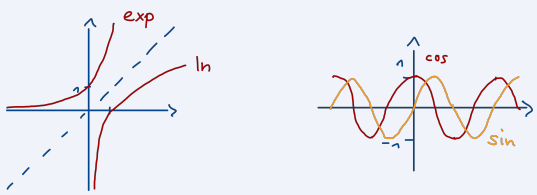

(ii) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2$ bzw. in alternativer Schreibweise $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) := x^2$. Hier ist $f(\mathbb{R}) = [0, \infty)$.



**Beachte:** In der Wahl des Zielbereiches hat man etwas freie Hand, es muss lediglich darauf geachtet werden, dass der Zielbereich eine Obermenge des Wertebereiches ist. Man hätte die obige Funktion also auch als $f : \mathbb{R} \to [0, \infty), x \mapsto x^2$ einführen können, <u>nicht</u> jedoch als $f : \mathbb{R} \to [1, \infty), x \mapsto x^2$.

(iii) Aus der Schule kennen Sie einige Funktionen, z.B.

$$\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \ln : (0, \infty) \to \mathbb{R}, \quad \sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \ldots$$




**Quiz:** Wissen Sie noch, wie diese Funktionen definiert waren?

(iv) Eine Abbildung muss nicht durch einen einzelnen Ausdruck definiert werden.

$$f : [0, 1] \to \mathbb{R}, \quad f(x) := \begin{cases} 2x, & \text{falls } x \leq 1/2 \\ 2 - 2x, & \text{falls } x > 1/2 \end{cases}$$

ist ebenfalls eine Abbildung/Funktion. **Quiz:** Wie sieht der Graph dieser Funktion aus?

(v) Zu beliebigen nicht-leeren Mengen $A, B$ existiert stets eine Abbildung $f$ von $A$ nach $B$! Ist etwa $b_0 \in B$, so ist die **konstante Abbildung** $f : A \to B, a \mapsto b_0$ ein Beispiel.

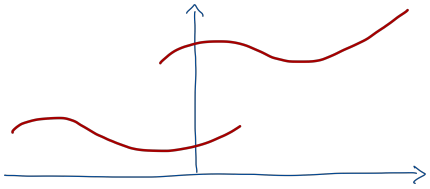
(vi) Auch Addition und Multiplikation sind Abbildungen, die ein Paar $(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ auf $a + b \in \mathbb{R}$ bzw. $a \cdot b \in \mathbb{R}$ abbilden, nämlich

$$\text{Add.} : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad (a, b) \mapsto a + b \quad \text{und} \quad \text{Mult.} : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad (a, b) \mapsto a \cdot b.$$

Oft benutzt man hier (leicht doppeldeutig) einfach $+$ und $\cdot$ als Namen für die Abbildung, d.h.

$$+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad (a, b) \mapsto a + b \quad \text{und} \quad \cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad (a, b) \mapsto a \cdot b.$$

**Vorsicht.** Nachfolgend sehen wir **keinen** Graphen einer Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Warum?



### Injektivität, Surjektivität und Bijektivität

Zu einer Abbildung $f : A \to B$ können wir die Gleichung

$$f(a) = b$$

aufstellen. Hier ist $b \in B$ gegeben und $a \in A$ gesucht, das die Gleichung löst. In diesem Zusammenhang führen wir nun drei neue Begriffe ein.

(i) $f$ heißt **surjektiv**, falls für jedes $b \in B$ **mindestens** ein $a \in A$ mit $f(a) = b$ existiert.

In diesem Fall gilt also: Jeder Punkt im Zielbereich wird (mindestens einmal) angenommen, d.h. $f(A) = B$.

(ii) $f$ heißt **injektiv**, falls für jedes $b \in B$ **höchstens** ein $a \in A$ mit $f(a) = b$ existiert.

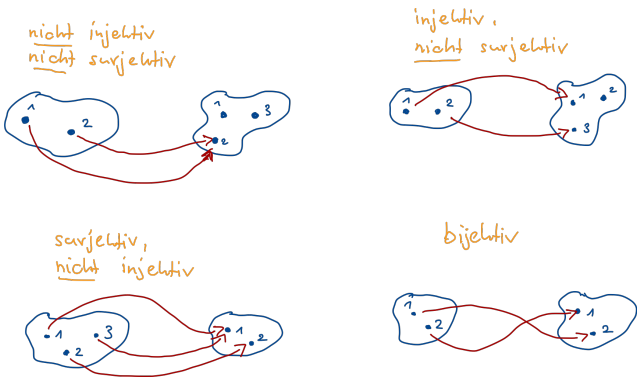
In diesem Fall gilt also: Kein Wert wird zweimal angenommen.

(iii) $f$ heißt **bijektiv**, falls sie injektiv und surjektiv ist, d.h. für jedes $b \in B$ existiert **genau** ein $a \in A$ mit $f(a) = b$.

In diesem Fall gilt also: Jeder Punkt im Zielbereich wird genau einmal angenommen.

—Ende VL 5—

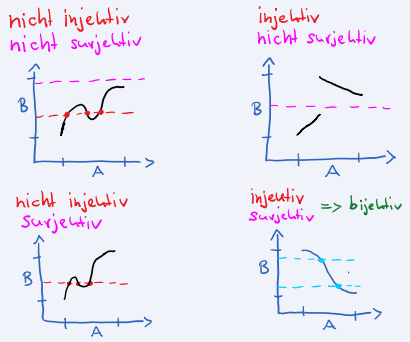
**Vorsicht.** Injektivität und Surjektivität sind unabhängige Konzepte. Jede der folgenden Kombinationen kann für Funktionen eintreten: weder injektiv noch surjektiv, injektiv aber nicht surjektiv, surjektiv aber nicht injektiv, injektiv und surjektiv.



**Beachte.** Die Injektivität/Surjektivität/Bijektivität lässt sich sehr elegant mit Hilfe der Quantoren beschreiben. Es ist $f : A \to B$

- surjektiv, falls
$$\forall b \in B \; \exists a \in A : \quad f(a) = b.$$
- injektiv, falls
$$\forall a, a' \in A : \quad f(a) = f(a') \quad \Rightarrow \quad a = a'$$
bzw. (mittels Umkehrschluss)
$$\forall a, a' \in A : \quad a \neq a' \quad \Rightarrow \quad f(a) \neq f(a').$$
- bijektiv, falls
$$\forall b \in B \; \exists! a \in A : \quad f(a) = b.$$

**Beispiel 2.3.3.** (i) Am Graphen einer Funktion $f : A \to B$ kann man Injektivität usw. meist leicht ablesen.

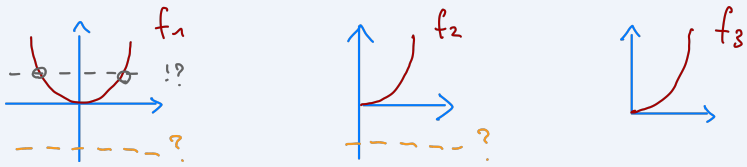



(ii) Ist $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ **streng monoton wachsend**, d.h.
$$\forall a, a' \in A : \quad a < a' \quad \Rightarrow \quad f(a) < f(a')$$
oder **streng monoton fallend**, d.h.
$$\forall a, a' \in A : \quad a < a' \quad \Rightarrow \quad f(a) > f(a'),$$
so ist $f$ injektiv. Können Sie das beweisen?

(iii) Durch Einschränkung von Definitions- bzw. Zielbereich können wir die Eigen-

schaften einer Abbildung ändern:

$$\begin{aligned} f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2 &\quad \text{ist weder injektiv, noch surjektiv,} \\ f_2 : [0,\infty) \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2 &\quad \text{ist injektiv, aber nicht surjektiv} \\ f_3 : [0,\infty) \to [0,\infty), x \mapsto x^2 &\quad \text{ist bijektiv.} \end{aligned}$$




**Vorsicht.** Die Surjektivität der Abbildung $f_3$ ist gar nicht so trivial, wie es scheint. Dies bedeutet, dass zu jedem $y \geq 0$ ein $x \geq 0$ existiert, so dass $x^2 = y$. Dies beinhaltet etwa auch die Existenz einer Zahl $x \geq 0$ mit $x^2 = 2$, d.h. die Existenz von $\sqrt{2}$.

Um die Existenz von $\sqrt{2}$, und allgemeiner die Surjektivität von $f_3$, wirklich zu beweisen, werden wir später noch ordentlich arbeiten müssen.

**Quiz:** Welche Eigenschaften haben die Funktionen

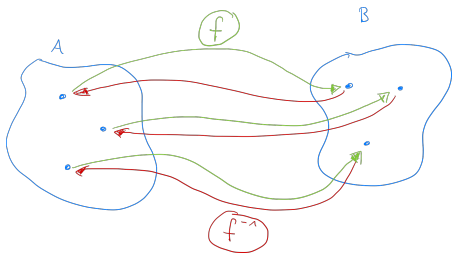
$$\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \ln : (0,\infty) \to \mathbb{R}, \quad \sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ ?$$

Kann man sie stets zu bijektiven Funktionen einschränken (falls nicht schon der Fall)?

### Die Umkehrabbildung

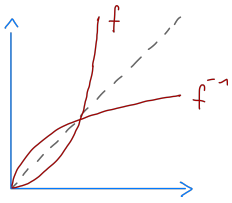
Ist $f : A \to B$ **bijektiv**, so existiert zu jedem $b \in B$ genau ein $a \in A$, für das $f(a) = b$ gilt. Ordnen wir diesem $b$ nun genau jenes $a$ zu, erhalten wir also eine neue Abbildung mit Definitionsbereich $B$ und Zielbereich $A$. Diese Abbildung wird die **Umkehrabbildung** (bzw. **Inverse**) von $f$ genannt und mit $f^{-1} : B \to A$ bezeichnet. Es gilt dann also für $b \in B$, dass

$$f^{-1}(b) = a \quad \Leftrightarrow \quad f(a) = b.$$



**Quiz:** Warum existiert die Umkehrabbildung $f^{-1} : B \to A$ nicht, wenn $f$ nicht injektiv bzw. nicht surjektiv ist?

Direkt aus der Definition ergibt sich, dass der Graph der Umkehrabbildung durch „Spiegelung" des Graphen von $f$ entsteht, d.h. $G(f^{-1}) = \{(f(a), a) \mid a \in A\}$.




**Beispiel 2.3.4.** Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) := \frac{x+1}{2}$. Für $x, y \in \mathbb{R}$ rechnen wir

$$f(x) = y \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x+1}{2} = y \quad \Leftrightarrow \quad x = 2y - 1.$$

Die Gleichung $f(x) = y$ hat also für jedes $y$ im Zielbereich $\mathbb{R}$ genau eine Lösung im Definitionsbereich $\mathbb{R}$, d.h. $f$ ist bijektiv. Gleichzeitig haben wir die Umkehrabbildung ausgerechnet: es gilt

$$f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f^{-1}(y) = 2y - 1.$$

**Vorsicht.** (i) Wie hier geschehen beschreibt man das Argument der Umkehrfunktion häufig mit einem anderen Buchstaben als das Argument der Funktion (hier z.B. $y$ bzw. $x$). Dies ist aber nicht zwingend notwendig. Man hätte genauso schreiben können

$$f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f^{-1}(x) = 2x - 1.$$

(ii) Die Umkehrabbildung $f^{-1}$ hat nichts mit der Abbildung $\frac{1}{f}$ zu tun! Oben ist zum Beispiel $f^{-1}(y) = 2y - 1$, aber

$$\left(\frac{1}{f}\right)(y) = \frac{1}{f(y)} = \frac{1}{\frac{y+1}{2}} = \frac{2}{y+1}.$$

**Quiz:** Die Umkehrabbildung von $\exp : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ ist $\ln : (0, \infty) \to \mathbb{R}$. Kennen Sie weitere Umkehrabbildungen aus der Schule?

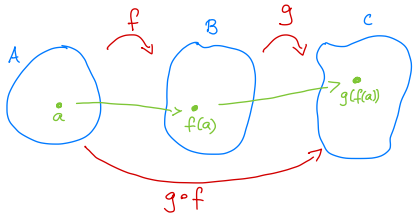
—Ende VL 6—

### Verknüpfung von Abbildungen

Aus gegebenen Abbildungen können wir neue konstruieren. Sind etwa $f : A \to B$ und $g : B \to C$ Abbildungen, so heißt die Abbildung

$$g \circ f : A \to C, \quad a \mapsto g(f(a))$$

die **Verknüpfung** bzw. **Komposition** bzw. **Hintereinanderausführung** von $f$ und $g$. Sprechweise: „$g$ nach $f$".




**Beispiel 2.3.5.** (i) Seien $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x + 1$, $g(x) = x^2$. Dann gilt $g \circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f \circ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x + 1) = (x + 1)^2$$

bzw.

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2) = x^2 + 1.$$

**Warnung!** Sie sehen, dass $f \circ g \neq g \circ f$. Die Verknüpfung von Abbildungen ist im Allgemeinen nicht kommutativ.

(ii) Für $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}, x \mapsto \sqrt{x}$ und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto -x$ ist nur eine der Verknüpfungen $g \circ f$ und $f \circ g$ definiert. **Quiz:** Welche? Was kommt heraus?

(iii) Für $f : A \to B, g : B \to C$ und $h : C \to D$ gilt

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

D.h. die Verknüpfung von Abbildungen ist **assoziativ**. Bei der Hintereinanderausführung von zwei Verknüpfungen spielt es also keine Rolle, welche der beiden Verknüpfungen Sie zuerst auswerten.

(iv) Für $A \neq \emptyset$ ist die **Identitätsfunktion** $\mathrm{id}_A$ definiert als

$$\mathrm{id}_A : A \to A, \quad \mathrm{id}_A(a) = a,$$

d.h. sie bildet jedes Element von $A$ auf sich selbst ab (oder anders formuliert, sie lässt die Elemente von $A$ so wie sie sind).

**Beachte.** (i) Die Identitätsfunktion spielt für die Verknüpfung von Abbildung eine ähnliche Rolle wie die 1 bei der Multiplikation von Zahlen: Für $f : A \to B$ und die Identitätsfunktionen $\mathrm{id}_B : B \to B$ bzw. $\mathrm{id}_A : A \to A$ gilt $f \circ \mathrm{id}_A = f = \mathrm{id}_B \circ f$, denn für alle $a \in A$ gilt

$$(f \circ \mathrm{id}_A)(a) = f(\mathrm{id}_A(a)) = \underbrace{f(a)}_{\in B} = \mathrm{id}_B(f(a)) = (\mathrm{id}_B \circ f)(a).$$

(ii) Mit Hilfe der Identitätsfunktion können wir auch eine zweite Charakterisierung der Umkehrabbildung angeben. In der Tat, ist $f : A \to B$ bijektiv mit Umkehrabbildung $f^{-1} : B \to A$, so gilt offensichtlich

$$f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_A \quad \text{und} \quad f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_B,$$

d.h.

$$\forall a \in A : \quad f^{-1}(f(a)) = a \quad \text{und} \quad \forall b \in B : \quad f(f^{-1}(b)) = b.$$

In der Übung werden Sie zeigen, dass umgekehrt auch Folgendes gilt: Falls eine Abbildung $g : B \to A$ existiert, so dass

$$g \circ f = \mathrm{id}_A \text{ und } f \circ g = \mathrm{id}_B,$$

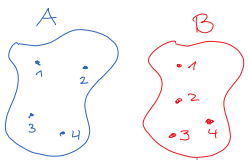
so ist $f$ bijektiv und $g = f^{-1}$.

Die Verknüpfung von Abbildungen ist eine Möglichkeit, aus gegebenen Abbildungen neue zu konstruieren. Im Falle von reellwertigen Funktionen hat man weitere Möglichkeiten, etwa, indem man Summen oder Produkte betrachtet. Hierauf werden wir später wieder zurück kommen.

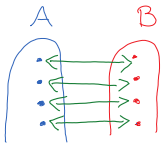
## 2.4. Mächtigkeit von Mengen

In diesem kurzen Abschnitt wollen wir über den Schulstoff nun ein erstes Mal hinausgehen und darüber sprechen, wie man die Größe von unendlichen Mengen vergleichen kann.

Schauen wir dazu zunächst einmal auf den Fall zweier endlicher Mengen $A$ und $B$. Um zu sehen, ob beide Mengen die gleiche Anzahl an Elementen besitzen, können wir die jeweiligen Elemente einfach zählen und die Ergebnisse vergleichen.



Sind die Mengen nicht endlich, so schlägt diese Methode fehl. Allerdings kann man auch anders vorgehen: Wir bilden einfach Paare von Elementen aus $A$ und $B$.




Jedem Element von $A$ ordnen wir genau ein Element von $B$ zu und umgekehrt. Wenn bei dieser Paarbildung alle Elemente von $A$ und $B$ berücksichtigt werden, sind die Mengen gleich groß. Durch die Paarbildung werden die Elemente von $A$ in diesem Fall **bijektiv** auf die Elemente von $B$ abgebildet.

**Beispiel 2.4.1.** Die beschriebene Methode funktioniert z.B. für die natürlichen Zahlen und die geraden Zahlen via der bijektiven Abbildung

$$\varphi : \mathbb{N} \to \{2, 4, 6, \ldots\}, \quad \varphi(n) = 2n$$

oder für die natürlichen Zahlen und die ungeraden Zahlen via

$$\psi : \mathbb{N} \to \{1, 3, 5, \ldots\}, \quad \psi(n) = 2n - 1.$$

Den beschriebenen Sachverhalt benutzen wir nun für eine allgemeine Definition:

- Zwei Mengen $A$ und $B$ heißen **gleichmächtig**, falls es eine bijektive Abbildung $f : A \to B$ (bzw. $g : B \to A$) gibt.

**Beachte.** Ist $f : A \to B$ bijektiv, so auch $g := f^{-1} : B \to A$ (und umgekehrt).

- Eine Menge $A$ heißt **abzählbar**[5], falls sie gleichmächtig zur Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen ist.
- Eine Menge, die weder endlich noch abzählbar ist, heißt **überabzählbar**.

Abzählbare Mengen sind also (im Sinne gleicher Mächtigkeit) genauso groß wie die Menge der natürlichen Zahlen, während überabzählbare Mengen größer sind.

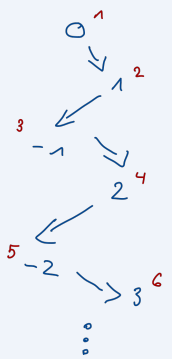
**Beachte.** Ist $A$ abzählbar und $g : \mathbb{N} \to A$ bijektiv, so kann man $A$ schreiben als

$$A = \{g(1), g(2), g(3), \ldots\} = \{g(i) \mid i \in \mathbb{N}\}.$$

Man kann $A$ also wirklich „abzählen“.

[5] Was wir abzählbar nennen, heißt in manchen Büchern auch „abzählbar unendlich“. Dort (aber nicht bei uns!) bedeutet abzählbar dann „endlich oder abzählbar unendlich“ .

**Beispiel 2.4.2.** Wie oben gesehen ist etwa die Menge der geraden Zahlen und die Menge der ungeraden Zahlen abzählbar. Das gleiche gilt für die Menge $\mathbb{Z}$ der ganzen Zahlen.




Systematisches Abzählen von $\mathbb{Z}$ führt z. B. zu folgender Bijektion:

$$f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$$

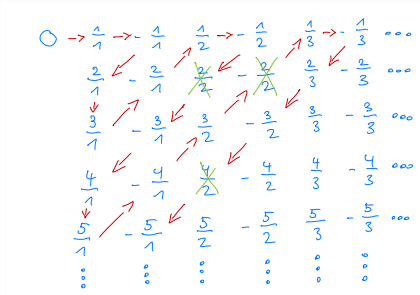
$$f(n) := \begin{cases} 1 & , n = 0 \\ 2n & , n > 0 \\ 2\cdot(-n)+1 & , n < 0 \end{cases}$$

Schon etwas überraschender ist vielleicht der folgende Satz.

**Satz 2.4.3.** $\mathbb{Q}$ ist abzählbar.

Die rationalen Zahlen sind also im Sinne der Mächtigkeit genauso groß wie die natürlichen Zahlen.

**Beweis.** Wir müssen die rationalen Zahlen auf eine systematische Weise abzählen und schreiben dafür alle Zahlen nach folgendem Schema in eine „unendliche" Tabelle: In die erste Zeile kommt die 0 und dann alle Brüche mit Zähler 1, wobei wir die Brüche mit abwechselndem Vorzeichen und steigendem Nenner notieren. In die zweite Zeile kommen analog alle Brüche mit Zähler 2 usw. Nun durchlaufen wir diese Tabelle diagonal, wie in der Zeichnung angegeben, und überspringen dabei alle Brüche, die nicht in gekürzter Form vorliegen.



Da auf diese Weise jede rationale Zahl genau einmal getroffen wird, erhalten wir tatsächlich die gesuchte Abzählung von $\mathbb{Q}$. □

Der vorherige Satz könnte zu der Vermutung führen, dass es für unendliche Mengen gar keine Abstufungen gibt und jede solche Menge abzählbar ist. Das dies nicht so ist, zeigt der folgende Satz.

**Satz 2.4.4.** Die Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen ist überabzählbar.

Die reellen Zahlen sind also im Sinne der Mächtigkeit echt größer als die rationalen und die natürlichen Zahlen, eine durchaus überraschende Tatsache.

**Beweis (Idee).** Es genügt zu zeigen, dass das Intervall $(0,1)$ nicht abzählbar ist. Dies beweisen wir mit einem sogenannten **Widerspruchsbeweis**: Wir nehmen an, das Intervall sei abzählbar und leiten aus dieser Annahme durch korrekte logische Schlüsse eine falsche Aussage ab. Dieser sich ergebende „Widerspruch" zeigt dann, dass unsere Annahme falsch war und das Intervall nicht abzählbar ist. Da es sicher nicht endlich ist, muss es damit überabzählbar sein.

Nehmen wir also an, dass $(0,1)$ abzählbar ist. Dann existiert eine Bijektion $g : \mathbb{N} \to (0,1)$ und wir erhalten

$$(0,1) = \{g(1), g(2), \ldots\} = \{g(i) \mid i \in \mathbb{N}\}.$$

Jede reelle Zahl im Intervall $(0,1)$ müsste also mit genau einer der Zahlen $g(i)$ übereinstimmen. Wir werden im folgenden eine Zahl $z \in (0,1)$ konstruieren, für die das nicht zutrifft. Dieser Widerspruch zeigt dann, wie gewünscht, dass das Intervall $(0,1)$ doch überabzählbar sein muss.

Aus der Schule wissen Sie bereits, dass jede reelle Zahl eine eindeutige Dezimaldarstellung besitzt (jedenfalls dann, wenn wir stets die Darstellung wählen, die keine 9er Periode besitzt, d.h. z.B. $1,000\ldots$ statt $0,999\ldots$ usw.). Dies gilt auch für die aufgelisteten Zahlen $g(i)$, d.h. wir finden Ziffern $x_{ij} \in \{0, \ldots, 9\}$, so dass

$$\begin{array}{rcl} g(1) & = & 0, x_{1,1}\, x_{1,2}\, x_{1,3}\, \cdots \\ g(2) & = & 0, x_{2,1}\, x_{2,2}\, x_{2,3}\, \cdots \\ \vdots & & \vdots \\ g(i) & = & 0, x_{i,1}\, x_{i,2}\, x_{i,3}\, \cdots \\ \vdots & & \vdots \end{array}$$

Nun sei für $i \in \mathbb{N}$

$$z_i := \begin{cases} 1, & \text{falls } x_{i,i} = 2 \\ 2, & \text{falls } x_{i,i} \neq 2 \end{cases}$$

und

$$z = 0, z_1\, z_2\, z_3\, \ldots$$

Dann ist $z \in (0,1)$ und für jedes $i \in \mathbb{N}$ ist $z \neq g(i)$, denn die $i$-te Nachkommastelle von $z$ und $g(i)$ sind nach Konstruktion verschieden. □ —Ende VL 7—

## 2.5. Etwas Kombinatorik

Zum Abschluss dieses Kapitels erinnern wir an einige Resultate aus der Kombinatorik, die größtenteils schon aus der Schule bekannt sein sollten.

Zunächst benötigen wir zwei Begriffe:

(i) **Fakultät:** Man definiert $0! := 1$ und

$$n! := 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Sprechweise „$n$-Fakultät“.

(ii) **Binomialkoeffizienten:** Es seien $n, k \in \mathbb{N}_0$ mit $0 \leq k \leq n$. Dann definieren wir den Binomialkoeffizient $\binom{n}{k}$, gesprochen „$n$ über $k$“, als

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

**Beachte.** (i) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt die Rekursion $n! = (n-1)! \cdot n$. Hierbei nutzt man, dass $0! = 1$ gilt!

(ii) Die Fakultät wächst sehr schnell

$$0! = 1, \quad 1! = 1, \quad 2! = 2, \quad 3! = 6, \quad 4! = 24, \quad 5! = 120, \quad \ldots.$$

Aus der Schule kennen Sie schon die Bedeutung von Fakultät und Binomialkoeffizient. Dies halten wir hier noch einmal (ohne Beweis) fest.

**Satz 2.5.1.** (i) Die Anzahl aller möglichen Anordnungen einer $n$-elementigen Menge ist gleich $n!$.

(ii) Der Binomialkoeffizient $\binom{n}{k}$ gibt die Anzahl der $k$-elementigen Teilmengen einer $n$-elementigen Menge an. Insbesondere gilt $\binom{n}{k} \in \mathbb{N}$.

**Beispiel 2.5.2.** Die Menge $\{1, 2, 3\}$ besitzt die $3! = 6$ Anordnungen

$$(1,2,3) \qquad (1,3,2) \qquad (2,1,3) \qquad (2,3,1) \qquad (3,1,2) \qquad (3,2,1).$$

Sie hat $\binom{3}{3} = 1$ Teilmenge mit drei Elementen, $\binom{3}{2} = 3$ Teilmengen mit zwei Elementen, $\binom{3}{1} = 3$ Teilmengen mit einem Element und $\binom{3}{0} = 1$ Teilmenge mit keinem Element.

Folgende Rechenregeln für die Binomialkoeffizienten ergeben sich direkt aus deren Definition (die Teile 1) und 2) aber z.B. auch sofort aus Satz 2.5.1 (ii). **Quiz:** Wie genau?

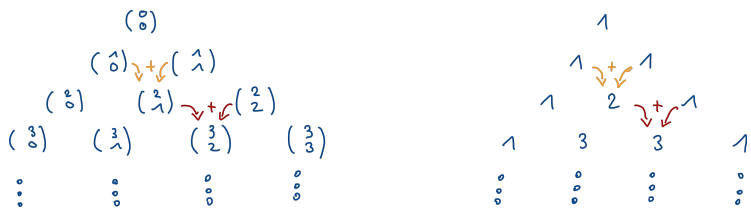
**Lemma 2.5.3.** [a] Für $n, k \in \mathbb{N}_0$ mit $0 \leq k \leq n$ gilt:

1) $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$.
2) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.
3) $\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$ für $1 \leq k \leq n$

[a] Als Lemma bezeichnet man in der Mathematik ein Hilfsresultat, das oft zum Beweis von Sätzen oder Propositionen verwendet wird.

**Beweis.** Hausaufgabe! □

**Beachte.** Teil 3) des vorherigen Lemmas zeigt uns, dass die Binomialkoeffizienten mit Hilfe des sogenannten **Pascalschen**[a] **Dreiecks** berechnet werden können.



**Quiz:** Wie drücken sich Teil 1) und 2) des Lemmas im Pascalschen Dreieck aus?

[a] Blaise Pascal (1623-1662)

Aus der Schule kennen Sie die **binomische Formel**

$$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2.$$

Dies ergibt sich einfach durch Ausmultiplizieren (Distributivregel) und Aufsammeln der Terme:

$$(x+y)^2 = (x+y)(x+y) = x \cdot (x+y) + y \cdot (x+y) = x^2 + xy + yx + y^2 = x^2 + 2xy + y^2.$$

Unser nächstes Ziel ist eine Verallgemeinerung dieser Formel auf höhere Potenzen.

Dazu rechnen wir zunächst ein paar Beispiele:

$$\begin{aligned}
(x+y)^0 &= \mathbf{1} \qquad \text{(man definiert } a^0 := 1 \text{ für alle } a \in \mathbb{R}\text{)}\\
(x+y)^1 &= \mathbf{1}\cdot x + \mathbf{1}\cdot y\\
(x+y)^2 &= \mathbf{1}\cdot x^2 + \mathbf{2}\cdot xy + \mathbf{1}\cdot y^2\\
(x+y)^3 &= \mathbf{1}\cdot x^3 + \mathbf{3}\cdot x^2y + \mathbf{3}\cdot xy^2 + \mathbf{1}\cdot y^3.
\end{aligned}$$

Wir sehen, dass wir hier gerade die Koeffizienten aus dem Pascalschen Dreieck, d.h. die Binomialkoeffizienten, wiederfinden. Diese Beobachtung wollen wir nun als Satz festhalten.

**Beachte.** Da in den obigen Formeln für höhere Potenzen ziemlich lange Summen herauskommen, ist es zweckmäßig, für solche Summen eine vereinfachende Notation einzuführen.

- Für $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ setzen wir

  $$\sum_{k=0}^{n} a_k := a_0 + a_1 + \ldots + a_n.$$

  Das griechische $\Sigma$ (Sigma) steht dabei für „Summe". Sprechweise: Die Summe über alle $a_k$ von $k = 0$ bis $k = n$.

- Natürlich kann man auch bei $k = 1$ oder $k = 2$ anfangen zu zählen,

  $$\sum_{k=1}^{n} a_k := a_1 + a_2 + \ldots + a_n, \quad \text{usw.}$$

Zum Beispiel erhalten wir mit $a_k = k$, dass

$$\sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + \ldots + n.$$

**Quiz:** Was sind $\sum_{k=1}^{n} 1$ und $\sum_{k=1}^{n} (-1)^k$ ?

Der nachfolgende Satz verallgemeinert die binomische Formel nun auf höhere Potenzen.

**Satz 2.5.4** (Binomischer Lehrsatz). Sei $n \in \mathbb{N}_0$ und $x, y \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k.$$

Ausgeschrieben lautet die Formel also

$$(x+y)^n = \binom{n}{0}x^n y^0 + \binom{n}{1}x^{n-1}y^1 + \binom{n}{2}x^{n-2}y^2 + \ldots + \binom{n}{n}x^0 y^n$$

und um die Koeffizienten $\binom{n}{k}$ zu berechnen, schauen wir, wie oben beschrieben, einfach in das Pascalsche Dreieck.

**Beweis** (des binomischen Lehrsatzes). Unser Beweis stützt sich auf die kombinatorische Bedeutung der Binomialkoeffizienten. Wir skizzieren die Beweisidee zunächst am Fall $n = 3$. Hier ist

$$(x+y)^3 = \underbrace{(x+y)}_{\text{1.Klammer}} \cdot \underbrace{(x+y)}_{\text{2.Klammer}} \cdot \underbrace{(x+y)}_{\text{3.Klammer}}.$$

Multiplizieren Sie dieses Produkt aus, erhält man eine Summe von Termen mit jeweils 3 Faktoren $x$ oder $y$.

$$(x+y)^3 = xxx + yxx + xyx + xxy + yyx + yxy + xyy + yyy$$

Jeder dieser Terme entsteht, indem man in jeder Klammer entweder $x$ oder $y$ auswählt. Der Term

$$x^1y^2 = xyy = yxy = xyy$$

entsteht beispielsweise, indem man in genau 2 der 3 Klammern das $y$ auswählt. Anders gesagt, man muss sich aus der Menge $\{1,2,3\}$ genau zwei Zahlen auswählen, stellvertretend für die jeweilige Klammer. Auf wie viele Arten ist dies möglich? Nun, dies entspricht gerade der Anzahl der 2-elementigen Teilmengen von $\{1,2,3\}$ und ist damit gleich $\binom{3}{2} = 3$.

Entsprechend argumentiert man im allgemeinen Fall. Es ist

$$(x+y)^n = \underbrace{(x+y)}_{\text{1.Klammer}} \cdot \underbrace{(x+y)}_{\text{2.Klammer}} \cdot \ldots \cdot \underbrace{(x+y)}_{\text{n.Klammer}}$$

und beim ausmultiplizieren entsteht der Term

$$x^{n-k}y^k$$

indem man in genau $k$ Klammern das $y$ auswählt. Hierzu hat man genau $\binom{n}{k}$ Möglichkeiten.

□

—Ende VL 8—

# 3. Die reellen Zahlen

Auch wenn Sie dies vielleicht nicht bemerkt haben, haben wir uns bisher auf ziemlich wackligem Grund bewegt und eine Reihe von Resultaten benutzt, ohne groß über ihre Gültigkeit nachzudenken. Zum Beispiel haben wir es ohne weiteres hingenommen, dass die Funktion

$$[0,\infty) \ni x \mapsto x^2 \in [0,\infty)$$

surjektiv ist oder dass jede reelle Zahl sich als Dezimalzahl darstellen lässt. Aber können wir uns da wirklich sicher sein?

In diesem Kapitel beginnen wir nun damit, uns mit diesen Fragen genauer zu beschäftigen. Dazu werden wir zunächst einige Grundtatsachen (Axiome) für die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ aufstellen, die wir als gültig voraussetzen und nicht weiter hinterfragen wollen. Alle weiteren Eigenschaften der reellen Zahlen sollten sich dann nur mit Hilfe dieser Grundtatsachen (und schon bewiesenen Aussagen) beweisen lassen. Man nennt dieses Vorgehen die **axiomatische Methode**. Wie Sie schon wissen, geht diese Methode zurück auf Euklid, welcher sie im Kontext der ebenen Geometrie vor über 2000 Jahren zum ersten Mal benutzte. Die axiomatische Beschreibung der reellen Zahlen ist dagegen vergleichsweise jung und wurde erst gegen Ende des 19. Jahrhunderts in die Mathematik eingeführt.

Wir werden die Axiome für die reellen Zahlen in drei Gruppen einteilen

- arithmetische Axiome (die sogenannten **Körper-Axiome**),

die uns sagen, welchen Rechengesetzen die reellen Zahlen genügen sollen,

- **Axiome der Anordnung**,

die es erlauben, Größenvergleiche zwischen reellen Zahlen vorzunehmen, und das

- **Vollständigkeitsaxiom**,

das für die *Lückenfreiheit* der reellen Zahlen sorgt (und sie somit von $\mathbb{Q}$ unterscheidet). Wir werden diesen drei Axiomengruppen jeweils einen eigenen Abschnitt in diesem Kapitel widmen. Daneben werden wir auch über die natürlichen Zahlen und das wichtige Beweisprinzip der vollständigen Induktion sprechen.

## 3.1. Die Körper-Axiome

Wir beginnen damit, die Rechenregeln für die reellen Zahlen festzulegen. Dazu stellen wir zunächst eine Liste von Eigenschaften zusammen, die wir uns für das Rechnen mit den reellen Zahlen wünschen. Jeden Zahlbereich, der diese Regeln erfüllt, nennt man in der Mathematik einen **Körper**. Die Regeln selbst heißen die **Körper-Axiome**. Neben $\mathbb{R}$ gelten sie etwa auch in den rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ (oder in den komplexen Zahlen $\mathbb{C}$).

**Definition 3.1.1.** Eine Menge $\mathbb{K}$ zusammen mit zwei Abbildungen (hier auch Verknüpfungen genannt)

$$\begin{aligned} \textbf{Addition:} \quad & + : \mathbb{K} \times \mathbb{K} \to \mathbb{K}, \qquad (a,b) \mapsto a+b \\ \textbf{Multiplikation:} \quad & \cdot : \mathbb{K} \times \mathbb{K} \to \mathbb{K}, \qquad (a,b) \mapsto a \cdot b, \end{aligned}$$

heißt **Körper**, falls Folgendes gilt:

(i) **Kommutativität:** $\forall a, b \in \mathbb{K}: \quad a+b = b+a \quad \text{und} \quad a \cdot b = b \cdot a.$

(ii) **Assoziativität:**

$$\forall a, b, c \in \mathbb{K}: \quad a+(b+c) = (a+b)+c \quad \text{und} \quad a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c.$$

(iii) **Neutrale Elemente:**
Es gibt genau ein Element $0 \in \mathbb{K}$, so dass $a+0 = a$ für alle $a \in \mathbb{K}$. In Formeln:

$$\exists!\, 0 \in \mathbb{K}\ \forall a \in \mathbb{K}: \quad a+0 = a.$$

Es gibt genau ein Element $1 \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$, so dass $a \cdot 1 = a$ für alle $a \in \mathbb{K}$. In Formeln:

$$\exists!\, 1 \in \mathbb{K} \setminus \{0\}\ \forall a \in \mathbb{K}: \quad a \cdot 1 = a.$$

(iv) **Inverse Elemente:**
Für jedes $a \in \mathbb{K}$ gibt es ein $b \in \mathbb{K}$ mit $a+b = 0$. In Formeln:

$$\forall a \in \mathbb{K}\ \exists b \in \mathbb{K}: \quad a+b = 0.$$

Für jedes $a \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ gibt es ein $b \in \mathbb{K}$ mit $a \cdot b = 1$. In Formeln:

$$\forall a \in \mathbb{K} \setminus \{0\}\ \exists b \in \mathbb{K}: \quad a \cdot b = 1.$$

(v) **Distributivgesetz:**

$$\forall a, b, c \in \mathbb{K}: \quad a \cdot (b+c) = (a \cdot b) + (a \cdot c).$$

**Vorsicht.** Man erinnere sich, dass die Reihenfolge der Quantoren in den Axiomen (iii) und (iv) wichtig ist. **Quiz:** Wie ändert sich die Bedeutung, wenn in Axiom (iv) die Quantoren getauscht werden?

**Beachte.** (i) Sie wundern sich vielleicht, dass wir die Subtraktion und Division in diesen Axiomen gar nicht erwähnt haben. Tatsächlich sind sie aber implizit enthalten, wie wir später sehen werden.

(ii) Um Klammern zu sparen, vereinbaren wir im Folgenden, dass **Punkt- vor Strichrechnung** geht, d.h. z.B. $a \cdot b + a \cdot c = (a \cdot b) + (a \cdot c)$.

Nun können wir also unser erstes Axiom für die reellen Zahlen festlegen.

**Körper-Axiom.** Die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ bilden einen Körper.

Wie wir sehen werden, gibt es neben $\mathbb{R}$ noch weitere Körper, etwa die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ (und auch die komplexen Zahlen $\mathbb{C}$). **Quiz:** Wie sieht es mit $\mathbb{N}$ oder $\mathbb{Z}$ aus?

**Beispiel 3.1.2.** Es gibt sogar Körper mit nur endlich vielen Elementen. Der folgende Körper $\mathbb{K}_2$ ist der kleinstmögliche (**Quiz:** Warum?):

$$\mathbb{K}_2 = \{0,1\} \text{ mit den Operationen } \begin{array}{c|cc} + & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{array} \text{ und } \begin{array}{c|cc} \cdot & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{array}.$$

Für diesen Körper kann man die Axiome (i) bis (v) per Hand nachprüfen. Merken kann man sich die Verknüpfungstafeln auch so: Interpretieren Sie 0 als Symbol für „gerade“ und 1 als Symbol für „ungerade“!

Bei der Auswahl von Axiomen muss man auf ein paar Dinge achten. Zwei Axiome dürfen sich etwa nicht widersprechen, da sie sonst nicht gleichzeitig gelten können. Außerdem sollte man nicht unnötig Axiome aufnehmen, die sich sowieso als Folgerung aus den schon vorhandenen ergeben. Zum Beispiel werden wir nun zeigen, dass es überflüssig wäre, auch die Eindeutigkeit der inversen Elemente in Axiom (iv) zu fordern. Das ergibt sich schon aus den übrigen Axiomen.

**Lemma 3.1.3.** Die inversen Elemente in Axiom (iv) sind eindeutig bestimmt.

Mit anderen Worten: zu jedem $a \in \mathbb{K}$ existiert **genau ein** $b \in \mathbb{K}$ mit $a + b = 0$ und zu jedem $a \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ existiert **genau ein** $b \in \mathbb{K}$ mit $a \cdot b = 1$. Natürlich sind wir diese Eigenschaften von den reellen Zahlen gewohnt und sie überraschen uns nicht. Aber dies ist nicht der Punkt. Die Eindeutigkeit wurde in den Körper-Axiomen nicht

explizit erwähnt, es ist also nicht selbstverständlich, dass sie automatisch aus den Körper-Axiomen folgt. Dass sie es tut, ist ein Hinweis darauf, dass wir die Axiome gut und sinnvoll gewählt haben.[1]

**Beweis** (des Lemmas). Wir zeigen die Eindeutigkeit im Falle der Addition (Multiplikation ist eine Übung): Sei also $a \in \mathbb{K}$ beliebig. Nehmen wir einmal an, es gäbe zwei inverse Elemente $b, b' \in \mathbb{K}$ zu $a$, d.h. es gilt $a + b = 0$ und $a + b' = 0$. Wir wollen zeigen, dass dann $b = b'$ gelten muss. Dazu rechnen wir wie folgt unter Verwendung der Körper-Axiome:

$$\begin{aligned} b &\overset{\text{(Def. von 0)}}{=} b + 0 \overset{\text{(Def. von } b'\text{)}}{=} b + (a + b') \overset{\text{(Ass.)}}{=} (b + a) + b' \\ &\overset{\text{(Komm.)}}{=} (a + b) + b' \overset{\text{(Def. von } b\text{)}}{=} 0 + b' \overset{\text{(Komm.)}}{=} b' + 0 \overset{\text{(Def. von 0)}}{=} b'. \end{aligned}$$

□

Nachdem wir nun gezeigt haben, dass es **genau ein** additives Inverses und **genau ein** multiplikatives Inverses gibt, können wir die gewohnte Schreibweise hierfür einführen.

**Definition 3.1.4.** Das zu $a \in \mathbb{K}$ bezüglich $+$ inverse Element (das additive Inverse) wird von nun an mit $-a$ bezeichnet. Weiterhin setzen wir für $a, b \in \mathbb{K}$

$$a - b := a + (-b).$$

Das zu $a \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ bezüglich $\cdot$ inverse Element (das multiplikative Inverse) wird von nun an mit $a^{-1}$ bezeichnet. Weiterhin setzen wir für $a, b \in \mathbb{K}, b \neq 0$,

$$\frac{a}{b} := a \cdot b^{-1}.$$

Division und Subtraktion waren also tatsächlich in den Körper-Axiomen versteckt.

Der nächste Satz zeigt, dass in einem Körper alle üblichen Rechenregeln gelten.

**Satz 3.1.5.** (1) **Umformen von Gleichungen:** Für alle $a, b, c \in \mathbb{K}$ gilt:

$$a + b = c \quad \Rightarrow \quad a = c - b.$$

$$b \neq 0 \text{ und } a \cdot b = c \quad \Rightarrow \quad a = \frac{c}{b}.$$

[1] Man hätte auch in Axiom (iii), der Existenz neutraler Elemente, nicht die Eindeutigkeit fordern müssen. Auch diese folgt schon aus den restlichen Axiomen. Hier haben wir uns das Leben ein bisschen einfacher gemacht :-).

(2) **Allgemeine Rechenregeln:** Für alle $a, b \in \mathbb{K}$ gilt:

$$\begin{array}{rcll} -(-a) & = & a & (a) \\ (a^{-1})^{-1} & = & a, \text{ falls } a \neq 0 & (b) \\ -(a+b) & = & (-a)+(-b) & (c) \\ (a \cdot b)^{-1} & = & a^{-1} \cdot b^{-1}, \text{ falls } a \neq 0 \text{ und } b \neq 0 & (d) \\ a \cdot 0 & = & 0 & (e) \\ a \cdot (-b) & = & -(a \cdot b) & (f) \\ (-a) \cdot (-b) & = & a \cdot b & (g) \\ a \cdot b = 0 & \Leftrightarrow & a = 0 \text{ oder } b = 0. & (h) \end{array}$$

**Beachte.** Dieser Satz enthält in (a) bzw. (g) unter anderem die bekannte Merkregel

**„Minus mal Minus gleich Plus."**

Weiterhin zeigt (e), dass die 0 tatsächlich kein multiplikatives Inverses besitzt (denn für kein $a \in \mathbb{K}$ gilt $0 \cdot a = 1$). In anderen Worten:

**„Durch die 0 kann nicht geteilt werden."**

**Beweis** (von Satz 3.1.5). Wir beweisen exemplarisch nur die Teile (1), (2a) und (2e). Hierbei werden wir stets angeben, welches Axiom oder schon bewiesene Resultat wir im jeweiligen Rechenschritt anwenden.

(1) Aus $a + b = c$ folgt

$$\begin{array}{rrl} & (a+b)+(-b) = c+(-b) & \\ \Rightarrow & a+(b+(-b)) = c-b & \text{(Ass. \& Def. 3.1.4)} \\ \Rightarrow & a+0 = c-b & \text{(Def. additives Inverses)} \\ \Rightarrow & a = c-b & \text{(Def. 0)} \end{array}$$

Der Beweis für die Multiplikation ist analog.

(2a) Hier muss man nur überlegen, was eigentlich zu zeigen ist. Für $x \in \mathbb{K}$ bezeichnet $-x$ ja gerade das additive Inverse von $x$. Es gilt also $-(-a) = a$, falls das additive Inverse von $(-a)$ gerade $a$ ist, d.h. dass $(-a) + a = 0$ gilt. In der Tat gilt

$$0 \overset{\text{Def. } -a}{=} a + (-a) \overset{\text{Komm.}}{=} (-a) + a.$$

(2e) Es gilt

$$\begin{aligned} & a \cdot 0 = a \cdot (0+0) && \text{(Def. 0)} \\ \Rightarrow \quad & a \cdot 0 = a \cdot 0 + a \cdot 0 && \text{(Distr.)} \\ \Rightarrow \quad & a \cdot 0 - (a \cdot 0) = a \cdot 0 && \text{(Teil (1) des Satzes)} \\ \Rightarrow \quad & 0 = a \cdot 0 && \text{(Def. add. Inv.)} \end{aligned}$$

□

**Beachte.** Im Folgenden werden wir den Multiplikationspunkt oft weglassen, d.h.

$$ab := a \cdot b.$$

Wie wir oben gesehen haben, genügen die Körper-Axiome noch nicht einmal, um auszuschließen, dass $1 + 1 = 0$ ist (man denke an den Körper $\mathbb{K}_2$). Wir benötigen neben den Körper-Axiomen also noch weitere Axiome, um die reellen Zahlen vollständig zu charakterisieren. —Ende VL 9—

## 3.2. Die Anordnungsaxiome

Dass und wie wir reelle Zahlen der Größe nach vergleichen können, soll in diesem Abschnitt diskutiert werden. Wir tun dies gleich wieder im Kontext allgemeiner Körper. Die Idee für unsere erste Definition ist, dass eine Zahl $a$ genau dann größer als eine Zahl $b$ ist, wenn die Differenz $a - b$ positiv ist.

**Definition 3.2.1.** Ein Körper $\mathbb{K}$ heißt **angeordnet**, wenn es eine Teilmenge $\mathbb{K}_+ \subseteq \mathbb{K}$ gibt (die positiven Zahlen), so dass Folgendes gilt:

(A1) Für alle $a \in \mathbb{K}$ gilt genau eine der folgenden Aussagen:

$$a \in \mathbb{K}_+, \quad -a \in \mathbb{K}_+, \quad a = 0.$$

(A2) $\forall a, b \in \mathbb{K}: \quad a, b \in \mathbb{K}_+ \quad \Rightarrow \quad a + b \in \mathbb{K}_+.$

(A3) $\forall a, b \in \mathbb{K}: \quad a, b \in \mathbb{K}_+ \quad \Rightarrow \quad ab \in \mathbb{K}_+.$

Bevor wir ein paar Eigenschaften über angeordnete Körper beweisen, wollen wir sie

zunächst in die übliche Schreibweise einkleiden, indem wir setzen

$$a < b \quad :\Leftrightarrow \quad b > a \quad :\Leftrightarrow \quad b - a \in \mathbb{K}_+$$

$$a \leq b \quad :\Leftrightarrow \quad b \geq a \quad :\Leftrightarrow \quad (a < b \quad \vee \quad a = b)$$

(Zur Erinnerung: Das Symbol $:\Leftrightarrow$ bedeutet, dass die Aussage auf der linken Seite des Symbols durch die Aussage auf der rechten Seite des Symbols definiert wird). Damit gelten dann tatsächlich alle üblichen Rechenregeln für den Umgang mit Ungleichungen, wie der folgende Satz zeigt.

**Satz 3.2.2.** In einem angeordneten Körper $\mathbb{K}$ gelten folgende Eigenschaften.

(i) Vergleichbarkeit: Für alle $a, b \in \mathbb{K}$ gilt genau eine der folgenden Aussagen:

$$a < b, \quad b < a, \quad a = b.$$

(ii) Transitivität:

$$\forall a, b, c \in \mathbb{K}: \quad (a < b \quad \wedge \quad b < c) \quad \Rightarrow \quad a < c.$$

(iii) Verträglichkeit mit Addition:

$$\forall a, b, c \in \mathbb{K}: \quad a < b \quad \Rightarrow \quad a + c < b + c.$$

(iv) Verträglichkeit mit Multiplikation **positiver** Zahlen:

$$\forall a, b, c \in \mathbb{K}: \quad (a < b \quad \wedge \quad c > 0) \quad \Rightarrow \quad ac < bc.$$

(v) Umkehrung der Ungleichung bei Multiplikation mit $-1$:

$$\forall a, b \in \mathbb{K}: \quad a < b \quad \Leftrightarrow \quad -a > -b.$$

und

$$\forall a, b, c \in \mathbb{K}: \quad (a < b \quad \wedge \quad c < 0) \quad \Rightarrow \quad ac > bc.$$

(vi) Ist $a \in \mathbb{K}, a \neq 0$, so gilt $a^2 := a \cdot a > 0$. Insbesondere ist $1 = 1^2 > 0$.

(vii) Ungleichungen kann man addieren:

$$\forall a, b, c, d \in \mathbb{K}: \quad (a < b \quad \wedge \quad c < d) \quad \Rightarrow \quad a + c < b + d.$$

(viii) Ungleichungen **positiver** Zahlen kann man multiplizieren:

$$\forall a, b, c, d \in \mathbb{K}_+ : \quad (a < b \quad \wedge \quad c < d) \quad \Rightarrow \quad ac < bd.$$

Weiterhin gelten (ii), (iii), (iv), (v), (vii) und (viii) auch, wenn man $<$ überall durch $\leq$ und $>$ durch $\geq$ ersetzt.

**Beweis.** Wir beweisen exemplarisch die Teile (iii)-(vi).

(iii) Es sei $a < b$, d.h. $b - a \in \mathbb{K}_+$, und $c \in \mathbb{K}$. Dann folgt

$$(b + c) - (a + c) = b - a \in \mathbb{K}_+, \quad \text{d.h.} \quad a + c < b + c.$$

(iv) Ist $a < b$ und $c > 0$, so heißt dies $b - a \in \mathbb{K}_+$ und $c \in \mathbb{K}_+$. Aber dann folgt aus Axiom (A3), dass

$$bc - ac = (b - a)c \in \mathbb{K}_+, \quad \text{d.h.} \quad ac < bc.$$

(v.1) Wir haben zwei Implikationen zu zeigen: Aus $a < b$ folgt mittels (iii) durch Addition von $c = -a - b$, dass

$$-b = a + (-a - b) < b + (-a - b) = -a, \quad \text{d.h.} \quad -a > -b.$$

Die umgekehrte Richtung folgt analog unter Verwendung von $-(-a) = a$.

(v.2) Sei $a < b$ und $c < 0$. Dann folgt aus (v.1), dass $-c > 0$ und somit aus (iv), dass $a \cdot (-c) < b \cdot (-c)$. Aber

$$a \cdot (-c) < b \cdot (-c) \quad \Leftrightarrow \quad -(ac) < -(bc) \quad \overset{(v.1)}{\Leftrightarrow} \quad ac > bc.$$

(vi) Ist $a > 0$, so folgt aus (iv), dass $a \cdot a > 0$. Ist $a < 0$, so ist nach (v.1) die Zahl $-a > 0$ und somit nach dem schon Bewiesenen $a^2 = (-a) \cdot (-a) > 0$.

□

Alle eben bewiesenen Eigenschaften gelten insbesondere für die reellen Zahlen, denn wir setzen von nun an Folgendes voraus.

**Anordnungsaxiom.** Der Körper der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ ist angeordnet.

Ein weiteres Beispiel eines angeordneten Körpers bilden die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$.

**Beachte.** Der Körper $\mathbb{K}_2$ lässt sich nicht anordnen, denn in jedem angeordneten Körper gilt nach dem vorherigen Satz zunächst $0 < 1$ und daher wegen Teil (iii)

des vorherigen Satzes auch

$$\underbrace{0+1}_{=1} < 1+1, \quad \text{d.h. insgesamt} \quad 0 < 1 < 1+1.$$

Die drei Elemente $0, 1, 1+1$ sind insbesondere paarweise verschieden. In $\mathbb{K}_2$ gilt aber $1+1=0$.

Um die reellen Zahlen vollständig axiomatisch zu charakterisieren, fehlt uns noch ein Axiom, das die Lückenfreiheit der reellen Zahlen beschreibt (und $\mathbb{R}$ somit von $\mathbb{Q}$ unterscheidet). Bevor wir hierauf eingehen, wollen wir zunächst einen Blick auf die natürlichen Zahlen werfen.

## 3.3. Einschub: Die natürlichen Zahlen und vollständige Induktion

Da wir uns dafür entschieden haben, das Analysis-Gebäude auf den reellen Zahlen aufzubauen, müssen wir nun auch noch zeigen, dass die natürlichen, die ganzen und die rationalen Zahlen mit ihren gewohnten Eigenschaften aus den reellen Zahlen (auf Basis der Körper- und Anordnungsaxiome) zurückgewonnen werden können. Man könnte zum Beispiel versucht sein, zu definieren

$$2 := 1+1, \quad 3 := 1+1+1, \quad \ldots \qquad \text{und damit} \quad \mathbb{N} := \{1, 2, 3, \ldots\}.$$

Die Zahlen $1, 2, 3$ usw. sind dann tatsächlich alle verschieden, wie wir weiter oben schon gesehen hatten. Allerdings ist die Verwendung von Pünktchen in der Definition von $\mathbb{N}$ aus mathematischer Sicht nicht sehr befriedigend. Wir werden deswegen nun eine bessere Methode zur Einführung von $\mathbb{N}$ wählen, die uns zugleich ein wichtiges Beweisprinzip liefern wird.

Wir beginnen damit, denjenigen Teilmengen der reellen Zahlen, die die 1 enthalten und bei denen Addition von 1 niemals aus der Menge herausführt, einen speziellen Namen zu geben.

**Definition 3.3.1.** Eine Teilmenge $M \subseteq \mathbb{R}$ heißt **induktiv**, falls Folgendes gilt:

(i) $1 \in M$.

(ii) $\forall x \in \mathbb{R}: \quad x \in M \;\Rightarrow\; x+1 \in M$.

Mit anderen Worten, die Zahl 1 ist Element von $M$ und mit jeder Zahl $x$ auch ihr „Nachfolger“ $x+1$.

Beispiele für induktive Mengen sind etwa $\mathbb{R}$ oder das Intervall $[1, \infty)$. Mit 1 enthält jede induktive Menge auch $2 := 1+1$ damit $3 := 1+1+1$ und so weiter. D.h. jede induktive Menge enthält **mindestens** die Zahl 1 und alle Zahlen, die man durch wiederholtes

Addieren von 1 erhalten kann. Von der Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen verlangen wir andererseits, dass sie **nur** diese Zahlen enthält. Dies führt uns zu folgender Definition.

**Definition 3.3.2.** Die Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen sei die **kleinste induktive Menge**, d.h. $\mathbb{N}$ sei durch folgende zwei Eigenschaften charakterisiert:

(i) $\mathbb{N}$ ist induktiv,

(ii) ist $M$ irgendeine induktive Teilmenge von $\mathbb{R}$, so ist $\mathbb{N} \subseteq M$.

**Beachte.** Können wir sicher sein, dass eine solche kleinste induktive Menge überhaupt existiert? Ja, man wähle $\mathbb{N}$ einfach als den Schnitt **aller** induktiver Teilmengen von $\mathbb{R}$, d.h.

$$\begin{aligned}\mathbb{N} &:= \bigcap_{M \subseteq \mathbb{R} \text{ induktiv}} M \\ &:= \{x \in \mathbb{R} \mid \text{für jede induktive Teilmenge } M \subseteq \mathbb{R} \text{ gilt } x \in M\}.\end{aligned}$$

Überlegen Sie sich einmal, warum dies so tatsächlich das Gewünschte liefert.

Mit dieser Definition von $\mathbb{N}$ könnte man nun die gewohnten Eigenschaften der natürlichen Zahlen tatsächlich beweisen, z.B.

- für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $n \geq 1$,
- zwischen $n \in \mathbb{N}$ und $n+1$ liegt keine weitere natürliche Zahl,
- für alle $n, m \in \mathbb{N}$ gilt $n + m \in \mathbb{N}$ und $n \cdot m \in \mathbb{N}$.

Auf die Beweise dieser, offensichtlich erscheinenden, Tatsachen werden wir nun aber verzichten.

Hat man damit die natürlichen Zahlen erst einmal aus den reellen Zahlen zurückgewonnen, können auch die ganzen und die rationalen Zahlen wie gewohnt eingeführt werden:

$$\mathbb{Z} := \mathbb{N} \cup \{0\} \cup \{-n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

und

$$\mathbb{Q} := \left\{\frac{a}{b} \mid a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}\right\}.$$

Dass das Rechnen mit Brüchen wie üblich funktioniert, zeigen Sie in den Übungen. —Ende VL 10—

### Die vollständige Induktion

Wir wollen nun noch über ein wichtiges Beweisprinzip sprechen, nämlich die **vollständige Induktion**. Diese kommt immer dann zum Zuge, wenn man beweisen will, dass

eine Aussage $B(n)$, die von einer natürlichen Zahl $n \in \mathbb{N}$ abhängt, für alle natürlichen Zahlen wahr ist. Solche Aussagen könnten zum Beispiel sein

a) $4|(5^n - 1)$, b) $1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$. c) $2^n > n^2$.

Wie würde man für alle $n \in \mathbb{N}$ beweisen, dass die entsprechende Aussage $B(n)$ wahr ist? Eine Möglichkeit wäre, zunächst die Wahrheit von $B(1)$ zu zeigen, dann die von $B(2)$ usw. Sie sehen, dass dies keine gute Strategie ist, denn auch nach sehr langer Zeit hätten Sie stets nur endlich viele der Aussagen als wahr erkannt.

**Beachte.** Sie dürfen auch nicht einfach nach den ersten paar gültigen Fällen abbrechen und sagen, wenn z.B. $B(1)$ bis $B(10)$ wahr sind, dann wird $B(n)$ sicher für alle $n$ wahr sein. Zum Beispiel ist für $n = 1, 2, \ldots, 39$ die Zahl $p(n) = n^2 + n + 41$ stets eine Primzahl und man könnte vermuten, dass dies für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Aber es ist $p(40) = 1681 = 41 \cdot 41$. Es gibt noch extremere Beispiele dieser Art, etwa eine Vermutung von Pólya [a], die eine andere Aussage $C(n)$ über Primzahlen betrachtet. Diese hat sich erst für $n = 906.150.257$ als falsch heraus gestellt.

[a] `https://de.wikipedia.org/wiki/Vermutung_von_P%C3%B3lya`

Eine bessere Strategie liefert der folgende Satz.

**Satz 3.3.3** (Beweisprinzip der vollständigen Induktion). Über die Aussagen $B(n), n \in \mathbb{N}$, sei bekannt:

(A) $B(1)$ ist wahr,

(S) es gilt

$$\forall n \in \mathbb{N}: \quad B(n) \Rightarrow B(n+1).^a$$

Dann ist die Aussage $B(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ wahr.

[a] D.h. für jede natürliche Zahl $n$ gilt: **wenn** $B(n)$ wahr ist, **dann** ist auch die nachfolgende Aussage $B(n+1)$ wahr.

**Beweis.** Betrachte die Menge

$$M := \{n \in \mathbb{N} \mid B(n) \text{ ist wahr } \}.$$

Dann implizieren (A) und (S), dass $M$ induktiv ist. Da $\mathbb{N}$ die kleinste induktive Menge ist, folgt also $\mathbb{N} \subseteq M$, d.h. $B(n)$ ist für alle $n \in \mathbb{N}$ wahr. □

Man nennt (A) den **Induktionsanfang** und $(S)$ den **Induktionsschritt**. Der Induktionsanfang besagt, dass die Aussage für den Startwert $n = 1$ wahr ist, und der Induktionsschritt besagt, dass die Gültigkeit sich von einer Aussage auch stets auf den

unmittelbaren Nachfolger „vererbt“.[2].

$$\begin{aligned}(A) \quad \Rightarrow \quad B(1) \text{ ist wahr} \quad &\overset{(S) \text{ mit } n=1}{\Rightarrow} \quad B(2) \text{ ist wahr} \\ &\overset{(S) \text{ mit } n=2}{\Rightarrow} \quad B(3) \text{ ist wahr} \\ &\vdots\end{aligned}$$

**Beachte.** Ein Beweis der Aussagen $B(n)$ mittels vollständiger Induktion zerfällt also in zwei Schritte:

(A) **Induktionsanfang**: Wir beweisen $B(1)$.

(S) **Induktionsschritt** von $n$ nach $n+1$: Hier betrachten wir eine beliebige Zahl $n \in \mathbb{N}$, die für den Rest des Beweises nicht mehr verändert wird. Um zu zeigen, dass die Implikation $B(n) \Rightarrow B(n+1)$ wahr ist, darf man nun voraussetzen, dass $B(n)$ wahr ist (das nennt man die **Induktionsvoraussetzung** und kürzt man oft mit **I.V.** ab). Dann muss unter Verwendung dieser Voraussetzung und logischer Schlüsse gezeigt werden, dass auch $B(n+1)$ wahr ist.

Hat man (A) und (S) gezeigt, so ist $B(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ wahr, wie aus Satz 3.3.3 folgt.

**Beispiel 3.3.4.** Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Oder ausgeschrieben:

$$1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

**Beweis** (durch vollständige Induktion). Die Aussage $B(n)$ lautet hier, dass $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.

(A) Die Aussage $B(1)$ lautet, dass $1 = \frac{1 \cdot 2}{2}$. Diese Aussage ist wahr.

(S) Nun sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig und es sei vorausgesetzt, dass $B(n)$ wahr ist, d.h. es

[2] Dies ist wie beim **Domino**: dort sorgt man dafür, dass die Steine eng genug beieinander stehen, damit ein fallender Stein stets auch den folgenden umschmeißt (Induktionsschritt) und stößt anschließend den ersten Stein um (Induktionsanfang)

gelte

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \qquad \textbf{(I.V.)}$$

Wir müssen zeigen, dass dann auch $B(n+1)$ wahr ist, d.h. dass

$$\sum_{k=1}^{n+1} k \overset{!}{=} \frac{(n+1)\left((n+1)+1\right)}{2}.$$

Das Ausrufezeichen „!“ bedeutet, dass wir die Gültigkeit dieser Gleichung zeigen müssen. Dazu starten wir mit der linken Seite und wandeln diese unter Verwendung der Induktionsvoraussetzung schrittweise um, bis wir bei der rechten Seite angelangt sind.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} k = 1+2+\ldots+n+(n+1) &= \left(\sum_{k=1}^{n} k\right) + (n+1) \\
&\overset{\textbf{(I.V.)}}{=} \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) \\
&= \frac{n(n+1)+2(n+1)}{2} \\
&= \frac{(n+1)(n+2)}{2} \\
&= \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2}.
\end{aligned}$$

Wegen (A) und (S) folgt die Aussage mit vollständiger Induktion (also Satz 3.3.3). □

**Beachte.** Man darf beim Induktionsanfang auch mit einer anderen Zahl starten: Sei $n_0$ eine ganze Zahl (sie darf also auch 0 oder negativ sein) und seien $B(n)$ für alle ganzen Zahlen $n \geq n_0$ Aussagen, für die folgendes bekannt ist

$$\text{(A)} \quad B(n_0) \text{ ist wahr.} \qquad \text{(S)} \quad \forall n \geq n_0 : B(n) \Rightarrow B(n+1).$$

Dann ist $B(n)$ für alle $n \geq n_0$ wahr.

**Beispiel 3.3.5.** Für alle $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$, gilt $n^2 \geq 2n+1$

Man beachte, dass diese Ungleichung für $n \in \{1,2\}$ tatsächlich falsch ist.

**Beweis** (durch vollständige Induktion). Die Aussage $B(n)$ lautet, dass $n^2 \geq 2n+1$.

(A) Die Aussage $B(3)$ lautet, dass $9 \geq 7$ und ist wahr.

(S) Nun sei $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$, beliebig und es sei vorausgesetzt, dass $B(n)$ wahr ist, d.h. es gelte

$$n^2 \geq 2n + 1 \quad (\mathbf{I.V.})$$

Wir müssen zeigen, dass dann auch $B(n+1)$ wahr ist, d.h. dass

$$(n+1)^2 \overset{!}{\geq} 2(n+1) + 1.$$

Wir starten wieder mit der linken Seite und schätzen, unter Verwendung der Induktionsvoraussetzung, ab:

$$\begin{aligned}(n+1)^2 &= n^2 + 2n + 1 \overset{(\mathbf{I.V.})}{\geq} (2n+1) + 2n + 1 \\ &= 2(n+1) + 2n \geq 2(n+1) + 1.\end{aligned}$$

Wegen (A) und (S) folgt die Aussage dann mit vollständiger Induktion.

□

Auch die Potenzgesetze für ganzzahlige Exponenten kann man per Induktion beweisen.

**Satz 3.3.6** (Ganzzahlige Potenzen). Ist $a \in \mathbb{R}$, so definieren wir die Potenzen $a^n, n \in \mathbb{N}_0$, wie folgt rekursiv:

$$a^0 := 1, \qquad a^{n+1} := a^n \cdot a \quad (n \in \mathbb{N}_0).$$

Ist ferner $a \neq 0$, so definieren wir die negativen Potenzen $a^{-n}, n \in \mathbb{N}$, durch

$$a^{-n} := (a^{-1})^n.$$

Dann gilt für alle $n, m \in \mathbb{Z}$

$$a^n a^m = a^{n+m}, \qquad (a^n)^m = a^{nm} \quad \text{und} \quad a^n b^n = (ab)^n,$$

wobei $a, b \neq 0$ zu wählen sind, falls negative Exponenten vorkommen.

**Beweis.** Den Beweis haben wir in der Vorlesung nicht besprochen. Als Bonus finden Sie aber zumindest einen Teilbeweis im Anhang an dieses Kapitel. □

**Beachte.** Die Setzung $a^0 := 1$ ist zwingend erforderlich, damit die Potenzrechengesetze so gelten, wie sie angegeben sind. Denn aus $a^0 \cdot a \overset{!}{=} a^{0+1} = a^1 = a$ für $a \neq 0$ folgt, dass $a^0 = 1$ gelten muss.

—Ende VL 11—

Zum Schluss betrachten wir noch eine wichtige Ungleichung zu Potenzen.

**Proposition 3.3.7** (Bernoulli-Ungleichung). [a] Sei $x \in \mathbb{R}, x \geq -1$. Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}_0$:

$$(\star) \qquad (1+x)^n \geq 1 + nx.$$

[a] Jakob Bernoulli, 1655-1705

**Beweis.** Jetzt machen wir es mal etwas weniger ausführlich: Für $n = 0$ sind beide Seiten der Ungleichung gleich 1 und natürlich gilt $1 \geq 1$, d.h. der Induktionsanfang ist gemacht. Ist nun $n \in \mathbb{N}_0$ beliebig und $B(n)$ wahr (d.h. die Ungleichung $(\star)$ gilt), so können wir abschätzen

$$(1+x)^{n+1} = (1+x)^n \underbrace{(1+x)}_{\geq 0} \overset{\text{I.V.}}{\geq} (1+nx)(1+x) = 1 + (n+1)x + \underbrace{nx^2}_{\geq 0} \geq 1 + (n+1)x.$$

Also ist auch $B(n+1)$ wahr und wir sind fertig. □

## 3.4. Das Vollständigkeitsaxiom

Die Existenz einer Zahl wie $\sqrt{2}$ lässt sich, nur auf Basis der Körper- und Anordnungsaxiome, leider nicht beweisen. Denn schließlich ist mit $\mathbb{R}$ auch $\mathbb{Q}$ ein angeordneter Körper und schon aus der Schule (spätestens aber aus Übungsaufgabe 8) wissen Sie, dass die Gleichung $x^2 = 2$ keine rationalen Lösungen besitzt.

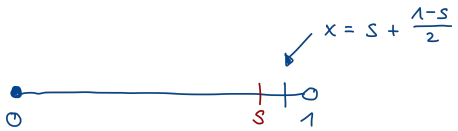
Um die Lückenfreiheit der reellen Zahlen zu garantieren (und $\mathbb{R}$ somit von $\mathbb{Q}$ zu unterscheiden), benötigen wir also ein weiteres Axiom, das sogenannte Vollständigkeitsaxiom. Um dieses formulieren zu können, betrachten wir zunächst ein Beispiel.

**Beispiel 3.4.1.** Es sei

$$I = [0,1) = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x < 1\}.$$

Dieses Intervall hat ein kleinstes Element, nämlich die 0, aber kein größtes Element. Allerdings hat $I$ mit der Zahl 1 eine **kleinste obere Schranke**, denn

- für alle $x \in I$ gilt $x \leq 1$, d.h. 1 ist eine obere Schranke von $I$, und
- keine Zahl $s < 1$ ist eine obere Schranke von $I$ (denn es gibt stets Zahlen $x \in I$, die größer als $s$ sind).




Die im Beispiel verwendeten Begriffe wollen wir nun auch für allgemeine Mengen definieren.

**Definition 3.4.2.** Sei $M \subseteq \mathbb{R}$.

(i) $M$ heißt **nach oben beschränkt**, falls ein $S \in \mathbb{R}$ existiert mit:

$$\forall x \in M: \quad x \leq S.$$

Solch ein $S$ nennen wir eine **obere Schranke** von $M$. Besitzt $M$ eine kleinste obere Schranke, so bezeichnen wir diese mit $\sup M$ und nennen sie das **Supremum** von $M$. Es ist also $S_0 = \sup M$, falls gilt:

a) $S_0$ ist eine obere Schranke von $M$.

b) Für jede obere Schranke $S$ von $M$ gilt $S_0 \leq S$.

(ii) Genauso heißt $s \in \mathbb{R}$ eine **untere Schranke** von $M$ und $M$ **nach unten beschränkt**, falls

$$\forall x \in M: \quad s \leq x.$$

Besitzt $M$ eine größte untere Schranke, so bezeichnen wir diese mit $\inf M$ und nennen sie das **Infimum** von $M$. Es ist also $s_1 = \inf M$, falls gilt:

a) $s_1$ ist eine untere Schranke von $M$.

b) Für jede untere Schranke $s$ von $M$ gilt $s \leq s_1$.

(iii) Ist $M$ nach oben und nach unten beschränkt, so heißt $M$ **beschränkt**.

**Beachte.** Besitzt $M$ sogar ein größtes Element, d.h. existiert $m_0 \in M$ mit $m \leq m_0$ für alle $m \in M$, so nennen wir dieses **Maximum** von $M$ und bezeichnen es mit $\max M$. In diesem Fall gilt $\max M = \sup M$. Analog bezeichnen wir ein mögliches kleinstes Element von $M$ mit $\min M$ (**Minimum**). Existiert dieses, so gilt $\min M = \inf M$.

**Beispiel 3.4.3.** (i) Für unser Ausgangsbeispiel $I = [0, 1)$ ist jede Zahl $s \leq 0$ eine untere Schranke und es gilt

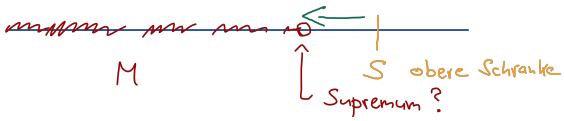
$$\inf I = \max I = 0.$$

Weiterhin gilt $\sup I = 1$. Ein Maximum existiert nicht.

(ii) Für das Intervall $M = (0, \infty)$ gilt $\inf M = 0$. Ein Minimum existiert nicht. Da das Intervall nicht nach oben beschränkt ist, existiert auch kein Supremum (erst recht kein Maximum).

**Quiz:** Wie sieht es bei der Menge $M = \{1 - \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ aus?

Unser Gefühl sagt uns, dass jede nach oben beschränkte Menge immer ein Supremum besitzen sollte. In der Tat, hat man erst einmal eine obere Schranke gefunden, so lässt man sie einfach auf der Zahlengeraden so lange nach links wandern, bis man die Ausgangsmenge „berührt". Da wir uns die Zahlengerade als kontinuierlich und ohne Lücken vorstellen, sollte der Berührpunkt dann das gesuchte Supremum sein.




Natürlich ist dies kein strenger mathematischer Beweis. Dazu müsste man zeigen, dass die Existenz von Suprema streng logisch aus den Körper- und Anordnungsaxiomen abgeleitet werden kann. **Und tatsächlich kann man das nicht!** So besitzt im angeordneten Körper $\mathbb{Q}$ beispielsweise die nach oben beschränkte Menge

$$M := \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 < 2\}$$

kein Supremum, d.h. unter allen **rationalen** oberen Schranken dieser Menge gibt es keine kleinste. Haben Sie eine Idee, warum?

Lange Rede, kurzer Sinn: Wir werden folgendes Axiom zu unserer Axiomenliste für die reellen Zahlen hinzufügen müssen.

**Vollständigkeitsaxiom.** Jede nach oben beschränkte, nicht-leere Teilmenge von $\mathbb{R}$ besitzt ein Supremum.

**Beachte.** (i) Es ist wichtig, dass die Menge nicht leer ist! Denn für die leere Menge $\emptyset$ ist jede reelle Zahl $s$ eine obere Schranke (welches Element der leeren Menge sollte auch größer als $s$ sein?). D.h. die leere Menge hat keine kleinste obere Schranke.

(ii) Äquivalent zum Vollständigkeitsaxiom ist, **dass jede nach unten beschränkte, nicht-leere Teilmenge von $\mathbb{R}$ ein Infimum besitzt**. Denn ist $M$ nach unten beschränkt, so ist die bei 0 gespiegelte Menge $-M := \{-m : m \in M\}$ nach oben beschränkt, besitzt also ein Supremum. Man sieht schnell, dass dann $\inf(M) = -\sup(-M)$ gilt. Übung!

Mit Hilfe des Vollständigkeitsaxioms könnte man nun beispielsweise sofort die Existenz von $\sqrt{2}$ zeigen, indem man beweist, dass das Supremum

$$S := \sup\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 < 2\}$$

in $\mathbb{R}$ existiert und $S \geq 0$ und $S^2 = 2$ erfüllt. Wir werden dies an dieser Stelle aber nicht tun, sondern später, etwas allgemeiner, gleich die Surjektivität von

$$[0, \infty) \ni x \mapsto x^2 \in [0, \infty)$$

beweisen. Auch für viele weitere Resultate ist das Vollständigkeitsaxiom essenziell. Beispielhaft sei die Existenz der Eulerschen Zahl

$$e := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} := \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots$$

genannt, oder der Zusammenhang

$$f' \geq 0 \quad \Rightarrow \quad f \text{ monoton wachsend}$$

für eine differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Um diese Dinge später beweisen zu können, müssen wir allerdings noch diverse Vorarbeiten leisten.

Im Folgenden wollen wir nur ein paar erste, etwas direktere, Folgerungen aus dem Vollständigkeitsaxiom ansehen.

**Satz 3.4.4.** Jede nicht-leere nach oben (nach unten) beschränkte Teilmenge von $\mathbb{Z}$ besitzt ein Maximum (ein Minimum).

Es ist wichtig, dass es hier um Teilmengen von $\mathbb{Z}$ geht! Für Teilmengen von $\mathbb{R}$ ist die Aussage falsch, wie das Intervall $(0, 1)$ zeigt.

**Beweis.** Wir betrachten nur den Fall einer nach oben beschränkten Menge.

Sei also $\emptyset \neq M \subseteq \mathbb{Z}$ in $\mathbb{R}$ nach oben beschränkt. Nach dem Vollständigkeitsaxiom existiert dann $S_0 := \sup M \in \mathbb{R}$. Wir zeigen nun in zwei Schritten, dass auch $\max M$ existiert (und dann natürlich mit $\sup M$ übereinstimm).

**1. Schritt:** Betrachte die Zahl $S_0 - \frac{1}{2}$. Da diese keine obere Schranke von $M$ ist (denn $S_0$ ist ja die kleinste obere Schranke), existiert dann $m_0 \in M$ mit

$$S_0 - \frac{1}{2} < m_0.$$

**2. Schritt:** Es gilt $m_0 = \max M$.

Dies beweisen wir mit einem Widerspruchsbeweis: Wäre $m_0 \neq \max M$, so müsste es $m_1 \in M$ geben, so dass $m_1 > m_0$. Aber $S_0$ ist ja eine obere Schranke von $M$, d.h. es gilt auch $m_1 \leq S_0$. Insgesamt folgte also mit Schritt 1, dass

$$S_0 - \frac{1}{2} < m_0 < m_1 \leq S_0.$$

Aber dies kann nicht sein, denn sonst hätten die verschiedenen ganzen Zahlen $m_0, m_1 \in \mathbb{Z}$ einen Abstand von weniger als $1/2$. Dieser Widerspruch zeigt, dass tatsächlich $m_0 = \max M$ gelten muss. □ —Ende VL 12—

Das nächste wichtige Resultat liefert uns später insbesondere, dass $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ gilt.

**Satz 3.4.5** (Archimedisches Prinzip). (i) Für jedes $x \in \mathbb{R}$ existiert $n \in \mathbb{N}$ mit $n > x$.

(ii) Für jedes reelle $\varepsilon > 0$ existiert $n \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{n} < \varepsilon$.

**Beweis.** (i) Wir führen einen Widerspruchsbeweis durch. Dazu nehmen wir an, dass die behauptete Aussage falsch ist, also ein $x \in \mathbb{R}$ existiert, so dass $n \leq x$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann wäre $\mathbb{N}$ also durch $x$ nach oben beschränkt. Aus dem vorherigen Satz 3.4.4 folgte damit, dass $\mathbb{N}$ ein größtes Element $n_0 = \max \mathbb{N}$ besitzt. Aber $n_0 + 1 \in \mathbb{N}$ ist größer als $n_0$! Dieser Widerspruch zeigt, dass unsere Annahme falsch und die Behauptung in (i) doch wahr sein muss.

(ii) Setze $x := 1/\varepsilon > 0$. Nach Teil (i) existiert $n \in \mathbb{N}$ mit $n > x$ also $n > \frac{1}{\varepsilon}$. Umstellen dieser Ungleichung liefert $1/n < \varepsilon$. □

Das nachfolgende Resultat zeigt schließlich noch einen interessanten Zusammenhang zwischen den reellen und den rationalen Zahlen (man vergleiche mit den Resultaten aus Kapitel 2.4).

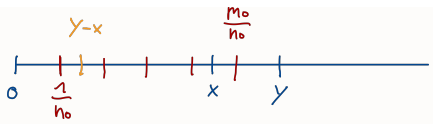
**Satz 3.4.6** (Die rationalen Zahlen sind dicht in den reellen Zahlen). Seien $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x < y$. Dann existiert $q \in \mathbb{Q}$ mit $x < q < y$.

Mit anderen Worten: Zwischen zwei beliebigen reellen Zahlen liegt immer eine rationale Zahl.

**Beweis.** Wir betrachten nur den Fall $0 < x < y$. Gesucht sind natürliche Zahlen $m_0, n_0$ mit $x < \frac{m_0}{n_0} < y$.

Da $\varepsilon := y - x > 0$, finden wir zunächst mit Hilfe des Archimedischen Prinzips ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass

$$\frac{1}{n_0} < y - x.$$




Mit diesem $n_0$ definieren wir

$$M := \{m \in \mathbb{N} : \frac{m}{n_0} > x\}.$$

Wieder aus dem Archimedischen Prinzip folgt, dass diese Menge nicht leer ist. Offensichtlich ist sie auch nach unten beschränkt. Aus Satz 3.4.4 folgt also, dass $m_0 := \min M$ existiert. Dann folgt insbesondere

$$\frac{m_0}{n_0} > x \quad \text{und} \quad \frac{m_0 - 1}{n_0} \leq x \quad \text{bzw.} \quad \frac{m_0}{n_0} \leq x + \frac{1}{n_0}.$$

Insgesamt erhalten wir also

$$x < \frac{m_0}{n_0} \leq x + \frac{1}{n_0} < x + (y - x) = y,$$

was zu zeigen war. □

Fassen wir unsere Axiome für die reellen Zahlen am Schluss dieses Abschnitts noch einmal zusammen.

**Axiome der reellen Zahlen.** Die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ bilden mit der Addition $+$ und der Multiplikation $\cdot$ einen angeordneten Körper, in dem das Vollständigkeitsaxiom gilt.

Nachdem wir uns damit darauf geeinigt haben, welchen Axiomen die reellen Zahlen genügen sollen, können wir uns nun im nächsten Kapitel zum ersten Mal mit dem wichtigen Grenzwertbegriff beschäftigen.

## — Zusatzmaterial —

**Zusatz** (Teilbeweis von Satz 3.3.6). Wir beweisen nur einen kleinen Teil exemplarisch, nämlich, dass $a^{n+m} = a^n a^m$ für alle $n, m \in \mathbb{N}_0$. Dazu fixieren wir $m \in \mathbb{N}_0$ beliebig und beweisen für dieses fixierte $m$ die Aussagen

$$B(n): \quad a^{n+m} = a^n a^m$$

für alle $n \in \mathbb{N}_0$ per Induktion.

(A) Die Aussage $B(0)$ lautet, dass $a^m \overset{!}{=} a^0 a^m$. Aber dies ist wahr, denn nach Definition gilt $a^0 = 1$.

(S) Nun sei $n \in \mathbb{N}_0$ beliebig und es sei vorausgesetzt, dass $B(n)$ wahr ist, dass also

$$a^{n+m} = a^n a^m \quad \textbf{(I.V.)}$$

Wir müssen zeigen, dass dann auch $B(n+1)$ wahr ist, d.h. dass

$$a^{(n+1)+m} \overset{!}{=} a^{n+1} a^m.$$

Wir formen hierzu die linke Seite wieder schrittweise um:

$$\begin{aligned} a^{(n+1)+m} &= a^{(n+m)+1} \overset{\text{Def. der Potenz}}{=} a^{n+m} \cdot a \\ &\overset{\text{(I.V.)}}{=} (a^n \cdot a^m) \cdot a = (a^n \cdot a) \cdot a^m \overset{\text{Def. der Potenz}}{=} a^{n+1} \cdot a^m. \end{aligned}$$

Wegen (A) und (S) folgt die Behauptung nun mit vollständiger Induktion.

# 4. Folgen

In der Schule haben Sie vermutlich Grenzwerte von Funktionen $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ausgerechnet, also so etwas wie

$$\lim_{x \to x_0} f(x).$$

Eventuell haben Sie sich auch schon einmal mit Grenzwerten von Zahlenfolgen beschäftigt, also Ausdrücke der Form

$$\lim_{n \to \infty} a_n$$

für eine Folge $(a_1, a_2, a_3, \ldots)$ von reellen Zahlen untersucht. Mit solchen Zahlenfolgen und ihren Grenzwerten wollen wir uns in diesem Kapitel beschäftigen. Dies ist von eigenem Interesse, wird uns später aber auch als Basis dienen, um den Grenzwertbegriff für Funktionen, sowie damit in Verbindung stehende Begriffe wie Stetigkeit und Differenzierbarkeit, überhaupt definieren zu können.

## 4.1. Der Abstandsbegriff auf $\mathbb{R}$

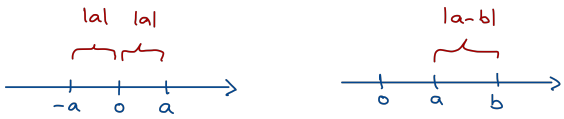
Bevor wir uns mit Folgen reeller Zahlen und ihrer Konvergenz sinnvoll beschäftigen können, müssen wir kurz über den Abstandsbegriff auf $\mathbb{R}$ sprechen.

**Definition 4.1.1.** (i) Für die Zahl $a \in \mathbb{R}$ definieren wir ihren **(Absolut-)Betrag** durch

$$|a| := \max\{a, -a\} = \begin{cases} a, & \text{falls } a \geq 0, \\ -a, & \text{falls } a < 0. \end{cases}$$

(ii) Sind $a, b \in \mathbb{R}$, so nennen wir $|a - b|$ auch den **Abstand** von $a$ und $b$

Beispielsweise ist $|1| = |-1| = 1$ und $|4 - (-1)| = |5| = 5$. Stellen wir uns die reellen Zahlen als Zahlengerade vor, so gibt $|a|$ also gerade den Abstand von $a$ zum Ursprung an, und $|a - b|$ beschreibt den Abstand der Punkte $a$ und $b$ auf der Zahlengeraden.



**Satz 4.1.2** (Rechenregeln für den Betrag). Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ gilt:

(i) $|a| \geq 0$.

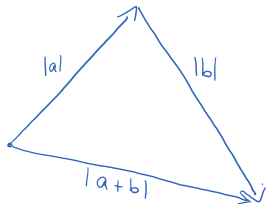
(ii) $|a| = 0 \Leftrightarrow a = 0$.

(iii) $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$. Insbesondere gilt $|-a| = |a|$ und $|\frac{a}{b}| = \frac{|a|}{|b|}$, falls $b \neq 0$.

(iv) **Dreiecksungleichung:** $|a + b| \leq |a| + |b|$.

(v) **Umgekehrte Dreiecksungleichung:** $\Big| |a| - |b| \Big| \leq |a - b|$.

Der Name Dreiecksungleichung kommt von der entsprechenden Ungleichung für Vektoren im $\mathbb{R}^n$, für die die Ungleichung auch gültig ist.




*Dreiecksungleichung im* $\mathbb{R}^2$.

**Beweis.** Alle Rechenregeln für den Betrag sind leicht zu beweisen. Wir betrachten exemplarisch die Dreiecksungleichung.

(iv) Es gilt $a \leq \max\{a, -a\} = |a|$ und entsprechend $b \leq |b|$. Da man Ungleichungen addieren darf, folgt also, dass

$$a + b \leq |a| + |b|.$$

Ebenso ist $-a \leq |-a| = |a|$, $-b \leq |-b| = |b|$, d.h. auch

$$-(a + b) = -a + (-b) \leq |a| + |b|.$$

Insgesamt folgt

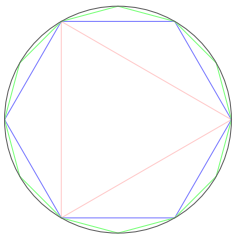
$$|a + b| = \max\{a + b, -(a + b)\} \leq |a| + |b|.$$

□

## 4.2. Folgen reeller Zahlen

Wir haben im ersten Kapitel schon davon gehört, dass Archimedes die Kreisfläche näherungsweise mittels Approximation durch regelmäßige $n$-Ecke berechnen konnte. Dies funktioniert so: Bezeichnet $a_n$ den Flächeninhalt eines im Einheitskreis einbeschriebenen regelmäßigen $n$-Ecks, so kann man elementargeometrisch eine Rekursionsformel herleiten, mit der man $a_{2n}$ mittels $a_n$ berechnen kann. Beginnt man etwa bei $n = 6$, so erhält man

$$a_6 = 2.5981, \quad a_{12} = 3.0000, \quad a_{24} = 3.1058, \quad a_{48} = 3.1326, \quad a_{96} = 3.1394, \quad \ldots.$$



Diese Folge von Zahlen nähert sich recht schnell dem Flächeninhalt $\pi$ des Einheitskreises. Archimedes selbst konnte auf diese Weise die Schranken

$$3.14085 \approx 3 + \frac{10}{71} < \pi < 3 + \frac{1}{7} \approx 3.14286$$

herleiten, also $\pi$ auf zwei Nachkommastellen genau bestimmen.

Sie sehen an diesem Beispiel schon, dass Zahlenfolgen und die Frage, ob eine solche Folge konvergiert (und wenn ja, gegen welchen Wert) eine sehr wichtige Rolle in der Analysis spielen. Was genau eine Folge aus mathematischer Sicht eigentlich ist, halten wir nun in folgender Definition fest.

**Definition 4.2.1.** Jede Abbildung von $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$ heißt eine **Folge**. Für eine solche Folge $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ schreiben wir von nun an

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ oder } (a_n)_{n=1}^{\infty} \text{ oder } (a_1, a_2, \ldots) \text{ oder kurz } (a_n),$$

wobei $a_n := a(n)$ das $n$-te Glied der Folge genannt wird.

Natürlich darf auch jeder andere Buchstabe als Folgenindex verwendet werden:

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (a_k)_{k\in\mathbb{N}} = (a_1, a_2, \ldots).$$

**Beachte.** Man kann den Folgenbegriff noch etwas verallgemeinern, indem man für $n_0 \in \mathbb{Z}$ auch jede Abbildung von $\{n \in \mathbb{Z} \mid n \geq n_0\} \to \mathbb{R}$ als Folge bezeichnet. Für diese schreibt man dann entsprechend

$$(a_n)_{n=n_0}^{\infty} \text{ oder } (a_{n_0}, a_{n_0+1}, \ldots).$$

**Beispiel 4.2.2.** (i) Zunächst mal ein ausführliches Beispiel. Die Zahlenfolge

$$\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\right)$$

schreiben wir kurz als $\left(\frac{1}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$ bzw. $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$. Die zugehörige Abbildung ist $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}, a(n) = \frac{1}{n}$.

(ii) Von nun an geben wir die zur Folge zugehörige Abbildung nicht mehr an.

- $(\frac{n}{n+1})_{n=1}^{\infty} = (\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots)$.
- Für fixiertes $c \in \mathbb{R}$ ist
  - $(c)_{n=1}^{\infty} = (c, c, c, \ldots)$ eine **konstante Folge**,
  - $(nc)_{n=0}^{\infty} = (0, c, 2c, 3c, \ldots)$ eine **arithmetische Folge** (d.h. die Differenz aufeinander folgender Glieder ist konstant),
  - $(c^n)_{n=0}^{\infty} = (1, c, c^2, c^3, \ldots)$ eine **geometrische Folge** (d.h. der Quotient aufeinander folgender Glieder ist konstant).
- Beispiele **alternierender Folgen** (d.h. aufeinander folgende Glieder haben verschiedene Vorzeichen) sind $((-1)^n)_{n=1}^{\infty} = (-1, 1, -1, 1, \ldots)$ oder $((-1)^n)_{n=0}^{\infty} = (1, -1, 1, -1, \ldots)$.

(iii) Folgen können auch **rekursiv** definiert werden, zum Beispiel die **Fibonacci-Folge:**[a]

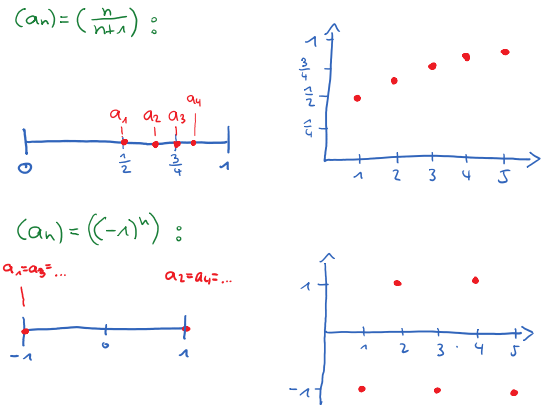
$$a_0 := 0, \quad a_1 := 1, \quad a_n := a_{n-1} + a_{n-2}, \quad n \geq 2,$$

also

$$(a_n)_{n=0}^{\infty} = (0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots).$$

[a] Leonardo da Pisa (Fibonacci genannt), 1170 - 1240.

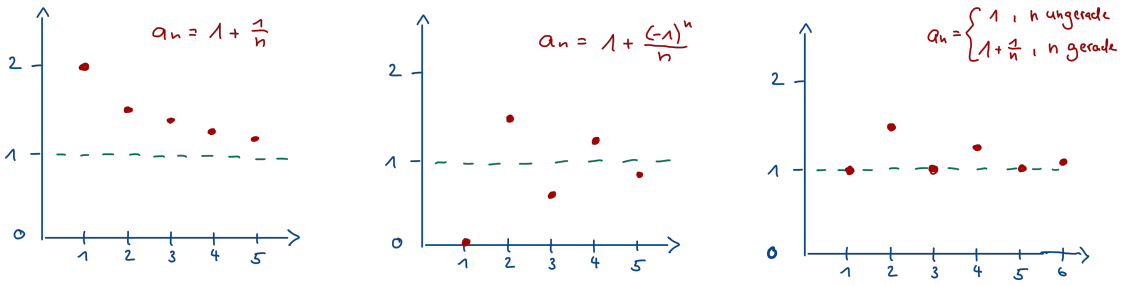
**Beachte.** Um eine Folge zu veranschaulichen, können wir ihren Wertebereich skizzieren (Ergebnis ist eine Teilmenge von $\mathbb{R}$) oder ihren Graphen zeichnen (Ergebnis ist eine Teilmenge von $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$). Zum Beispiel wie folgt:




—Ende VL 13—

### Konvergenz von Folgen

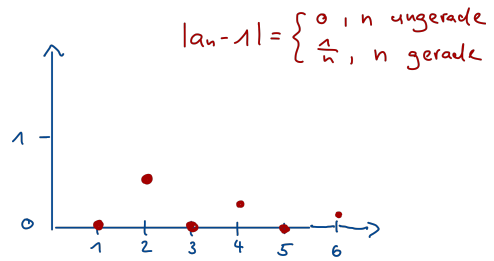
Um zu erklären, was Konvergenz einer Folge genau bedeuten soll, schauen wir uns einmal die folgenden drei Folgen an:




Aus den Zeichnungen sehen wir, dass sich die Folgenglieder jeweils der Zahl 1 auf eine gewisse Art immer mehr **annähern**. Aber was bedeutet das eigentlich genau?

**Vorsicht.** Man sieht, dass

- es **nicht** bedeutet, dass die Folgenglieder monoton von oben oder unten gegen die 1 „streben“, denn beispielsweise sind bei der zweiten Folge regelmäßig einige Folgenglieder größer und einige kleiner als 1.
- es **nicht** bedeutet, dass der Abstand der Folgenglieder zur 1, beim Übergang von einem Folgenglied zum nächsten, immer kleiner wird. Denn der Abstand von $a_n$ zur 1 wird gerade durch $|a_n - 1|$ beschrieben und der Graph der Folge $(|a_n - 1|)_{n \in \mathbb{N}}$ sieht für die dritte Folge zum Beispiel so aus:




Die letzte Zeichnung führt uns allerdings auf den richtigen Weg, denn sie zeigt etwas anderes wichtiges. Es gilt z.B.

- $|a_n - 1| \leq 1/2$ für alle $n \geq 2$,
- $|a_n - 1| \leq 1/4$ für alle $n \geq 3$,
- $|a_n - 1| \leq 1/6$ für alle $n \geq 5$, usw.

Es scheint, als könnte man für jeden vorgegebenen Abstand einen Folgenindex finden, ab dem die Folgenglieder diesen Abstand zum Grenzwert nicht mehr überschreiten. Es ist genau diese Eigenschaft, die das Annähern an den Grenzwert 1 gut charakterisiert. Wir halten also allgemeiner fest:

> *Konvergenz einer Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen einen Grenzwert $a$ soll bedeuten, dass zu **jedem** vorgegebenen (noch so kleinen) Abstand $\varepsilon > 0$ ein Index $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ existieren muss, so dass ab diesem Index alle Folgenglieder einen Abstand von höchstens $\varepsilon$ zu $a$ besitzen, d.h. für alle $n \geq n_\varepsilon$ gilt $|a_n - a| \leq \varepsilon$.*

Nach all diesen Vorbemerkungen kommen wir nun zu unserer formalen Definition der Folgenkonvergenz.

**Definition 4.2.3.** Es sei $(a_n)$ eine Folge. Wir nennen diese

(i) **konvergent gegen** $a \in \mathbb{R}$, falls gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \;\; \forall n \geq n_\varepsilon : \quad |a_n - a| \leq \varepsilon. \qquad (\star)$$

In diesem Fall schreiben wir

$$a_n \to a \text{ für } n \to \infty \qquad \text{oder} \qquad \lim_{n\to\infty} a_n = a$$

und nennen $a$ **Grenzwert** der Folge $(a_n)$,

(ii) **konvergent**, falls sie gegen ein $a \in \mathbb{R}$ konvergiert,

(iii) **divergent**, falls sie nicht konvergent ist.

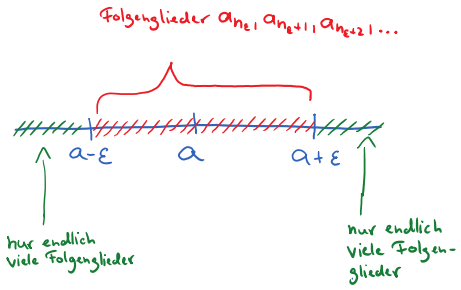
**Vorsicht.** Oft sehen wir für Grenzwerte die folgende **falsche Schreibweise**:

$$\lim_{n\to\infty} a_n \to a.$$

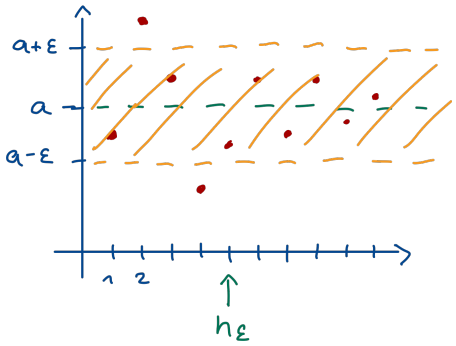
Verwenden Sie bitte wirklich nur die in der Definition angegebenen Schreibweisen.

Wir wollen die Bedeutung von $(\star)$ noch einmal wiederholen: für **jeden** (noch so kleinen) **vorgegebenen Abstand** $\varepsilon > 0$ muss ein Index $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ existieren (der von $\varepsilon$ abhängen darf), so dass die Folgenglieder $a_{n_\varepsilon}, a_{n_\varepsilon+1}, a_{n_\varepsilon+2}, \ldots$ höchstens den Abstand $\varepsilon$ zu $a$ besitzen. Dies ist gleichbedeutend damit, dass die Folgenglieder $a_{n_\varepsilon}, a_{n_\varepsilon+1}, a_{n_\varepsilon+2}, \ldots$ alle im Intervall $[a-\varepsilon, a+\varepsilon]$ liegen, d.h.

$$\forall n \geq n_\varepsilon : \quad a - \varepsilon \leq a_n \leq a + \varepsilon.$$




Verwenden wir statt des Wertebereichs den Graphen der Folge, bedeutet dies entsprechend, dass für alle $n \geq n_\varepsilon$ die **Paare** $(n, a_n)$ im eingezeichneten Streifen liegen.




**Beachte.** Wenn man zum ersten Mal mit obiger Definition der Folgenkonvergenz konfrontiert wird, fragt man sich vielleicht, ob all dieses komplizierte Zeug wirklich notwendig ist. Kann man nicht sowieso jeder Folge sofort ansehen, gegen welchen Wert sie konvergiert?

Für die oben angegebenen elementaren Folgen mag dies stimmen, aber leider

ist dies längst nicht immer so, wie die folgenden Beispiele illustrieren. Auf eine genaue, exakt nachweisbare, Definition kann also nicht verzichtet werden.

- Ist zum Beispiel die folgende rekursiv definierte Folge konvergent?

$$a_1 := 1, \quad a_{n+1} := \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{2}{a_n}\right), \quad n \in \mathbb{N}$$

- Schauen Sie sich nur die ersten paar Glieder einer Folge an, um zu entscheiden, ob die Folge konvergiert, können Sie gehörig falsch liegen. Tatsächlich können Sie die ersten 100 (oder 1000 oder ...) Glieder einer Folge beliebig ändern, ohne etwas an ihrem Konvergenzverhalten zu ändern, denn für jedes $n_0 \in \mathbb{N}$ gilt (Übungsaufgabe):

$$(a_n)_{n=1}^{\infty} \text{ konvergiert} \quad \Leftrightarrow \quad (a_n)_{n=n_0}^{\infty} \text{ konvergiert.}$$

  Und in diesem Fall stimmen die Grenzwerte der Folgen überein.

Versuchen wir nun, die Konvergenz einiger elementarer Folgen anhand der obigen Definition wirklich nachzuweisen.

**Beispiel 4.2.4.** (i) Sei $c \in \mathbb{R}$. Die konstante Folge $(a_n)_{n=1}^{\infty} := (c)_{n=1}^{\infty} = (c, c, c, \ldots)$ konvergiert gegen $c$, $\lim_{n\to\infty} a_n = c$.

**Beweis:** Dieses Resultat ist natürlich offensichtlich. Trotzdem wollen wir einmal ganz genau nachprüfen, ob die Konvergenzdefinition hier erfüllt ist: Sei also ein beliebiger Abstand $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Wir suchen ein $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, so dass $|a_n - c| \leq \varepsilon$ für alle $n \geq n_\varepsilon$. Was ist in diesem Fall $a_n - c$? Nun, es gilt

$$a_n - c = c - c = 0 \text{ und damit auch } |a_n - c| = 0$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Wir können also zum Beispiel $n_\varepsilon = 1$ wählen, und es folgt die gewünschte Abschätzung:

$$\forall n \geq 1: \quad |a_n - c| \leq \varepsilon.$$

In diesem Fall kann man also sogar für jedes $\varepsilon > 0$ das gleiche $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ wählen.

(ii) Die Folge $(\frac{1}{n})_{n=1}^{\infty}$ konvergiert gegen 0, $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

Dieses Resultat ist gar nicht so trivial, wie Sie denken. Es ist eng mit der Vollständigkeit der reellen Zahlen, genauer mit dem Archimedischen Prinzip verbunden.

**Beweis:** Sei wieder $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben. Aus dem Archimedischen Prinzip (Satz 3.4.5) folgt, dass ein $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ existiert, so dass $\frac{1}{n_\varepsilon} < \varepsilon$. Damit folgt für alle

$n \geq n_\varepsilon$, dass

$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_\varepsilon} < \varepsilon.$$

Dies war zu zeigen.

(iii) Es gilt $\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right) = 1$.

**Beweis:** Hier gilt

$$|a_n - 1| = \left|\frac{(-1)^n}{n}\right| = \frac{1}{n}$$

und wir haben in Beispiel (ii) gezeigt, dass für jedes $\varepsilon > 0$ ein $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ existiert, so dass $1/n \leq \varepsilon$ für alle $n \geq n_\varepsilon$.

Das letzte Beispiel führt direkt zur folgenden kleinen Beobachtung, die manchmal nützlich ist.

**Proposition 4.2.5.** Es gilt

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} |a_n - a| = 0.$$

**Beweis.** Dies folgt unmittelbar aus der Konvergenz-Definition. □

**Vorsicht.** Machen Sie sich noch einmal klar, dass die Reihenfolge und Art der Quantoren in der Definition der Folgenkonvergenz extrem wichtig ist. **Quiz:** Was bedeutet etwa die folgende Aussage?

$$\exists \varepsilon > 0\ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_\varepsilon : \quad |a_n - a| \leq \varepsilon.$$

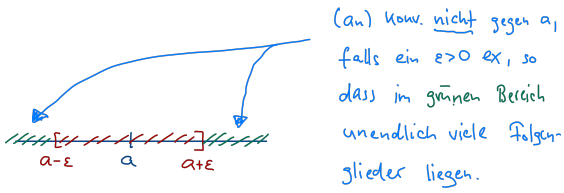
—Ende VL 14—

### Divergenz einer Folge

Wie zeigt man, dass eine Folge divergiert? Man muss zeigen, dass sie gegen kein $a \in \mathbb{R}$ konvergiert. Mit Quantoren geschrieben bedeutet dies (vergleiche Beispiel 2.1.9 zur Negation von Aussagen mit Quantoren):

$$\forall a \in \mathbb{R}\ \ \exists \varepsilon > 0\ \ \forall n_\varepsilon \in \mathbb{N}\ \ \exists n \geq n_\varepsilon : \quad |a_n - a| > \varepsilon.$$

Anders ausgedrückt: Die Folge $(a_n)$ divergiert, falls für jedes $a \in \mathbb{R}$ ein $\varepsilon > 0$ existiert, so dass das Intervall $[a - \varepsilon, a + \varepsilon]$ unendlich viele Folgenglieder **nicht** enthält.



**Beispiel 4.2.6.** Die Folge $(a_n)_{n=1}^{\infty} = ((-1)^n)_{n=1}^{\infty}$ divergiert.

**Beweis:** Für jedes $a \in \mathbb{R}$ hat das Intervall $[a - \frac{1}{2}, a + \frac{1}{2}]$ die Länge 1. Da aufeinanderfolgende Folgenglieder den Abstand 2 haben, d.h. $|a_n - a_{n+1}| = 2$ für alle $n \in \mathbb{N}$, müssen also stets unendlich viele Folgenglieder außerhalb des Intervalls liegen.

### Rechenregeln für konvergente Folgen

Wie wir bei den obigen Beispielen gesehen haben, kann es sehr mühsam sein, die Konvergenz einer Folge mit Hilfe der $\varepsilon$-$n_\varepsilon$-Definition zu überprüfen. Glücklicherweise hat man es oft mit Folgen zu tun, die sich aus Summen, Differenzen, Produkten oder Quotienten schon bekannter Folgen zusammensetzen. In diesem Fall können die folgenden Rechenregeln uns das Leben sehr erleichtern.

**Satz 4.2.7** (Summen-, Differenzen-, Produkt- und Quotientenregel). Es seien $(a_n)$ und $(b_n)$ konvergente Folgen, mit $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ und $\lim_{n\to\infty} b_n = b$. Dann gilt:

(i) Die Folge $(a_n \pm b_n)$ ist konvergent und

$$\lim_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = a \pm b.$$

(ii) Die Folge $(a_n \cdot b_n)$ ist konvergent und

$$\lim_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b.^a$$

(iii) Ist $b \neq 0$ und $b_n \neq 0$ für alle $n$, so ist die Folge $(\frac{a_n}{b_n})$ konvergent und

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}.$$

[a] Als Spezialfall der Produktregel für die konstante Folge $a_n = a$ erhält man, dass $\lim_{n\to\infty}(a \cdot b_n) = a \cdot \lim_{n\to\infty} b_n$.

**Beweis.** Wir beweisen nur Teil (i) im Fall einer Summe. Dazu geben wir uns wieder einen beliebigen positiven Abstand vor, den wir ausnahmsweise einmal mit $\delta > 0$ bezeichnen. Gesucht ist ein $n_\delta \in \mathbb{N}$, so dass

$$\forall n \geq n_0 : \quad |(a_n + b_n) - (a + b)| \leq \delta \qquad (\star).$$

Um dies zu erreichen, setzen wir $\varepsilon := \frac{\delta}{2}$. Dann existiert aufgrund der Konvergenz

$a_n \to a$ für $n \to \infty$ ein $n_\varepsilon^{(1)} \in \mathbb{N}$, so dass

$$\forall n \geq n_\varepsilon^{(1)} : \quad |a_n - a| \leq \varepsilon$$

und wegen $b_n \to b$ für $n \to \infty$ existiert $n_\varepsilon^{(2)} \in \mathbb{N}$ mit

$$\forall n \geq n_\varepsilon^{(2)} : \quad |b_n - b| \leq \varepsilon.$$

Setzen wir $n_\delta := \max(n_\varepsilon^{(1)}, n_\varepsilon^{(2)})$, so folgt

$$\forall n \geq n_\delta : \quad |a_n - a| \leq \varepsilon \quad \wedge \quad |b_n - b| \leq \varepsilon.$$

Aus der Dreiecksungleichung folgt dann die gewünschte Ungleichung $(\star)$: für alle $n \geq n_\delta$ gilt

$$\begin{aligned} |(a_n + b_n) - (a + b)| &= |(a_n - a) + (b_n - b)| \\ &\leq |(a_n - a)| + |(b_n - b)| \\ &\leq \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon = \delta. \end{aligned}$$

□

**Beispiel 4.2.8.** Wir betrachten die Folge

$$\left(\frac{3n^2 + 13n}{4n^2 + 5}\right)_{n=1}^{\infty}$$

einmal sehr ausführlich. Hier handelt es sich um einen Quotienten der Folgen $(a_n) = (3n^2 + 13n)$ und $(b_n) = (4n^2 + 5)$. Da diese Folgen nicht konvergieren (warum?), müssen wir zunächst einen kleinen Trick anwenden, um die Quotientenregel des vorherigen Satzes nutzbar zu machen. Wir schreiben

$$\frac{3n^2 + 13n}{4n^2 + 5} = \frac{n^2(3 + \frac{13}{n})}{n^2(4 + \frac{5}{n^2})} = \frac{3 + \frac{13}{n}}{4 + \frac{5}{n^2}}.$$

Schauen wir uns nun die Folgen im Zähler und Nenner an: Zunächst folgt mit Rechenregel (ii) (angewandt auf die Folgen $a_n = b_n = \frac{1}{n}$) und mit $\lim \frac{1}{n} = 0$, dass

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = \left(\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\right) \cdot \left(\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\right) = 0 \cdot 0 = 0.$$

Dann folgt erneut mit (ii) (angewandt auf die konstante Folge $a_n = 5$ und $b_n = \frac{1}{n^2}$),

dass

$$\lim_{n\to\infty} \frac{5}{n^2} = 5 \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 5 \cdot 0 = 0$$

und somit schließlich aus (i), dass

$$\lim_{n\to\infty} \left(4 + \frac{5}{n^2}\right) = 4 + 0 = 4 \quad \text{und analog} \quad \lim_{n\to\infty} \left(3 + \frac{13}{n}\right) = 3.$$

Mit der Quotientenregel (iii) folgt somit

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2 + 13n}{4n^2 + 5} = \lim_{n\to\infty} \frac{3 + \frac{13}{n}}{4 + \frac{5}{n^2}} = \frac{3}{4}.$$

Bisher haben wir noch gar nicht ausgeschlossen, dass eine Folge zwei Grenzwerte besitzen kann. Dies wollen wir jetzt schnell nachholen.

**Satz 4.2.9** (Eindeutigkeit des Grenzwertes). Konvergiert die Folge $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ gegen $a$ und gegen $b$, so ist $a = b$.

**Beweis.** Es gilt $0 = a_n - a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, d.h. einerseits gilt

$$\lim_{n\to\infty} (a_n - a_n) = 0.$$

Andererseits folgt aus $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ und $\lim_{n\to\infty} a_n = b$ mit der Differenzenregel auch

$$\lim_{n\to\infty} (a_n - a_n) = a - b.$$

Also folgt $a - b = 0$ bzw. $a = b$. □

Ein weiteres Hilfsmittel im Umgang mit Folgen ist die folgende Proposition.

**Proposition 4.2.10.** Seien $(a_n)$ und $(b_n)$ konvergente Folgen.

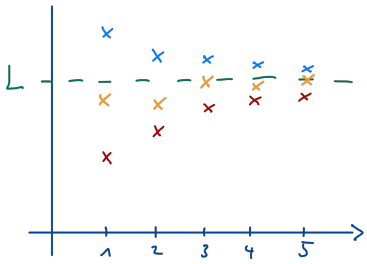
(i) **Monotonie der Grenzwertbildung:** Gilt $a_n \leq b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so folgt

$$\lim_{n\to\infty} a_n \leq \lim_{n\to\infty} b_n.$$

(ii) **Sandwichprinzip:** Ist $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$ und ist $(c_n)$ eine Folge mit $a_n \leq c_n \leq b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so ist auch $(c_n)$ konvergent und es gilt

$$\lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n.$$

**Quiz:** Gilt $\lim_{n\to\infty} a_n < \lim_{n\to\infty} b_n$, falls $a_n < b_n$ für alle $n$?




Sandwichprinzip

$a_n \le c_n \le b_n$

$\downarrow n\to\infty \qquad \downarrow n\to\infty$

$L \qquad L$

$\Rightarrow \quad c_n \xrightarrow{n\to\infty} L$

**Beweis.** (i) Sei $d_n := b_n - a_n$. Dann gilt $d_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und aus der Differenzenregel folgt

$$d := \lim_{n\to\infty} d_n = \lim_{n\to\infty} b_n - \lim_{n\to\infty} a_n.$$

Wir müssen zeigen, dass $d \geq 0$ gilt. Nehmen wir an, dies wäre falsch, d.h. $d < 0$. Dann wäre $\varepsilon := -\frac{d}{2} > 0$ und wegen $d_n \to d$ würde ein $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ existieren, so dass

$$\forall n \geq n_\varepsilon : \quad |d_n - d| \leq \varepsilon.$$

Da $x \leq |x|$ für jedes reelle $x$, hätte dies für alle jene $n$ zur Folge, dass

$$d_n - d \leq |d_n - d| \leq \varepsilon = -\frac{d}{2}.$$

Durch Umstellen würde also $d_n \leq \frac{d}{2} < 0$ folgen, im Widerspruch zur Voraussetzung $d_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Also muss doch $d \geq 0$ gelten.

(ii) Übung. □

**Beispiel 4.2.11.** Für jede reelle Zahl $x \in \mathbb{R}$ existiert eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von **rationalen Zahlen** mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x$.

**Beweis:** Da $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$ dicht liegt (Satz 3.4.6), existiert zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $x_n \in \mathbb{Q}$ mit

$$x - \frac{1}{n} \leq x_n \leq x + \frac{1}{n}.$$

Da

$$\lim_{n\to\infty}\left(x + \frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(x - \frac{1}{n}\right) = x,$$

folgt $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ aus dem Sandwichprinzip.

Das nächste Beispiel zeigt, dass man das Supremum einer Menge immer durch eine Folge aus der Menge approximieren kann.

**Beispiel 4.2.12.** Sei $M \subseteq \mathbb{R}$ nach oben beschränkt und nicht leer. Dann existiert eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Elementen von $M$ mit

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \sup M.$$

**Beweis:** Sei $m := \sup M$ (dies existiert nach dem Vollständigkeitsaxiom!). Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist dann $m - \frac{1}{n}$ keine obere Schranke von $M$ (denn $m$ ist ja die kleinste). Also existiert $x_n \in M$ mit

$$m - \frac{1}{n} < x_n \leq m.$$

Aus dem Sandwichprinzip folgt $\lim_{n\to\infty} x_n = m$. —Ende VL 15—

Als weitere Anwendung des Sandwichprinzips wollen wir das Konvergenzverhalten der geometrischen Folge $(c^n)_{n=0}^{\infty} = (1, c, c^2, c^3, \ldots)$ untersuchen. Da diese für $c > 1$ in einem exakten Sinne gegen unendlich strebt, führen wir zunächst einen neuen Begriff ein.

**Definition 4.2.13.** Wir schreiben $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$, falls gilt:

$$\forall\, R > 0\ \exists n_R \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_R :\ a_n \geq R.$$

Entsprechend schreiben wir $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$, falls $\lim_{n\to\infty}(-a_n) = \infty$ gilt. Liegt einer dieser Fälle vor, so heißt die Folge $(a_n)$ **bestimmt divergent** (gegen $\infty$ bzw. $-\infty$)

**Beachte.** Bestimmte Divergenz (gegen $\infty$) bedeutet also, dass **jede** Zahl $R > 0$ von der Folge irgendwann für immer (für alle $n \geq n_R$) überschritten wird.

Um eine Folge als bestimmt divergent zu kennzeichnen, ist folgendes Resultat hilfreich.

**Proposition 4.2.14.** Es sei $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ eine Folge mit $a_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = \infty.$$

**Beweis.** Versuchen Sie es mal selbst! □

**Beispiel 4.2.15.** Da $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, gilt $\lim_{n\to\infty} n = \infty$.[a]

[a] Ein alternativer direkter Beweis: Ist $R > 0$ gegeben, so ex. nach dem Archimedischen Prinzip ein $n_R \in \mathbb{N}$ mit $n_R > R$. Und dann gilt auch $n \geq R$ für jedes natürliche $n \geq n_R$.

**Beispiel 4.2.16.** Sei $c \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

$$\lim_{n\to\infty} c^n = \begin{cases} \infty, & \text{falls } c > 1, \\ 1, & \text{falls } c = 1, \\ 0, & \text{falls } -1 < c < 1. \end{cases}$$

Im Falle $c \leq -1$ ist die Folge $(c^n)$ weder konvergent noch bestimmt divergent.

**Beweis:** (i) Die Fälle $c = 1$ und $c = -1$ kennen wir schon.

(ii) Im Falle $-1 < c < 1$, d.h. $|c| < 1$, setzen wir $b := 1/|c|$. Dann gilt $b > 1$ und wir können schreiben $b = 1 + x$ mit $x := b - 1 > 0$. Aus der Bernoulli-Ungleichung (Proposition 3.3.7) folgt, dass $b^n = (1+x)^n \geq 1 + nx$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dies impliziert

$$0 < \frac{1}{b^n} \leq \frac{1}{1+nx} \leq \frac{1}{nx} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

d.h. aus dem Sandwichprinzip folgt wegen $\frac{1}{nx} \to 0$ für $n \to \infty$, dass

$$0 = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{b^n} = \lim_{n\to\infty} |c|^n = \lim_{n\to\infty} |c^n| \,.$$

Aus Proposition 4.2.5 folgt damit $\lim_{n\to\infty} c^n = 0$.

(iii) Im Falle $c > 1$ gilt $\frac{1}{c} < 1$, d.h. mit (ii) folgt $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{c^n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{c}\right)^n = 0$. Nun folgt die Aussage aus Proposition 4.2.14.

(iv) Der Fall $c < -1$ sei als Übung überlassen.

Wir wollen nun noch polynomielles, exponentielles und faktorielles Wachstum vergleichen. Dazu benötigen wir folgendes Hilfsresultat.

**Lemma 4.2.17.** Sei $a_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und es existiere $0 < q < 1$ und $N \in \mathbb{N}$, so dass

$$\forall n \geq N : \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q.$$

Dann gilt:

(i) $\forall n \geq N : 0 < a_n \leq q^n \cdot \frac{a_N}{q^N}$.

(ii) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

**Beweis.** Aus der Abschätzung folgt

$$0 < a_{N+1} = \frac{a_{N+1}}{a_N} \cdot a_N \leq q \cdot a_N$$
$$0 < a_{N+2} = \frac{a_{N+2}}{a_{N+1}} \cdot a_{N+1} \leq q \cdot a_{N+1} \leq q^2 \cdot a_N$$

und allgemein

$$0 < a_{N+k} \leq q^k \cdot a_N, \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

Setzen wir $n := N + k$ und somit $k = n - N$, folgt

$$0 < a_n \leq q^{n-N} \cdot a_N = q^n \cdot \frac{a_N}{q^N}, \quad n \geq N.$$

Dies ist Ungleichung (i). Da der Quotient hier unabhängig von $n$ ist und $0 < q < 1$ gilt, folgt weiter

$$\lim_{n\to\infty} (q^n \cdot \frac{a_N}{q^N}) = \frac{a_N}{q^N} \cdot \lim_{n\to\infty} q^n = 0.$$

Das Sandwichprinzip und (i) zeigen also, dass $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. □

**Beispiel 4.2.18.** Sei $c > 1$ und $p \in \mathbb{N}$. Dann gilt:

(i) Exponentielles Wachstum schlägt polynomielles Wachstum, d.h.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^p}{c^n} = 0.$$

(ii) Faktorielles Wachstum schlägt exponentielles Wachstum, d.h.

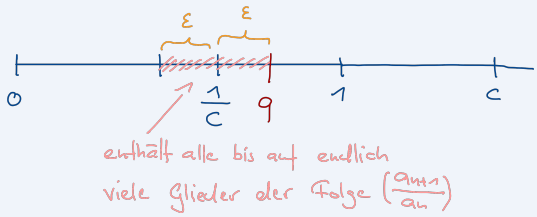
$$\lim_{n\to\infty} \frac{c^n}{n!} = 0.$$

**Beweis:** (i) Mit $a_n := \frac{n^p}{c^n}$ gilt

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^p}{c^{n+1}} \frac{c^n}{n^p} = \frac{1}{c} \cdot (1 + \frac{1}{n})^p \overset{n\to\infty}{\to} \frac{1}{c}.$$

Nun wähle $q$ mit $\frac{1}{c} < q < 1$ (dies funktioniert, da $c > 1$ vorausgesetzt ist). Dann ist $\varepsilon := q - \frac{1}{c} > 0$ und wegen $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to \frac{1}{c}$ existiert $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ mit

$$\forall n \geq n_\varepsilon : \quad \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} - \frac{1}{c} \right| \leq \varepsilon.$$




Insbesondere gilt also

$$\forall n \geq n_\varepsilon : \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q < 1$$

und die behauptete Konvergenz folgt damit aus Lemma 4.2.17.

(ii) Mit $a_n = \frac{c^n}{n!}$ gilt hier

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{c^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{c^n} = \frac{c}{n+1} \overset{n\to\infty}{\to} 0.$$

Nun kann man genauso wie in Teil (i) argumentieren.

## 4.3. Zwei Konvergenzkriterien

In den bisherigen Beispielen war fast immer sofort anschaulich klar, ob und gegen welchen Wert eine Folge konvergiert. Dies muss jedoch längst nicht immer so sein, wie wir auch schon diskutiert haben. Es wäre deshalb sehr hilfreich, über notwendige und hinreichende Kriterien für die Konvergenz zu verfügen. Darum wollen wir uns jetzt kümmern. Wir beginnen mit der Betrachtung beschränkter Folgen.

**Definition 4.3.1.** Eine Folge $(a_n)_{n=1}^\infty$ heißt **nach oben beschränkt** bzw. **nach unten beschränkt** bzw. **beschränkt**, falls die Wertemenge $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ diese Eigenschaft besitzt (vergleiche Definition 3.4.2). Obere bzw. untere Schranken der Wertemenge nennt man entsprechend auch **obere** bzw. **untere Schranken** der Folge $(a_n)_{n=1}^\infty$. Ist eine Folge nicht beschränkt, so heißt sie **unbeschränkt**.

**Quiz:** Was sind obere und untere Schranken der Folge $((n+1)/n)_{n\in\mathbb{N}}$? Kennen Sie Beispiele unbeschränkter Folgen?

**Beachte.** (a) Es sind äquivalent:

(i) $(a_n)_{n=1}^\infty$ ist beschränkt.

(ii) Es existiert $M \geq 0$, so dass $|a_n| \leq M$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

**Beweis:** Gilt $|a_n| \leq M$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so ist $-M \leq a_n \leq M$, d.h. $-M$ ist eine obere und $M$ eine untere Schranke der Folge. Gilt umgekehrt $s \leq a_n \leq S$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so auch $-S \leq -a_n \leq -s$, und somit

$$\forall n \in \mathbb{N}: \quad |a_n| = \max\{a_n, -a_n\} \leq \max\{S, -s\} =: M.$$

(b) Das Ändern von endlich vielen Folgengliedern ändert nichts an der Beschränktheit einer Folge, d.h. für jedes $n_0 \in \mathbb{N}$ gilt:

$$(a_n)_{n=1}^{\infty} \text{ ist beschränkt} \quad \Leftrightarrow \quad (a_n)_{n=n_0}^{\infty} \text{ ist beschränkt}$$

**Beweis:** Gilt $|a_n| \leq M$ für $n \geq n_0$, so gilt mit $M_0 := \max(|a_1|, \ldots, |a_{n_0}|, M)$, dass

$$\forall n \in \mathbb{N}: \quad |a_n| \leq M_0$$

**Satz 4.3.2.** Jede konvergente Folge ist **beschränkt**.

**Beweis.** Sei $a := \lim_{n\to\infty} a_n$. Dann gibt es zu $\varepsilon = 1$ ein $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, so dass $|a_n - a| \leq 1$ für alle $n \geq n_\varepsilon$. Daraus folgt insbesondere mit Hilfe der Dreiecksungleichung

$$|a_n| = |(a_n - a) + a| \leq |a_n - a| + |a| \leq 1 + |a| =: M$$

für alle $n \geq n_\varepsilon$, d.h. die Folge $(a_n)_{n=n_\varepsilon}^{\infty}$ ist beschränkt. Nach obiger Beobachtung (b) gilt dann das Gleiche für die Ausgangsfolge. □

**Vorsicht.** Die Umkehrung des Satzes gilt nicht! Nicht jede beschränkte Folge ist auch konvergent! Denken Sie etwa an die alternierende Folge $((-1)^n)_{n=1}^{\infty}$. Die Beschränktheit einer Folge ist notwendig, aber nicht hinreichend für deren Konvergenz.

Ist eine Folge nicht beschränkt, kann sie nach Satz 4.3.2 auch nicht konvergieren.

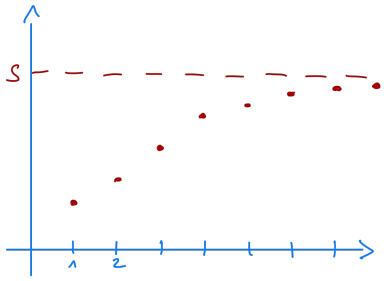
**Beispiel 4.3.3.** Die Fibonacci-Folge $(0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots)$ divergiert, da sie nicht beschränkt ist.

—Ende VL 16—

Um ein hinreichendes Kriterium für die Folgenkonvergenz anzugeben, müssen wir über **monotone** Folgen sprechen, d.h. Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die entweder

- **monoton wachsen** (d.h. $a_{n+1} \geq a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$), wie die Folge $\left(\frac{n-1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}} = \left(0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \ldots\right)$, oder
- **monoton fallen** (d.h. $a_{n+1} \leq a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$), wie die Folge $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}} = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\right)$.

Schauen wir uns den Graphen einer monotonen und beschränkten Folge an, so sagt uns unsere Intuition, dass die Folge konvergieren sollte. Dies ist tatsächlich der Fall und ist eine weitere Folgerung aus dem Vollständigkeitsaxiom der reellen Zahlen.




Ist $(a_n)$ mon. wachsend und nach oben beschränkt, so konvergiert sie gegen das Supremum ihrer Bildmenge

**Satz 4.3.4** (Monotoniekriterium). Für jede Folge $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ gilt:

(i) Ist die Folge monoton wachsend und nach oben beschränkt, so ist sie konvergent und
$$\lim_{n\to\infty} a_n = \sup\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

(ii) Ist die Folge monoton fallend und nach unten beschränkt, so ist sie konvergent und
$$\lim_{n\to\infty} a_n = \inf\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

**Quiz:** Gilt die Umkehrung obiger Aussagen: Ist jede konvergente Folge monoton (wachsend oder fallend) und beschränkt?

**Beweis.** Wir beweisen nur Teil (i). Der Teil (ii) folgt analog.

Dass die Folge nach oben beschränkt ist, bedeutet, dass die nicht-leere Wertemenge $M := \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ nach oben beschränkt ist. Also existiert $s := \sup(M)$ wegen dem Vollständigkeitsaxiom. Wir zeigen, dass $\lim_{n\to\infty} a_n = s$ gilt. Sei dazu $\varepsilon > 0$ beliebig. Da $s - \varepsilon$ keine obere Schranke von $M$ ist, existiert $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, so dass $s - \varepsilon < a_{n_\varepsilon}$. Da die Folge $(a_n)$ monoton wächst und $s$ eine obere Schranke von $M$ ist, gilt dann insbesondere für alle $n \geq n_\varepsilon$, dass
$$s - \varepsilon < a_{n_\varepsilon} \leq a_n \quad \text{und} \quad a_n \leq s.$$
Also gilt $a_n \in [s - \varepsilon, s + \varepsilon]$ für alle $n \geq n_\varepsilon$, was zu zeigen war. □

Als erste Anwendung des Monotoniekriteriums wollen wir einen ersten Beweis für die Existenz von Quadratwurzeln angeben (ein weiterer folgt später).

**Satz 4.3.5** (Existenz von Quadratwurzeln). Sei $a \geq 0$.

(i) Es existiert genau eine reelle Zahl $s \geq 0$ mit der Eigenschaft $s^2 = a$. Wir nennen diese Zahl die **(Quadrat-)Wurzel** von $a$ und bezeichnen Sie mit $\sqrt{a}$.

(ii) Definiere die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ rekursiv durch

$$a_{n+1} := \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{a}{a_n}\right), \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

wobei $a_0 > 0$ beliebig gewählt werden darf. Dann gilt $\lim_{n\to\infty} a_n = \sqrt{a}$.

**Beachte.** 1) Man nennt das Approximationsverfahren in (ii) das **Heron-Verfahren**.[a] Dieses Verfahren konvergiert sehr schnell. Für $a = 2$ mit Startwert $a_0 = 2$ gilt etwa

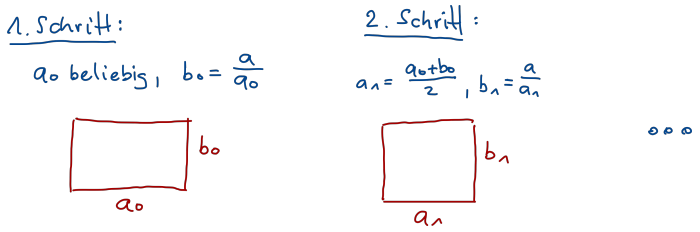
$$a_1 = \frac{1}{2}\left(2 + \frac{2}{2}\right) = \frac{3}{2} = 1{,}5 \qquad a_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2} + 2\cdot\frac{2}{3}\right) = \frac{17}{12} = 1{,}41\overline{6}, \qquad \text{usw.}$$

2) Was steckt hinter dem Heron-Verfahren? Die Gleichung $s^2 = a$ zu lösen bedeutet geometrisch, ein Quadrat mit Seitenlänge $s$ und Flächeninhalt $a$ zu konstruieren. Dazu starten wir mit einem beliebigen Rechteck mit Flächeninhalt $a$. Hat die eine Seite dieses Rechtecks die Länge $a_0$, so muss die andere Seite die Länge $b_0 = \frac{a}{a_0}$ besitzen. Um dieses Rechteck einem Quadrat ähnlicher zu machen, müssen wir die Länge der längeren Seite verkleinern und die der kürzeren vergrößern. Dies tun wir, indem wir statt $a_0$ den Mittelwert von $a_0$ und $b_0$ verwenden

$$a_1 = \frac{a_0 + b_0}{2} = \frac{1}{2}\left(a_0 + \frac{a}{a_0}\right)$$

und dann $b_1 = \frac{a}{a_1}$ wählen. Dies führen wir nun fort, d.h.

$$a_2 = \frac{a_1 + b_1}{2} = \frac{1}{2}\left(a_1 + \frac{a}{a_1}\right), \quad b_2 = \frac{a}{a_2}, \qquad \text{usw.}$$




[a] nach Heron von Alexandria, griech. Mathematiker der Antike.

**Beweis** (von Satz 4.3.5). Wir benutzen die Folge aus Teil (ii) um die Existenz der Quadratwurzel zu zeigen.

1. **Existenz:** Induktiv sieht man sofort, dass $a_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, d.h. die Folge ist nach unten beschränkt. Weiterhin ist es nicht schwer zu zeigen, dass die Folge monoton fällt. Auf den Beweis verzichten wir an dieser Stelle aus Zeitgründen, Sie finden ihn aber im Anhang an dieses Kapitel.

Damit ist $(a_n)$ nach Satz 4.3.4 konvergent, d.h. $s := \lim_{n\to\infty} a_n$ existiert. Aus der Monotonie der Grenzwertbildung folgt wegen $a_n > 0$ auch sofort, dass

$$s = \lim_{n\to\infty} a_n \geq 0$$

gelten muss. Wir zeigen nun, dass $s^2 = a$ gilt. Dazu multiplizieren wir die Rekursionsvorschrift

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{a}{a_n}\right)$$

auf beiden Seiten mit $2a_n$ und erhalten die Gleichung

$$2a_{n+1}a_n = a_n^2 + a.$$

Da $a_n \to s$ und $a_{n+1} \to s$ für $n \to \infty$, können wir auf beiden Seiten dieser Gleichung den Grenzwert $n \to \infty$ betrachten und erhalten so unter Verwendung der Folgenrechenregeln, dass

$$2s^2 = s^2 + a,$$

d.h. es gilt $s^2 = a$.

**2. Eindeutigkeit:** Seien $s, t \geq 0$ Zahlen mit der Eigenschaft $s^2 = t^2 = a$. Zunächst gilt $a = 0$ genau dann, wenn $s = t = 0$. Ist $a > 0$, so müssen auch $s, t > 0$ sein. In diesem Fall schreiben wir

$$0 = a - a = s^2 - t^2 = (s-t)(s+t).$$

Da $s + t > 0$ ist, muss $s - t = 0$, d.h. $s = t$ gelten. □

**Vorsicht.** (i) Für $a > 0$ ist mit $\sqrt{a}$ immer die positive Wurzel von $a$ gemeint. Die Gleichung $s^2 = a$ hat jedoch für $a > 0$ genau zwei Lösungen, nämlich $\sqrt{a}$ und $-\sqrt{a}$, denn

$$s^2 - a = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (s - \sqrt{a})(s + \sqrt{a}) = 0.$$

(ii) Mit einer Variante des Heron-Verfahrens kann man für $k \in \mathbb{N}, k \geq 3$ auch die Existenz der $k$-ten Wurzel $\sqrt[k]{a}$ zeigen. Dies machen wir später aber auch noch auf anderem Wege.

## 4.4. Teilfolgen und der Satz von Bolzano-Weierstraß

Obwohl nicht jede Folge konvergent ist, hat zumindest jede beschränkte Folge eine konvergente Teilfolge. Dies werden wir in diesem Abschnitt als weitere Folgerung aus dem Monotoniekriterium ableiten.

**Definition 4.4.1.** Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge und $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge natürlicher Zahlen mit $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$, so heißt $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ eine **Teilfolge** von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Diese entsteht also, indem man die Folge

$$(a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots)$$

von links nach rechts durchläuft und gewisse Glieder für die neue Folge herauspickt.

**Beispiel 4.4.2.** Es ist $(1/k^2)_{k\in\mathbb{N}} = (1, 1/4, 1/9, \ldots)$ eine Teilfolge der Folge

$$(1/n)_{n\in\mathbb{N}} = (1, 1/2, 1/3, 1/4, 1/5, 1/6, 1/7, 1/8, 1/9, 1/10, \ldots).$$

In der Notation von oben hat man hier also $n_k = k^2$ gewählt. **Quiz:** Nennen sie Teilfolgen der Folge $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Mittels Teilfolgen kann man sehr schnell zeigen, dass eine Folge nicht konvergiert.

**Proposition 4.4.3.** Es sei $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ eine konvergente Folge mit $\lim_{n\to\infty} a_n = a$. Dann ist auch jede Teilfolge von $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ konvergent und konvergiert gegen $a$.

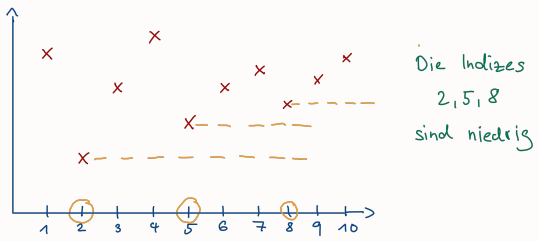
**Beweis.** Übung. □

**Beispiel 4.4.4.** Mit der vorherigen Proposition erhalten wir sofort einen neuen Beweis, dass die Folge $((-1)^n)_{n=1}^{\infty}$ divergiert, denn die konstanten Folgen $(1, 1, 1, \ldots)$ und $(-1, -1, -1, \ldots)$ sind Teilfolgen dieser Folge mit unterschiedlichen Grenzwerten.

Da wir wissen, dass beschränkte **monotone** Folgen konvergieren, ist das folgende Lemma sehr hilfreich.

**Lemma 4.4.5.** Jede Folge $(a_n)$ besitzt eine monotone (also monoton wachsende oder monoton fallende) Teilfolge.

**Beweis.** Nenne einen Index $n \in \mathbb{N}$ niedrig, falls $a_n \leq a_k$ für alle $k \geq n$, d.h. keines der auf $a_n$ folgenden Glieder der Folge ist kleiner als $a_n$.




Dann können zwei Fälle eintreten:

**1. Fall:** Es gibt unendlich viele niedrige Indices $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$ Dann ist $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend.

**2. Fall:** Es gibt nur endlich viele oder gar keine niedrige Indices. Ist dann $N \in \mathbb{N}$ der größte niedrige Index (bzw. $N = 0$, falls keine existieren), so setze $n_1 = N + 1$. Dann existiert $n_2 > n_1$ mit $a_{n_1} > a_{n_2}$, da $n_1$ nicht niedrig ist. Aber auch $n_2$ ist nicht niedrig, d.h. es existiert $n_3 > n_2$ mit $a_{n_2} > a_{n_3}$ usw. Dies liefert eine monoton fallende Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$. □

Der folgende unscheinbare Satz ist einer der wichtigsten Sätze der Analysis.

**Satz 4.4.6** (Bolzano-Weierstraß). [a] Jede beschränkte (d.h. nach oben und unten beschränkte) Folge $(a_n)$ besitzt eine konvergente Teilfolge.

[a] nach Bernard Bolzano (1781-1848), Karl Weierstraß (1815-1897).

**Beweis.** Laut vorherigem Lemma existiert eine monotone Teilfolge von $(a_n)$, die wegen Satz 4.3.4 dann konvergieren muss. □

**Beachte.** (i) Für konkrete beschränkte Folgen ist es oft leicht, konvergente Teilfolgen zu finden (die Folge $((-1)^n)$ besitzt z.B. die konvergente konstante Teilfolge $(1, 1, 1 \ldots)$). Das Besondere am Satz von Bolzano-Weierstraß ist, dass man auf die Existenz einer konvergenten Teilfolge schließen kann, ohne konkrete Informationen über die beschränkte Ausgangsfolge zu haben.

(ii) Der Satz von Bolzano-Weierstraß sieht unscheinbar aus, ist aber von größter Wichtigkeit. Zum Beispiel werden wir folgende Resultate letztlich auf ihn zurückführen:

- die Tatsache, dass eine stetige Funktion auf einem Intervall $[a, b]$ stets beschränkt ist und ihr Maximum und Minimum annimmt,

- die für die Kurvendiskussion so wichtige Aussage, dass aus $f' \geq 0$ folgt, dass die Funktion $f$ monoton wächst. —Ende VL 17—

## 4.5. Ein kurzer Blick auf Reihen

In diesem Abschnitt wollen wir uns noch eine Anwendung des Monotoniekriteriums für sogenannte Reihen ansehen. Hierbei geht es um die Frage, ob man für eine gegebene Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ der unendlichen Summe

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots$$

einen Sinn geben kann.

**Definition 4.5.1.** Sei $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ eine Folge. Für $n \in \mathbb{N}$ nennt man

$$s_n := \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

deren $n$-**te Partialsumme**. Die Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dieser Partialsummen nennt man **Reihe mit den Gliedern** $a_k$ und notiert sie mit dem Symbol

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k := (s_n)_{n=1}^{\infty}.$$

Konvergiert diese Reihe, d.h. die Folge $(s_n)_{n=1}^{\infty}$, so bezeichnet man auch ihren Grenzwert mit $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ und nennt diesen die **Summe** der Reihe.

**Vorsicht.** Das Symbol $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ hat also zwei Bedeutungen. Es steht für

(i) die Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}} = (\sum_{k=1}^{n} a_k)_{n=1}^{\infty}$ der Partialsummen,

(ii) den Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k = \lim_{n\to\infty} (a_1 + a_2 + \dots + a_n),$$

**falls** dieser existiert.

**Beispiel 4.5.2.** Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k$ hat die Partialsummen

$$s_1 = -1, \quad s_2 = -1 + 1 = 0, \quad s_3 = -1 + 1 - 1 = -1$$

und allgemein

$$s_n = \begin{cases} -1, & \text{falls } n \text{ ungerade} \\ 0, & \text{falls } n \text{ gerade .} \end{cases}$$

Da der Grenzwert $\lim_{n\to\infty} s_n$ nicht existiert, ist die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k = (s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ also nicht konvergent. **Mit anderen Worten:** Man kann der unendlichen Summe

$$-1+1-1+1\mp\ldots$$

keinen sinnvollen Wert zuordnen (vergleiche mit Beispiel 1.3.1 aus dem Anfangskapitel).

Schauen wir nun auf eine der wichtigsten Reihen, die sogenannte **geometrische Reihe**

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k$$

mit $x \in \mathbb{R}$ (d.h. auf die zur geometrischen Folge $(x^k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ zugehörige Reihe). Deren Partialsummen

$$s_n := \sum_{k=0}^{n} x^k = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n$$

nennt man auch **geometrische Summen**.

**Vorsicht.** Natürlich kann man bei einer Reihe, wie eben hier, auch bei einem anderen Startindex (außer $k = 1$) anfangen zu summieren. Die Partialsummen ändern sich dann entsprechend.

**Satz 4.5.3.** Es sei $x \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}_0$.

(i) Für die geometrischen Summen gilt

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} x^k = \begin{cases} \frac{1-x^{n+1}}{1-x}, & \text{falls } x \neq 1, \\ n+1, & \text{falls } x = 1. \end{cases}$$

(ii) Die geometrische Reihe ist für $|x| < 1$ konvergent mit

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$$

und divergiert für $|x| \geq 1$.

**Beweis.** (i) Dies ist trivial für $x = 1$, da dort in der Summe $(n+1)-$mal die

1 aufaddiert wird. Für $x \neq 1$ wurde die Formel in Aufgabe 21 per Induktion bewiesen. Alternativ kann man auch wie folgt rechnen:

$$\begin{aligned}(1+x+x^2+\ldots+x^n)\cdot(1-x) = 1+x+x^2+\ldots+x^n \\ -x-x^2-\ldots-x^n-x^{n+1}.\end{aligned}$$

Bei dieser Differenz bleibt gerade $1-x^{n+1}$ übrig.

(ii) Ist $|x|<1$, so gilt $x^{n+1} = x\cdot x^n \overset{n\to\infty}{\to} 0$ (vergleiche Beispiel 4.2.16). Aus den Folgenrechenregeln und Teil (i) folgt also

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1-x^{n+1}}{1-x} = \frac{1}{1-x}.$$

Dass die Reihe im Falle $|x|\geq 1$ divergiert, folgt genauso aus Teil (i). □

Betrachten wir ein paar Anwendungen dieses Satzes.

**Beispiel 4.5.4.** (i) Für $x=\pm\frac{1}{2}$ erhalten wir die Formeln:

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^k &= 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2,\\ \sum_{k=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^k &= 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}\pm\ldots = \frac{1}{1+\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}.\end{aligned}$$

(ii) Ist $0.999999\ldots =: 0.\overline{9} < 1$ ? Antwort: **Nein!**

**Beweis:**

$$\begin{aligned}0.9 &= 9\cdot\frac{1}{10},\\ 0.99 &= 9\cdot\frac{1}{10}+9\cdot\left(\frac{1}{10}\right)^2\\ 0.999 &= 9\cdot\frac{1}{10}+9\cdot\left(\frac{1}{10}\right)^2+9\cdot\left(\frac{1}{10}\right)^3\\ &\vdots\\ 0.999\ldots &= 9\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{10}\right)^k = 9\cdot\left(\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{10}\right)^k-\left(\frac{1}{10}\right)^0\right)\\ &= 9\cdot\left(\frac{1}{1-\frac{1}{10}}-1\right) = 9\cdot\frac{1}{9} = 1.\end{aligned}$$

(iii) Nun können wir auch endlich das Paradoxon von Achilles und der Schildkröte aus der Einleitung auflösen: Zenon betrachtete die Position der Läufer nach der 1. Sekunde, nach $1 + \frac{1}{10}$ Sekunden, nach $1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100}$ Sekunden, usw. Dabei ist die Schildkröte stets vor dem Läufer. Allerdings gilt

$$1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^k = \frac{1}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{10}{9}.$$

D.h. Zenon beschreibt uns nur die ersten 10/9 Sekunden des Rennens und nach dieser Zeit wird Achilles die Schildkröte einholen.

Für die meisten Reihen kann man nicht sofort sagen, ob und, wenn ja, gegen welchen Wert sie konvergieren. Wir benötigen daher hinreichende und notwendige Kriterien für die Reihenkonvergenz.

**Proposition 4.5.5** (Notwendiges Kriterium für Reihenkonvergenz). Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ sei konvergent. Dann bilden die **Glieder** der Reihe **eine Nullfolge**, d.h. $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$.

**Beweis.** Sei $s := \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ und $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ die $n$-te Partialsumme der Reihe. Nach Voraussetzung ist die Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent mit $s_n \to s$ für $n \to \infty$. Da auch $s_{n-1} \to s$ für $n \to \infty$, folgt damit aus den Folgenrechenregeln, dass

$$a_n = s_n - s_{n-1} \to s - s = 0 \quad \text{für } n \to \infty.$$

□

**Beispiel 4.5.6.** Die Reihen $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k$ und $\sum_{k=0}^{\infty} x^k$ mit $|x| \geq 1$ erfüllen das notwendige Konvergenzkriterium nicht. Wir erhalten also einen weiteren Beweis für die Divergenz dieser Reihen.

**Vorsicht.** Die Bedingung $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$ ist notwendig, aber **nicht hinreichend** für die Konvergenz der Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, wie das nächste Beispiel zeigt.

**Beispiel 4.5.7** (Harmonische Reihe). Die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$$

nennt man die **harmonische Reihe**. Hier gilt zwar $\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} = 0$, aber die Reihe

divergiert bestimmt gegen $\infty$, d.h.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}\right) = \infty.^{a}$$

Schauen wir uns zum Beweis ein paar spezielle Partialsummen an:

$$\begin{aligned}
s_2 = \sum_{k=1}^{2} \frac{1}{k} &= 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \\
s_4 = \sum_{k=1}^{4} \frac{1}{k} &= 1 + \frac{1}{2} + (\frac{1}{3} + \frac{1}{4}) > \frac{3}{2} + 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{4}{2} \\
s_8 = \sum_{k=1}^{8} \frac{1}{k} &= (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}) + (\frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{8}) > \frac{4}{2} + 4 \cdot \frac{1}{8} = \frac{5}{2}.
\end{aligned}$$

Beachtet man, dass $2 = 2^1, 4 = 2^2, 8 = 2^3$, so erkennt man die allgemeine Abschätzung

$$s_{2^n} = \sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{k} > \frac{n+2}{2}, \quad n \in \mathbb{N},$$

welche man nun per Induktion beweisen könnte. Dies zeigt, dass die Folge der Partialsummen der harmonischen Reihe unbeschränkt ist und somit nicht konvergiert.

—Ende VL 18—

[a] Allerdings divergiert die Reihe sehr langsam, z.B. gilt

$$\sum_{k=1}^{1.000.000} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{1.000.000} \approx 14,39.$$

Würde man also per Hand oder per Computer testen, ob die Reihe konvergiert oder divergiert, könnte man leicht auf eine falsche Idee gebracht werden.

Als nächstes wollen wir ein hinreichendes Kriterium für die Reihenkonvergenz besprechen. Die folgende Bemerkung wird dabei hilfreich sein.

**Beachte.** Ist $k_0 \in \mathbb{N}, k_0 \geq 2$, so gilt

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ ist konvergent} \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{k=k_0}^{\infty} a_k \text{ ist konvergent.}$$

In der Tat, die beiden Reihen unterscheiden sich nur um endlich viele Glieder.

Etwas genauer: sind

$$s_n := \sum_{k=1}^{n} a_k \quad \text{und} \quad s'_n := \sum_{k=k_0}^{n} a_k$$

die Partialsummen der Reihen, so unterscheiden sich diese für $n \geq k_0$ nur um die Konstante $c := \sum_{k=1}^{k_0-1} a_k = a_1 + \ldots + a_{k_0-1}$, d.h.

$$\forall n \geq k_0 : \quad s_n = s'_n + c.$$

Aber damit ist $(s_n)_{n=k_0}^{\infty}$ genau dann konvergent, wenn $(s'_n)_{n=k_0}^{\infty}$ konvergent ist.

**Satz 4.5.8** (Majorantenkriterium). Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ sei konvergent und es existiere $k_0 \in \mathbb{N}$, so dass

$$\forall k \geq k_0 : \quad 0 \leq |a_k| \leq b_k.$$

Dann ist auch die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergent. Ferner gilt

$$\left| \sum_{k=k_0}^{\infty} a_k \right| \leq \sum_{k=k_0}^{\infty} b_k.$$

Man zeigt also, dass die Beträge der Glieder der Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ durch die Glieder der konvergenten Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ majorisiert werden (d.h. nach oben abgeschätzt werden können). Man nennt daher die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ in diesem Fall auch eine **Majorante** der Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$. Man beachte, dass die $b_k$ nichtnegativ sein müssen, während die $a_k$ auch negativ sein dürfen.

**Beweis** (des Majorantenkriteriums). Nach der vorherigen Bemerkung genügt es zu zeigen, dass $\sum_{k=k_0}^{\infty} a_k$ konvergiert. Wir führen den Beweis nur für den Fall, dass $a_k \geq 0$ für alle $k \geq k_0$ (den Beweis des allgemeinen Falles finden Sie im Anhang an dieses Kapitel). In diesem Fall ist $|a_k| = a_k$, d.h. die Voraussetzung lautet, dass

$$(\star) \qquad 0 \leq a_k \leq b_k, \quad k \geq k_0.$$

Setzen wir

$$s_n(a) := \sum_{k=k_0}^{n} a_k \quad \text{und} \quad s_n(b) := \sum_{k=k_0}^{n} b_k,$$

so sind die Folgen $(s_n(a))_{n \geq k_0}$ und $(s_n(b))_{n \geq k_0}$ beide monoton wachsend (warum?) und nach Voraussetzung (und obiger Bemerkung) existiert der Grenzwert

$$M := \sum_{k=k_0}^{\infty} b_k = \lim_{n \to \infty} s_n(b).$$

Mit $(\star)$ folgt somit, dass für alle $n \geq k_0$

$$0 \leq s_n(a) = \sum_{k=k_0}^{n} a_k \leq \sum_{k=k_0}^{n} b_k = s_n(b) \leq M. \qquad (\star\star)$$

Die monoton wachsende Folge $(s_n(a))_{n \geq k_0}$ ist also durch $M$ nach oben beschränkt, d.h. aus dem Monotoniekriterium folgt, dass

$$\sum_{k=k_0}^{\infty} a_k = \lim_{n \to \infty} s_n(a)$$

existiert. Aus $(\star\star)$ folgt schließlich mit der Monotonie der Grenzwertbildung, dass

$$0 \leq \sum_{k=k_0}^{\infty} a_k \leq \sum_{k=k_0}^{\infty} b_k.$$

□

**Beispiel 4.5.9.** Bekanntlich steht die Dezimalzahl 123,456 als Abkürzung für

$$1 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^0 + 4 \cdot 10^{-1} + 5 \cdot 10^{-2} + 6 \cdot 10^{-3}.$$

Allgemeiner steht die Dezimalzahl

$$z_{-m}\, z_{-m+1} \ldots z_{-1}\, z_0\,,\, z_1\, z_2\, z_3 \ldots$$

mit $z_k \in \{0, 1, \ldots, 9\}$ für $k \geq -m$, als Abkürzung für die reelle Zahl

$$z_{-m} \cdot 10^m + z_{-m+1} \cdot 10^{m-1} + \ldots + z_0 \cdot 10^0 + \sum_{k=1}^{\infty} z_k \cdot 10^{-k}.$$

Hier muss man jedoch aufpassen, denn ist die auftauchende Reihe überhaupt konvergent? Ja, dies folgt aus dem Majorantenkriterium, denn es gilt

$$0 \leq z_k \cdot 10^{-k} \leq 9 \cdot 10^{-k} \leq 10 \cdot 10^{-k} = \frac{1}{10^{k-1}}, \quad k \in \mathbb{N},$$

und die geometrische Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^{k-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^{n}$$

konvergiert, denn es gilt $0 < \frac{1}{10} < 1$.

**Beachte.** Man kann zeigen, dass sich jede reelle Zahl als Dezimalzahl darstellen lässt. Die Darstellung muss nicht eindeutig sein, z.B. gilt $1 = 1,000\ldots = 0,999\ldots$ Schließt man aber Darstellungen mit 9er Perioden aus, ist die Darstellung eindeutig.

Zum Abschluss dieses Abschnitts wollen wir einen Blick auf die Exponentialreihe werfen, d.h. auf die unendliche Summe

$$\frac{x^0}{0!} + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \ldots$$

**Satz 4.5.10.** Die sogenannte **Exponentialreihe**

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

ist für jedes $x \in \mathbb{R}$ konvergent.

Bevor wir zum Beweis des Satzes kommen, nutzen wir die Exponentialreihe, um die Exponentialfunktion zu definieren.

**Definition 4.5.11.** Die Funktion

$$\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \exp(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

wird **Exponentialfunktion** genannt. Ferner heißt

$$e := \exp(1) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$$

die **Eulersche Zahl**.

**Beachte.** (i) Es gilt

$$e = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \ldots = 2,71828\ldots$$

(ii) Man kann zeigen (machen wir unten), dass

$$\forall n \in \mathbb{Z} : \quad \exp(n) = e^n.$$

Deshalb nennt man die Exponentialfunktion manchmal auch **Exponentialfunktion zur Basis** $e$.

(iii) Ohne Beweis sei erwähnt, dass für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\exp(x) = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \quad \text{also auch} \quad e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

—Ende VL 19—

**Beweis** (von Satz 4.5.10). Wir wissen aus Beispiel 4.2.18, dass für jedes $c > 1$ gilt, dass

$$\frac{c^k}{k!} \overset{k\to\infty}{\to} 0.$$

Selbstverständlich gilt dies auch für $0 \le c \le 1$ (warum?). Ist nun $x \in \mathbb{R}$ beliebig, so gilt also (mit $c := 2\,|x|$) insbesondere, dass

$$\frac{(2\,|x|)^k}{k!} \overset{k\to\infty}{\to} 0.$$

Also existiert ein $k_0 \in \mathbb{N}$, so dass

$$\forall k \ge k_0: \quad 0 \le \frac{(2\,|x|)^k}{k!} \le 1.$$

Umformen liefert

$$\forall k \ge k_0: \quad 0 \le \left|\frac{x^k}{k!}\right| \le \left(\frac{1}{2}\right)^k.$$

Da die geometrische Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^k$$

konvergiert, liefert das Majorantenkriterium die Konvergenz von $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}$. □

Eine fundamentale Eigenschaft der Exponentialfunktion ist, dass

$$\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y), \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

Diese Gleichung wird auch **Funktionalgleichung** genannt. Aus der Schule kennen Sie diese schon aus der Potenzregel $e^{x+y} = e^x e^y$, welche wir später aus der Funktionalgleichung ableiten werden. Um die Funktionalgleichung beweisen zu können, benötigen wir zwei weitere Resultate über Reihen.

**Proposition 4.5.12.** (i) Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ sei **absolut konvergent**, d.h. die zugehörige Betragsreihe $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$ sei konvergent. Dann ist auch die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ selbst konvergent.

(ii) Die Reihen $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ seien absolut konvergent. Dann konvergiert auch die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \right)$$

(sogar absolut) und es gilt

$$(\star) \qquad \left( \sum_{k=0}^{\infty} a_k \right) \cdot \left( \sum_{k=0}^{\infty} b_k \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \right).$$

Man nennt die Formel $(\star)$ auch das **Cauchy-Produkt** von Reihen.

**Beweis.** Teil (i) folgt sofort aus dem Majorantenkriterium mit der Wahl $b_k := |a_k|$. Auf den Beweis von Teil (ii) verzichten wir. □

**Beachte.** (a) In der Übung werden Sie zeigen, dass die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ konvergiert. Daher ist die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2}$ absolut konvergent, denn

$$\left| \frac{(-1)^k}{k^2} \right| = \frac{1}{k^2},$$

und daher nach Teil (i) auch konvergent.

(b) Die Umkehrung von Teil (i) gilt nicht, d.h. nicht jede konvergente Reihe ist auch absolut konvergent. Zum Beispiel kann man zeigen, dass die alternierende harmonische Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k/k$ konvergiert, während die zugehörige Betragsreihe (die harmonische Reihe) $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k$ bekanntlich divergiert.

(c) Man mache sich klar, was die Formel $(\star)$ bedeutet: Um das Produkt

$$(a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \ldots) \cdot (b_0 + b_1 + b_2 + b_3 + \ldots)$$

auszurechnen, muss jeder Summand in der ersten Klammer mit jedem Summanden in der zweiten Klammer multipliziert und anschließend aufsummiert werden. In anderen Worten, alle Einträge in folgender Tabelle müssen addiert werden.

| $\cdot$ | $a_0$ | $a_1$ | $a_2$ | $a_3$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $b_0$ | $a_0 b_0$ | $a_1 b_0$ | $a_2 b_0$ | $a_3 b_0$ | $\cdots$ |
| $b_1$ | $a_0 b_1$ | $a_1 b_1$ | $a_2 b_1$ | $a_3 b_1$ | $\cdots$ |
| $b_2$ | $a_0 b_2$ | $a_1 b_2$ | $a_2 b_2$ | $\cdots$ | |
| $b_3$ | $a_0 b_3$ | $a_1 b_3$ | $\cdots$ | | |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | | | |

Die Formel $(\star)$ besagt nun, dass man diagonal aufsummieren darf, d.h.

$$(a_0 + a_1 + a_2 + \ldots) \cdot (b_0 + b_1 + b_2 + \ldots) = a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0) + \ldots$$

| $\cdot$ | $a_0$ | $a_1$ | $a_2$ | $a_3$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $b_0$ | $a_0 b_0$ | $a_1 b_0$ | $a_2 b_0$ | $a_3 b_0$ | $\cdots$ |
| $b_1$ | $a_0 b_1$ | $a_1 b_1$ | $a_2 b_1$ | $a_3 b_1$ | $\cdots$ |
| $b_2$ | $a_0 b_2$ | $a_1 b_2$ | $a_2 b_2$ | $\cdots$ | |
| $b_3$ | $a_0 b_3$ | $a_1 b_3$ | $\cdots$ | | |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | | | |

**Satz 4.5.13.** Die Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ hat folgende Eigenschaften:

(i) Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt die **Funktionalgleichung**

$$\exp(x + y) = \exp(x) \exp(y).$$

(ii) Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\exp(x) > 0 \quad \text{und} \quad \exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}.$$

(iii) Für alle $k \in \mathbb{Z}$ gilt $\exp(k) = e^k$.

(iv) exp ist streng monoton wachsend:

$$\forall x, y \in \mathbb{R} : \quad x < y \quad \Rightarrow \quad \exp(x) < \exp(y).$$

(v) Es gilt

$$\lim_{n \to \infty} \exp(n) = \infty \quad \text{und} \quad \lim_{n \to \infty} \exp(-n) = 0.$$

**Beweis.** Wir beweisen nur die Funktionalgleichung, d.h. Teil (i). Die anderen Teile sind direkte Folgerungen hieraus und werden in den Übungen bewiesen.

Zunächst beobachten wir dazu, dass für $x \in \mathbb{R}$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left| \frac{x^k}{k!} \right| = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|x|^k}{k!} = \exp(|x|),$$

d.h. die Exponentialreihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ konvergiert für jedes $x \in \mathbb{R}$ sogar absolut. Damit

ergibt sich für $x, y \in \mathbb{R}$ aus Proposition 4.5.12, dass

$$\exp(x)\exp(y) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}\right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^k}{k!}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \cdot \frac{y^{n-k}}{(n-k)!}\right).$$

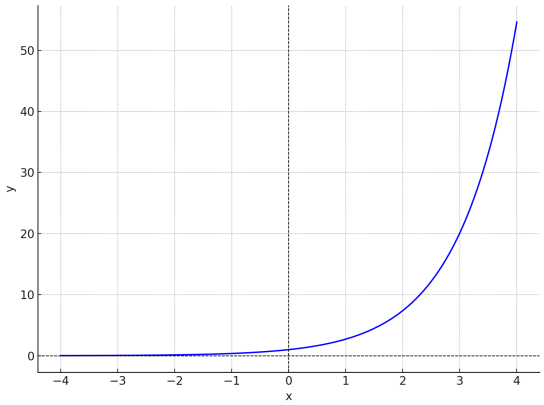
Aber es gilt

$$\frac{x^k}{k!} \cdot \frac{y^{n-k}}{(n-k)!} = \frac{1}{n!} \cdot \binom{n}{k} \cdot x^k \cdot y^{n-k},$$

d.h. wir erhalten mit Hilfe des Binomischen Lehrsatzes (Satz 2.5.4), dass

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \cdot \frac{y^{n-k}}{(n-k)!}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(x+y)^n = \exp(x+y).$$

□




*Graph der Exponentialfunktion* $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

—Ende VL 20—

## — Zusatzmaterial —

**Zusatz** (Fehlende Teile des Beweises von Satz 4.3.5). Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist definiert durch die Rekursionsvorschrift

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{a}{a_n}\right), \quad n \in \mathbb{N}_0$$

mit $a_0 > 0$ beliebig. Wir zeigen in drei Schritten, dass die Folge positive Glieder hat und monoton fällt.

(S1) Es gilt $a_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$: Dies beweisen wir per Induktion. Offensichtlich gilt die Aussage für $n = 0$, da $a_0 > 0$ nach Voraussetzung. Nun gelte $a_n > 0$ für ein beliebiges $n \in \mathbb{N}_0$

(Induktionsvoraussetzung). Es ist zu zeigen, dass auch $a_{n+1} > 0$ gilt. Aber dies ist klar, denn aus der Definition von $a_{n+1}$ folgt mit der Induktionsvoraussetzung wegen $a \geq 0$ auch

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{a}{a_n}\right) > 0.$$

(S2) Es gilt $a_{n+1}^2 \geq a$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$: Tatsächlich folgt direkt aus der Definition

$$\begin{aligned} a_{n+1}^2 - a &= \frac{1}{4}\left(a_n + \frac{a}{a_n}\right)^2 - a = \frac{1}{4}\left(a_n^2 + 2a_n\frac{a}{a_n} + \frac{a^2}{a_n^2}\right) - a \\ &= \frac{(a_n^2 + 2a + \frac{a^2}{a_n^2}) - 4a}{4} = \frac{(a_n^2 - 2a + \frac{a^2}{a_n^2})}{4} \\ &= \frac{1}{4}\left(a_n^2 - 2a_n\frac{a}{a_n} + \frac{a^2}{a_n^2}\right) = \frac{1}{4}\left(a_n - \frac{a}{a_n}\right)^2 \geq 0. \end{aligned}$$

(S3) Es gilt $a_{n+1} \leq a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$: Für den Beweis benutzen wir die Definition der Folge und den zweiten Beweisschritt.

$$a_n - a_{n+1} = a_n - \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{a}{a_n}\right) = \frac{1}{2}\left(a_n - \frac{a}{a_n}\right) = \frac{1}{2a_n}\left(a_n^2 - a\right) \overset{(S2)}{\geq} 0.$$

**Zusatz** (Fehlender Teil des Beweises von Satz 4.5.8)**.** Nachdem wir das Majorantenkriterium im Falle $a_k \geq 0$ schon bewiesen haben, betrachten wir noch den allgemeinen Fall. Hierzu führen wir zwei **nichtnegative** Hilfsfolgen ein, nämlich

$$a_k^+ := \max\{a_k, 0\} \qquad \text{und} \qquad a_k^- := \max\{-a_k, 0\}.$$

Dann gilt[a]

$$a_k = a_k^+ - a_k^-$$

und (wegen $|a_k| = \max\{a_k, -a_k\} = a_k^+ + a_k^-$) auch

$$0 \leq a_k^\pm \leq |a_k| \leq b_k.$$

Nach dem schon bewiesenen Teil des Majorantenkriteriums konvergieren also die Reihen $\sum_{k=1}^\infty a_k^+$ und $\sum_{k=1}^\infty a_k^-$. Aber mit den Folgenrechenregeln existiert dann auch

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^\infty a_k &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^n a_k \\ &= \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^n a_k^+ - \sum_{k=1}^n a_k^-\right) \\ &= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^n a_k^+ - \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^n a_k^- = \sum_{k=1}^\infty a_k^+ - \sum_{k=1}^\infty a_k^-. \end{aligned}$$

[a] Man mache sich dies am Beispiel $a_k = -4$ klar: hier gilt $a_k^+ = \max\{-4, 0\} = 0$ und $a_k^- = \max\{-(-4), 0\} = 4$, also

$$-4 = a_k = a_k^+ - a_k^- \quad \text{und} \quad 4 = |a_k| = a_k^+ + a_k^-.$$

# 5. Reelle Funktionen

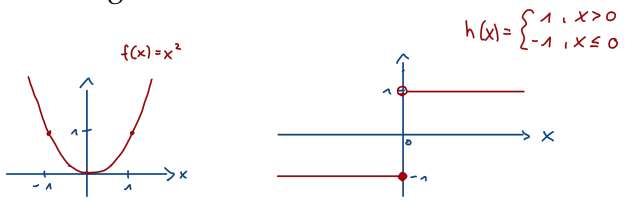
In diesem Abschnitt wollen wir uns mit reellen Funktionen $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ beschäftigen und insbesondere klären, was Stetigkeit und Differenzierbarkeit solcher Funktionen bedeutet.

## 5.1. Stetigkeit

In der Schule lernt man eventuell, dass eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig heißt, wenn man ihren Graphen „ohne Absetzen“ durchzeichnen kann, oder gleichbedeutend, wenn die Funktion „keine Sprünge“ macht. Damit wäre der Anschauung nach zum Beispiel die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2$ stetig, die Funktion

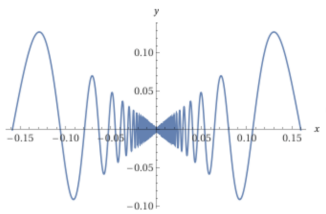
$$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad h(x) = \begin{cases} 1, & \text{falls } x > 0, \\ -1, & \text{falls } x \leq 0. \end{cases}$$

aber nicht. Diese ist unstetig an der Stelle $x = 0$.




Leider ist es jedoch manchmal schwierig, den Graphen einer Funktion zu zeichnen, wie zum Beispiel bei der Funktion

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad g(x) = \begin{cases} x \cdot \sin(1/x), & \text{falls } x \neq 0, \\ 0, & \text{falls } x = 0. \end{cases}$$



Noch schlimmer ist es bei der Dirichletschen[1] Sprungfunktion

$$d : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad d(x) = \begin{cases} 1, & \text{falls } x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{falls } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Sollte man so eine Funktion dann stetig oder unstetig nennen? Sie merken an diesen Beispielen, dass der obige intuitive Stetigkeitsbegriff nicht ausreicht und eine genaue mathematische Definition vonnöten ist. Hierbei sollte die Stetigkeit von $f : D \to \mathbb{R}$ in $p \in D$ so definiert sein, dass folgender Gedanke präzise ausgedrückt wird:

> *Wenn sich $x$ der Zahl $p$ annähert, soll sich der Funktionswert $f(x)$ der Zahl $f(p)$ annäheren.*

Dies entspricht gerade unserer Vorstellung, dass die Funktion nicht springt bzw. dass wir beim Zeichnen des Graphen den Stift nicht absetzen müssen. Ein geeigneter Weg, diesen Gedanken mathematisch auszudrücken, bedient sich der Folgenkonvergenz.

**Definition 5.1.1.** Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ und $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion.

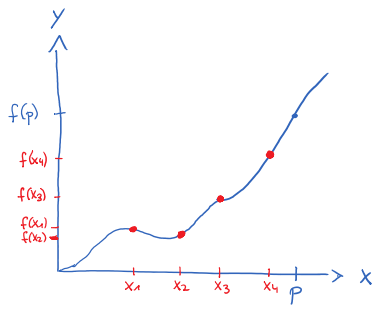
(i) $f$ heißt **stetig im Punkt** $p \in D$, falls für **jede** Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ im Definitionsbereich $D$ die folgende Implikation gilt:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = p \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(p).$$

(ii) $f$ heißt **unstetig** in $p \in D$, falls sie dort nicht stetig ist.

(iii) $f$ heißt **stetig auf D** oder einfach **stetig**, falls sie in jedem $p \in D$ stetig ist.

Stetigkeit von $f$ in $p \in D$ bedeutet also: Laufen wir im Definitionsbereich von $f$ mit einer Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf den Punkt $p$ zu, so muss die Bildfolge $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ im Wertebereich auf den Bildpunkt $f(p)$ zulaufen. Und dies muss für **jede** im Definitionsbereich gegen $p$ laufende Folge gelten, d.h. egal wie unser Argument $x$ sich $p$ annähert, die zugehörigen Bildpunkte $f(x)$ laufen gegen $f(p)$.




[1] Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805-1859).

**Vorsicht.** (i) Es macht keinen Sinn, über Stetigkeit/Unstetigkeit einer Funktion in einem Punkt zu sprechen, in dem sie nicht definiert ist. Zum Beispiel werden wir später zeigen, dass die Funktion $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{x}$ in jedem Punkt ihres Definitionsbereichs stetig ist!

(ii) Die Stetigkeit einer Funktion in $p \in D$ ist eine *lokale Eigenschaft*, d.h. sie hängt nur vom Verhalten der Funktion in unmittelbarer Nähe von $p$ ab. Eine Funktion kann in einigen Punkten des Definitionsbereichs stetig sein und in anderen nicht.

**Beispiel 5.1.2.** a) Die einfachsten stetigen Funktionen sind **konstante Funktionen**

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = c$$

mit $c \in \mathbb{R}$ fest.

**Beweis der Stetigkeit:** Sei $p \in \mathbb{R}$ und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}$ mit $\lim_{n\to\infty} x_n = p$. Es ist zu zeigen, dass $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(p)$. Aber dies folgt sofort aus $f(x_n) = c = f(p)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

b) Auch die **Identitätsfunktion** auf $\mathbb{R}$, d.h. $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g(x) = x$ ist stetig.

**Beweis:** Sei $p \in \mathbb{R}$ und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}$ mit $\lim_{n\to\infty} x_n = p$. Es ist zu zeigen, dass $\lim_{n\to\infty} g(x_n) = g(p)$. Aber dies ist klar, denn nach Voraussetzung gilt

$$g(x_n) = x_n \overset{n\to\infty}{\to} p = g(p).$$

(c) Die **Betragsfunktion** $b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, b(x) = |x|$ ist ebenfalls stetig.

**Beweis:** Sei $p \in \mathbb{R}$ und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}$ mit $\lim_{n\to\infty} x_n = p$. Es ist zu zeigen, dass $\lim_{n\to\infty} b(x_n) = b(p)$. Hierzu nutzen wir die umgekehrte Dreiecksungleichung (siehe Satz 4.1.2), die zeigt, dass

$$|b(x_n) - b(p)| = \Big| |x_n| - |p| \Big| = \Big| |x_n| - |-p| \Big| \leq |x_n - p| .$$

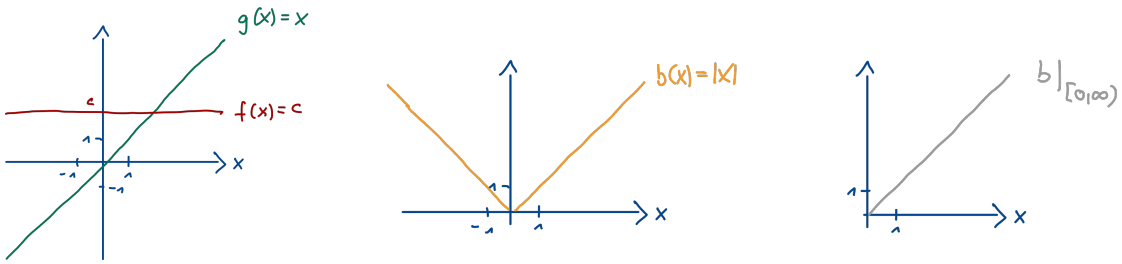
Da $\lim_{n\to\infty} x_n = p$, folgt aus dem Sandwichprinzip, dass

$$\lim_{n\to\infty} (b(x_n) - b(p)) = 0, \qquad \text{d.h. } \lim_{n\to\infty} b(x_n) = b(p).$$

(d) Ist $f : D \to \mathbb{R}$ stetig und $B \subseteq D$, so ist auch die **Einschränkung**

$$f|_B : B \to \mathbb{R}, \quad f|_B(x) := f(x)$$

weiter stetig. **Quiz:** Warum ist dies klar?




*Die Funktionen aus dem vorherigen Beispiel.*

Schauen wir uns nun ein paar Funktionen mit Unstetigkeiten an.

**Beachte.** Um zu zeigen, dass eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ im Punkt $p \in D$ unstetig ist, genügt es **eine** Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $D$ zu finden, so dass zwar $x_n \to p$, **aber**

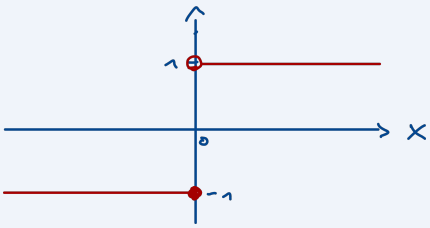
(i) $\lim_{n\to\infty} f(x_n)$ nicht existiert (die Bildpunkte nähern sich überhaupt keinem Punkt dauerhaft an), **oder**

(ii) $\lim_{n\to\infty} f(x_n) \neq f(p)$ (die Bildpunkte nähern sich dem falschen Punkt an).

**Beispiel 5.1.3.** a) Die Funktion

$$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad h(x) = \begin{cases} 1, & \text{falls } x > 0, \\ -1, & \text{falls } x \leq 0, \end{cases}$$

ist im Punkt $p = 0$ unstetig.




**1. Beweis:** Für $x_n = (-1)^n/n$ gilt zwar $x_n \to 0$ für $n \to \infty$, aber für die Bildfolge gilt $h(x_n) = (-1)^n$ (Warum?). Der Grenzwert $\lim_{n\to\infty} h(x_n)$ existiert also nicht!

**2. Beweis:** Für $x_n = 1/n$ gilt zwar $x_n \to 0$ für $n \to \infty$, aber es gilt $h(x_n) = 1$, d.h.

$$\lim_{n\to\infty} h(x_n) = 1 \neq h(0),$$

denn $h(0) = -1$.

b) **Aber Vorsicht!** Ändern wir die Funktion aus Teil a) nur leicht ab und betrachten

$$\widetilde{h} : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, \quad \widetilde{h}(x) = \begin{cases} 1, & \text{falls } x > 0, \\ -1, & \text{falls } x < 0, \end{cases}$$

so ist diese Funktion stetig, d.h. stetig in jedem $p \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ (denn sie ist in einer Umgebung von jedem solchen $p$ konstant)!

c) Die Dirichletsche Sprungfunktion

$$d : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad d(x) = \begin{cases} 1, & \text{falls } x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{falls } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

ist in jedem Punkt $p \in \mathbb{R}$ unstetig.

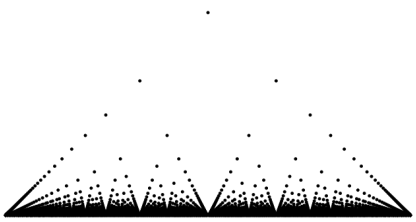
**Beweis: 1. Fall:** Sei $p \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, d.h. $d(p) = 0$. Nach Beispiel 4.2.11 existieren $x_n \in \mathbb{Q}, n \in \mathbb{N}$, mit $x_n \to p$. Es gilt insbesondere $d(x_n) = 1$ und somit

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n) = 1 \neq d(p).$$

**2. Fall:** Sei $p \in \mathbb{Q}$, d.h. $d(p) = 1$. Dann sind die Zahlen $y_n := p + \frac{\sqrt{2}}{n} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ (warum?) und $y_n \to p$. Es gilt insbesondere $d(y_n) = 0$ und somit

$$\lim_{n\to\infty} d(y_n) = 0 \neq d(p).$$

**Beachte.** Es gibt noch verrücktere Beispiele, etwa die Thomaesche Funktion. Diese ist stetig in allen irrationalen Punkten in $[0,1]$ und unstetig in allen rationalen Punkten in $[0,1]$. Ihr Graph sieht ungefähr so aus (Bildquelle: Wikipedia):



—Ende VL 21—

Um die Stetigkeit von zusammengesetzten Funktionen zu prüfen, ist das folgende Resultat sehr hilfreich.

**Satz 5.1.4.** Sei $c \in \mathbb{R}$. Sind die Funktionen $f, g : D \to \mathbb{R}$ beide stetig im Punkt $p \in D$, so sind auch die Funktionen $f + g, f - g, cf$ und $f \cdot g$ stetig in $p$. Gilt $g(x) \neq 0$ für alle $x \in D$, so ist auch die Funktion $\frac{f}{g}$ stetig in $p$.

Hierbei sind die auftretenden Funktionen punktweise definiert, d.h.

$$f+g : D \to \mathbb{R}, \quad (f+g)(x) := f(x)+g(x),$$

usw. Zum Beispiel lässt sich die Polynomfunktion $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, p(x) = 2x^2 + x$ mit Hilfe der, wie oben gezeigt, stetigen Funktionen

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = 2 \quad \text{und} \quad g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad g(x) = x$$

ausdrücken als $p(x) = f(x) \cdot g(x) \cdot g(x) + g(x)$, d.h. $p = f \cdot g \cdot g + g$. Damit ist diese Funktion nach Satz 5.1.4 stetig.

**Beweis** (von Satz 5.1.4). Dies folgt sofort aus den Folgenrechenregeln in Satz 4.2.7. Ist zum Beispiel $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $D$ mit $x_n \to p$ für $n \to \infty$, so folgt zunächst aus der Stetigkeit von $f$ und $g$ in $p$, dass

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(p) \quad \text{und} \quad \lim_{n\to\infty} g(x_n) = g(p).$$

Aber nach Satz 4.2.7 existiert dann auch $\lim\limits_{n\to\infty} (f(x_n) + g(x_n))$ und es gilt

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} (f+g)(x_n) &= \lim_{n\to\infty} (f(x_n) + g(x_n)) \\ &\overset{S.4.2.7}{=} \lim_{n\to\infty} f(x_n) + \lim_{n\to\infty} g(x_n) = f(p) + g(p) = (f+g)(p).\end{aligned}$$

Analog zeigt man die Stetigkeit der anderen Funktionen. □

**Korollar 5.1.5.** [a] Jede **Polynomfunktion** (oder kurz: jedes **Polynom**)

$$p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n, \quad x \in \mathbb{R},$$

mit Koeffizienten $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ ist stetig. Ferner ist jede **rationale Funktion**

$$r : D \to \mathbb{R}, \quad r(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

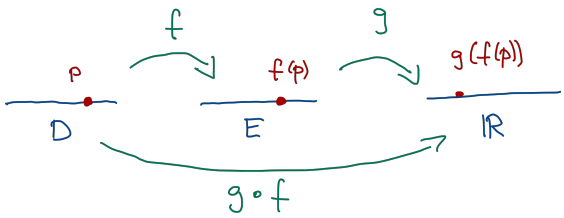
mit Polynomen $p, q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $D = \{x \in \mathbb{R} : q(x) \neq 0\}$ stetig.

[a] Ein Resultat, das eine direkte Folgerung aus einem vorangehenden Satz ist, wird in der Mathematik als Korollar bezeichnet.

**Beispiel 5.1.6.** Die rationale Funktion $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{x}$ ist stetig.

Auch Kompositionen stetiger Funktionen sind stetig.

**Satz 5.1.7.** Seien $D, E \subseteq \mathbb{R}$ und $f : D \to E$ und $g : E \to \mathbb{R}$ Funktionen. Ist $f$ stetig im Punkt $p$ und $g$ stetig im Punkt $f(p)$, so ist $g \circ f : D \to \mathbb{R}$ stetig im Punkt $p$.




**Beweis.** Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beliebige Folge in $D$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = p$. Da $f$ in $p$ stetig ist, gilt

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(p).$$

Für die Folge $y_n := f(x_n)$ gilt also $y_n \to f(p)$ für $n \to \infty$. Da $g$ im Punkt $f(p)$ stetig ist, folgt

$$\lim_{n\to\infty} g(y_n) = g(f(p)),$$

d.h. insgesamt ergibt sich

$$\lim_{n\to\infty} (g \circ f)(x_n) = \lim_{n\to\infty} g(f(x_n)) = \lim_{n\to\infty} g(y_n) = g(f(p)) = (g \circ f)(p).$$

□

**Beispiel 5.1.8.** Die Funktion $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, h(x) = |x - 2|$ ist als Verknüpfung der stetigen Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x - 2$ und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g(x) = |x|$ ebenfalls stetig.

Wir geben (zunächst ohne Beweis) noch ein paar weitere stetige Funktionen an.

**Beispiel 5.1.9.** Zu den stetigen Funktionen gehören auch

- die Wurzelfunktion $w : [0, \infty) \to [0, \infty), w(x) = \sqrt{x}$,
- die Exponentialfunktion

$$\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!},$$

- die (aus der Schule bekannten) trigonometrischen Funktionen, also sin, cos, tan, ...

## 5.2. Die Hauptsätze über stetige Funktionen

Wir wollen uns nun mit den wichtigsten Sätzen über stetige Funktionen befassen. Hierbei betrachten wir stets Funktionen auf kompakten Intervallen.

**Definition 5.2.1.** Ein Intervall der Form $[a, b]$, mit $a \leq b$, heißt **kompakt**. Diese Intervalle sind also beschränkt und beide Randpunkte sind enthalten.

**Satz 5.2.2** (Satz vom Maximum und Minimum). Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann gilt:

(i) $f$ ist beschränkt, d.h. es existiert $S \geq 0$ mit

$$\forall x \in [a, b] : \quad |f(x)| \leq S.$$

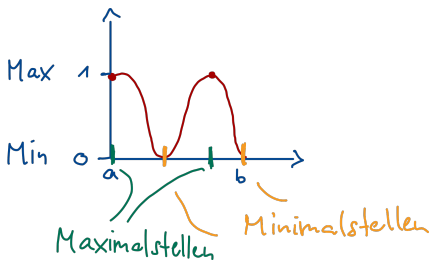
(ii) $f$ nimmt ein Maximum und ein Minimum an, d.h. es existieren $x_m, x_M \in [a, b]$ mit

$$\forall x \in [a, b] : \quad f(x_m) \leq f(x) \leq f(x_M)$$

**Beachte.** (a) Man kann die Aussage des Satzes auch so formulieren: der Wertebereich $f([a, b])$ ist beschränkt und besitzt ein Minimum und ein Maximum.

(b) Man spricht in Teil (ii) auch von globalen Maxima und Minima. Später werden wir auch noch von lokalen Maxima und Minima sprechen.

(c) Natürlich kann $f$ das Minimum bzw. Maximum an mehreren Stellen annehmen. Die Wichtigkeit des Satzes liegt darin, dass überhaupt Minimal- und Maximalstellen $x_m$ bzw. $x_M$ existieren.

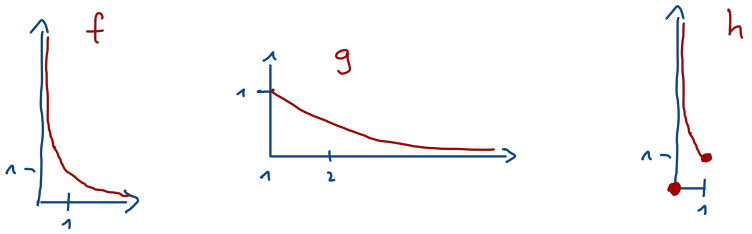



(d) Sowohl die Stetigkeit von $f$ als auch die Kompaktheit des Intervalls sind im Satz vom Maximum und Minimum notwendig:

- Die stetige Funktion $f : (0,1] \to \mathbb{R}, f(x) = 1/x$ ist nicht beschränkt und besitzt kein Maximum.
- Die stetige Funktion $g : [1,\infty) \to \mathbb{R}, g(x) = 1/x$ besitzt kein Minimum.
- Die in $p = 0$ unstetige Funktion

$$h : [0,1] \to \mathbb{R}, \quad h(x) = \begin{cases} 0, & \text{falls } x = 0 \\ \frac{1}{x}, & \text{falls } x \in (0,1], \end{cases}$$

ist nicht beschränkt und besitzt kein Maximum.




**Beweis** (des Satzes vom Maximum). (i) Da die Betragsfunktion stetig ist (siehe Beispiel 4.2.15), ist auch die Funktion

$$g : [a,b] \to [0,\infty), \quad g(x) = |f(x)|$$

als Verknüpfung stetiger Funktionen wieder stetig. Es ist zu zeigen:

$$(B) \qquad \exists S \geq 0 \quad \forall x \in [a,b] : \quad g(x) \leq S.$$

Nehmen wir einmal an, $(B)$ sei falsch (Widerspruchsbeweis). Dann würde zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $x_n \in [a,b]$ existieren, so dass

$$g(x_n) > n. \qquad (\star)$$

Aber dann ist die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt (denn $a \leq x_n \leq b$), besitzt also nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß (Satz 4.4.6) eine konvergente Teilfolge $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$. Da $a \leq x_{n_k} \leq b$ muss dann auch $x := \lim_{k\to\infty} x_{n_k} \in [a,b]$ gelten. Aufgrund der Stetigkeit von $g$ gilt dann auch $g(x) = \lim_{k\to\infty} g(x_{n_k})$, d.h. die Folge $(g(x_{n_k}))_{k\in\mathbb{N}}$ ist konvergent und somit beschränkt. Aber wegen $(\star)$ gilt

$$g(x_{n_k}) > n_k \quad \text{und} \quad \lim_{k\to\infty} n_k = \infty,$$

d.h. wir erhalten einen Widerspruch und $(B)$ muss wahr sein. —Ende VL 22—

(ii) Nach Teil (i) und dem Vollständigkeitsaxiom existiert

$$M := \sup\{f(x) \mid x \in [a,b]\} = \sup f([a,b]).$$

Insbesondere gilt

$$\forall x \in [a,b]: \quad f(x) \leq M. \qquad (\star)$$

Nehmen wir einmal an, für alle $x \in [a,b]$ gilt $f(x) < M$ (wieder ein Widerspruchsbeweis). Dann wäre $M - f(x) > 0$ für alle $x \in [a,b]$, d.h. die Funktion

$$h : [a,b] \to \mathbb{R}, \quad h(x) = \frac{1}{M - f(x)}$$

ist definiert und aufgrund von Satz 5.1.4 und Satz 5.1.7 auch stetig. Nach dem schon bewiesenen Teil (i) müsste die Funktion $h$ also auf dem kompakten Intervall $[a,b]$ beschränkt sein. Allerdings existiert nach Beispiel 4.2.12 eine Folge von Elementen $y_n \in f([a,b])$, so dass $\lim_{n\to\infty} y_n = M$. Wählen wir entsprechende $x_n \in [a,b]$ mit $y_n = f(x_n)$, folgt also

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = M.$$

Für die **beschränkte** Funktion $h$ würde dies aber implizieren, dass

$$\lim_{n\to\infty} h(x_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{M - f(x_n)} = \infty.$$

Dieser Widerspruch zeigt, dass unsere Ausgangsannahme falsch war, d.h. es muss ein $x_M \in [a,b]$ existieren, so dass $f(x_M) = M$. Mit $(\star)$ folgt also

$$\forall x \in [a,b]: \quad f(x) \leq f(x_M),$$

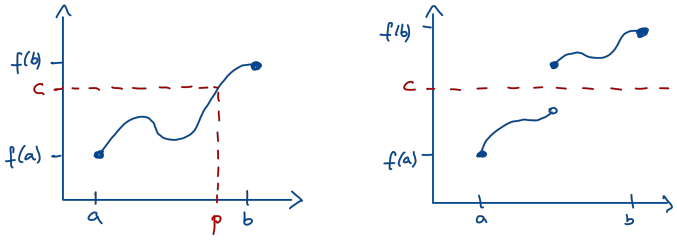
d.h. die Existenz des Maximums ist gezeigt. Die Existenz des Minimums wird ganz analog bewiesen. □

Wir kommen zu einem weiteren wichtigen Satz über stetige Funktionen auf kompakten Intervallen.

**Satz 5.2.3** (Zwischenwertsatz). Seien $a, b \in \mathbb{R}$ und $a \leq b$. Ferner sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und $c$ eine reelle Zahl zwischen $f(a)$ und $f(b)$.[a] Dann nimmt $f$ den Wert $c$ an, d.h. es existiert ein $p \in [a,b]$ mit $f(p) = c$.

[a] Es gilt also entweder $f(a) \leq c \leq f(b)$ oder $f(b) \leq c \leq f(a)$.

Dieser Satz ist anschaulich klar: Da $f$ stetig ist, kann man den Graphen zeichnen, ohne abzusetzen. Startet man unterhalb der Geraden $y = c$ und landet man oberhalb (oder umgekehrt), so muss man zwischendurch die Gerade treffen. Genauso klar ist, dass der Satz für unstetige Funktionen im Allgemeinen falsch ist.




Allerdings wissen wir auch, dass stetige Funktionen sehr kompliziert sein können und man den Graphen eventuell gar nicht zeichnen kann. Um zu zeigen, dass der Satz auch für solche komplizierteren Funktionen gilt, müssen wir ihn also formal unter Rückführung auf die Axiome beweisen.

**Beweis** (des Zwischenwertsatzes). Der Fall $c = f(a)$ oder $c = f(b)$ ist trivial, d.h. es genügt die Fälle

$$\textbf{1. Fall:} \quad \mathbf{f(a) < c < f(b)} \quad \text{und} \quad \text{2. Fall:} \quad f(b) < c < f(a)$$

zu betrachten. Wir betrachten nur Fall 1 (da Fall 2 analog funktioniert).

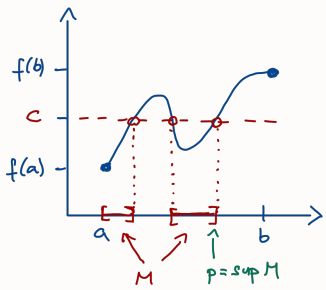
Für den Beweis sei

$$M := \{x \in [a,b] \mid f(x) \leq c\}.$$

Dann ist $a \in M$, d.h. $M \neq \emptyset$, und $M$ ist durch $b$ nach oben beschränkt. Aus dem Vollständigkeitsaxiom folgt also die Existenz von

$$p := \sup M,$$

der kleinsten oberen Schranke von $M$.




Wir zeigen nun in einigen Schritten, dass $f(p) = c$ gilt.

**1. Schritt:** Es gilt $p \in [a,b]$, d.h. $f(p)$ ist definiert.

**Beweis:** Da $a \in M$ und $p$ eine obere Schranke von $M$ ist, gilt $a \leq p$. Und da $b$ eine obere Schranke von $M$ ist, $p$ aber die kleinste obere Schranke, gilt $p \leq b$.

**2. Schritt:** Es gilt $f(p) \leq c$.

**Beweis:** Nach Beispiel 4.2.11 existiert eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Elementen von $M$ mit $x_n \to p$. Aus der Stetigkeit von $f$ folgt dann auch

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(p).$$

Aber da $x_n \in M$ folgt auch

$$f(x_n) \leq c, \qquad n \in \mathbb{N},$$

d.h. die Monotonie der Grenzwertbildung zeigt, dass

$$f(p) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) \leq c.$$

**3. Schritt:** $f(p) \geq c$, d.h. mit Schritt 2 muss $f(p) = c$ gelten.

**Beweis:** Dies ist klar, falls $p = b$, denn nach Voraussetzung gilt sogar $f(b) > c$. Es genügt also, denn Fall $a \leq p < b$ zu betrachten. Dazu sei

$$y_n := p + \frac{b-p}{n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Dann ist $p < y_n \leq b$ und $\lim_{n\to\infty} y_n = p$. Aus der Stetigkeit von $f$ folgt sofort, dass

$$\lim_{n\to\infty} f(y_n) = f(p).$$

Aber da $y_n > p$ und $p$ eine obere Schranke von $M$ ist, muss $y_n \notin M$ gelten, d.h. nach Definition von $M$ ist $f(y_n) > c$. Aus der Monotonie der Grenzwertbildung folgt also wieder

$$f(p) = \lim_{n\to\infty} f(y_n) \geq c.$$

□

Als erste Anwendung des Zwischenwertsatzes erhalten wir einen weiteren Beweis für die Existenz von Quadrat- und allgemeineren Wurzeln (vergleiche Satz 4.3.5).

**Beispiel 5.2.4.** Sei $k \in \mathbb{N}$. Dann ist die Funktion

$$g : [0,\infty) \to [0,\infty), \quad g(x) = x^k$$

bijektiv. Daraus folgt insbesondere:

- zu jedem $a \geq 0$ existiert eine eindeutige Zahl $p \geq 0$ mit $p^k = a$. Diese Zahl nennen wir die (positive) **$k$-te Wurzel** von $a$ und bezeichnen sie mit $\sqrt[k]{a}$ (bzw. einfach $\sqrt{a}$ im Falle $k = 2$).

- obiges $g$ besitzt die Umkehrfunktion[a]

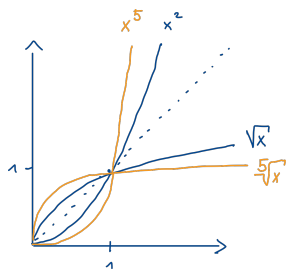
$$g^{-1} : [0, \infty) \to [0, \infty), \quad g^{-1}(x) = \sqrt[k]{x}.$$

**Beweis der Bijektivität:** Die Funktion $g$ ist streng monoton wachsend, nach Beispiel 2.3.3 (i) also injektiv. Weiterhin gilt $g(0) = 0$. Ist nun $a \in (0, \infty)$ beliebig, so gilt für die stetige Funktion

$$f : [0, a+1] \to \mathbb{R}, \quad f(x) := x^k - a,$$

dass $f(0) = -a < 0$ und $f(a+1) = (a+1)^k - a \geq a + 1 - a = 1 > 0$. Nach dem Zwischenwertsatz (mit $c = 0$) existiert also ein $p \in (0, a+1)$ mit $f(p) = 0$, d.h. $g(p) = p^k = a$. Also ist $g$ auch surjektiv.

[a] Über Umkehrfunktionen haben wir hier und hier gesprochen.




Auch die Bijektivität der Exponentialfunktion folgt aus dem Zwischenwertsatz.

**Beispiel 5.2.5.** Schränkt man ihren Zielbereich auf die Menge $(0, \infty)$ ein, so ist die Exponentialfunktion

$$\exp : \mathbb{R} \to (0, \infty), \quad \exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

bijektiv. Man nennt ihre Umkehrfunktion die **natürliche Logarithmusfunktion** und schreibt sie als

$$\ln : (0, \infty) \to \mathbb{R}.$$

Es gilt

$$\ln(x \cdot y) = \ln(x) + \ln(y), \quad x, y \in (0, \infty).$$

**Beweis:**

(i) Nach Hausaufgabe 41 ist die Exponentialfunktion streng monoton wachsend

(also injektiv), es gilt $\exp(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und

$$\lim_{n\to\infty} \exp(n) = \infty \quad \text{bzw.} \quad \lim_{n\to\infty} \exp(-n) = 0.$$

Ferner ist die Exponentialfunktion stetig (beweisen wir später). Ist nun $y \in (0, \infty)$ beliebig, so existiert also $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$\exp(-n_0) < y < \exp(n_0).$$

Aus dem Zwischenwertsatz, angewendet auf die Einschränkung

$$\exp|_{[-n_0,n_0]},$$

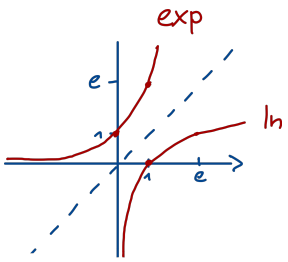
folgt, dass ein $p \in (-n_0, n_0)$ existiert mit $\exp(p) = y$. Also ist $\exp : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ auch surjektiv und damit bijektiv.

(ii) Sind $x, y > 0$, so folgt aus der Funktionalgleichung der Exponentialfunktion, dass

$$\exp(\ln(x) + \ln(y)) = \exp(\ln(x)) \cdot \exp(\ln(y)) = x \cdot y = \exp(\ln(x \cdot y)),$$

d.h. aus der Injektivität der Exponentialfunktion folgt

$$\ln(x) + \ln(y) = \ln(x \cdot y).$$

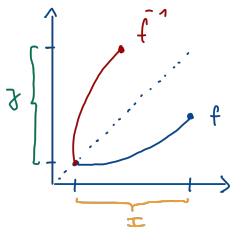



Eine weitere wichtige Folgerung aus dem Zwischenwertsatz ist die Tatsache, dass auch die Umkehrfunktion einer bijektiven stetigen Funktion stets wieder stetig ist.

**Satz 5.2.6** (Stetigkeit der Umkehrfunktion). Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein beliebiges Intervall und $f : I \to J$ sei bijektiv und stetig. Dann ist auch $J$ ein Intervall,[a] $f$ ist streng monoton und auch $f^{-1} : J \to I$ ist streng monoton und stetig.

[a] Ganz allgemein gilt für jedes (auch nicht injektive) stetige $f : I \to \mathbb{R}$, dass mit $I$ auch der Wertebereich $f(I)$ ein Intervall ist.

Auch dies ist anschaulich klar: beim Spiegeln an der Winkelhalbierenden reißt der Graph nicht auseinander. Auf einen formalen Beweis verzichten wir aus Zeitgründen. Schauen Sie z.B. ins Buch von Grieser [5].




*Skizze zu Satz 5.2.6.*

Als unmittelbare Anwendungen dieses Satzes und von Beispiel 5.2.4 und 5.2.5 erhalten wir folgendes Resultat.

**Beispiel 5.2.7.** (i) Die $k$-te Wurzelfunktion

$$w_k : [0,\infty) \to [0,\infty), \quad w_k(x) = \sqrt[k]{x}$$

ist als Umkehrfunktion der stetigen Funktion $g : [0,\infty) \to [0,\infty), x \mapsto x^k$ stetig.

(ii) Die natürliche Logarithmusfunktion $\ln : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ ist als Umkehrfunktion der stetigen Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{R} \to (0,\infty)$ stetig. —Ende VL 23—

## 5.3. Einschub: Die allgemeine Potenz

Wir wollen kurz auf die Frage eingehen, wie wir allgemeine Potenzen $x^a$ für $x > 0$ und $a \in \mathbb{R}$ definieren können. Was ist also z.B. mit $2^{\sqrt{2}}$ eigentlich gemeint?

In Satz 3.3.6 hatten wir bereits erklärt, wie $x^a$ für $a \in \mathbb{Z}$ definiert ist. Dies weiten wir nun zunächst auf rationales $a \in \mathbb{Q}$ aus.

**Definition 5.3.1.** Für $x > 0$ und $p, q \in \mathbb{N}$ sei

$$x^{\frac{p}{q}} := \sqrt[q]{x^p} \quad \text{und} \quad x^{-\frac{p}{q}} := \frac{1}{x^{\frac{p}{q}}}.$$

**Beachte.** (i) Ist $n \in \mathbb{N}$, so folgt aus den Potenzrechengesetzen für ganzzahlige Exponenten (Satz 3.3.6), dass

$$x^{\frac{nq}{q}} := \sqrt[q]{x^{nq}} = \sqrt[q]{(x^n)^q} = x^n,$$

d.h. die obige Definition liefert im Falle, dass der Exponent natürlich bzw. ganz ist, das Gleiche wie die ursprüngliche Definition aus Satz 3.3.6.

(ii) Es gibt eine weitere Spitzfindigkeit in obiger Definition, denn ein Bruch hat ja keine eindeutige Darstellung, z.B. gilt $\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$ und allgemeiner für alle $n \in \mathbb{N}$, dass $\frac{p}{q} = \frac{np}{nq}$. Damit Definition 5.3.1 Sinn macht, darf sie nicht von der Wahl des Repräsentanten des Bruchs abhängen d.h. es muss gelten

$$\sqrt[q]{x^p} = \sqrt[nq]{x^{np}}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Aber dies ist der Fall, denn mit den Potenzrechengesetzen für ganzzahlige Exponenten folgt

$$\left(\sqrt[q]{x^p}\right)^{nq} = \left(\left(\sqrt[q]{x^p}\right)^q\right)^n = (x^p)^n = x^{np} = \left(\sqrt[nq]{x^{np}}\right)^{nq}.$$

Nun ziehe auf beiden Seiten die $nq$-te Wurzel.

Wie kommen wir nun von rationalen zu beliebigen reellen Exponenten? Eine Möglichkeit wäre die Folgende: Ist $a \in \mathbb{R}$, so existiert nach Beispiel 4.2.11 eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von rationalen Zahlen, d.h. $a_n = \frac{p_n}{q_n}$ mit $p_n \in \mathbb{Z}, q_n \in \mathbb{N}$, so dass

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{p_n}{q_n} = a.$$

Können wir dann nicht einfach definieren

$$(\star) \qquad x^a := \lim_{n\to\infty} x^{a_n} = \lim_{n\to\infty} x^{\frac{p_n}{q_n}} \quad ?$$

Tatsächlich könnte man dies so machen, allerdings müssten zuvor erst zwei Fragen geklärt werden:

(i) Existiert der Grenzwert in $(\star)$ überhaupt?

(ii) Hat man eine zweite Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von rationalen Zahlen mit $b_n \to a$ für $n \to \infty$, gilt dann

$$\lim_{n\to\infty} x^{a_n} = \lim_{n\to\infty} x^{b_n}.$$

Wäre dies nicht so, würde der Wert von $x^a$ in $(\star)$ ja von der gewählten Folge abhängen, d.h. es würde sich nicht um eine sinnvolle Definition handeln.

Da es nicht ganz leicht ist, diese Schwierigkeiten direkt zu überwinden, wählen wir einen alternativen Weg zur Definition von $x^a$ für $a \in \mathbb{R}$ (der am Ende aber das gleiche Ergebnis liefern wird, wie der oben skizzierte). Das folgende Lemma wird dabei wichtig werden.

**Lemma 5.3.2.** Für $a \in \mathbb{Q}$ und $x > 0$ gilt

$$x^a = \exp(a \cdot \ln(x)).$$

**Beweis.** Für $a = 0$ gilt $x^0 := 1 = \exp(0) = \exp(0 \cdot \ln(x))$, d.h. es genügt den Fall $a \neq 0$ zu betrachten. Wegen

$$x^{-a} = \frac{1}{x^a} \quad \text{und} \quad \exp(-a\ln(x)) = \frac{1}{\exp(a\ln(x))},$$

siehe Satz 4.5.13, genügt es weiterhin, nur den Fall $a > 0$ zu untersuchen. Sei also $a = \frac{p}{q}$ mit $p, q \in \mathbb{N}$. Dann liefert $(p-1)$-malige Anwendung der Funktionalgleichung für den natürlichen Logarithmus (vergleiche Beispiel 5.2.5), dass

$$\ln(x^p) = \ln(\underbrace{x \cdot x \cdot \ldots \cdot x}_{p \text{ Faktoren}}) = \underbrace{\ln(x) + \ln(x) + \ldots + \ln(x)}_{p \text{ Summanden}} = p \cdot \ln(x).$$

Hieraus folgt

$$x^p = \exp(\ln(x^p)) = \exp(p\ln(x)). \qquad (\heartsuit)$$

Durch $q$-malige Anwendung der Funktionalgleichung für die Exponentialfunktion folgt andererseits für jedes $z \in \mathbb{R}$, dass

$$(\exp(z))^q = \underbrace{\exp(z) \cdot \ldots \cdot \exp(z)}_{q \text{ Faktoren}} = \exp\underbrace{(z + \ldots + z)}_{q \text{ Summanden}} = \exp(q \cdot z).$$

Mit $z = \frac{p}{q}\ln(x)$ folgt also

$$\left(\exp\left(\frac{p}{q}\ln(x)\right)\right)^q = \exp\left(p\ln(x)\right) \overset{(\heartsuit)}{=} x^p.$$

Ziehen wir auf beiden Seiten die $q$-te Wurzel, folgt

$$\exp(a \cdot \ln(x)) = \exp\left(\frac{p}{q}\ln(x)\right) = \sqrt[q]{x^p} = x^{\frac{p}{q}} = x^a.$$

□

Das vorherige Lemma veranlasst nun zu folgender Definition.

**Definition 5.3.3.** Für $x > 0$ und $a \in \mathbb{R}$ sei

$$x^a := \exp(a \cdot \ln(x)).$$

**Beachte.** (i) Laut Lemma 5.3.2 liefert diese Definition von $x^a$ im Falle $a \in \mathbb{Q}$ den gleichen Wert, wie unsere ursprüngliche Definition 5.3.1.

(ii) Die Potenzrechengesetze gelten auch im Falle reeller Exponenten. Dies zeigt

man unter Verwendung der Funktionalgleichungen für exp und ln, z.B.

$$\begin{aligned} x^a x^b &= \exp(a\ln(x))\exp(b\ln(x)) \\ &= \exp(a\ln(x) + b\ln(x)) = \exp((a+b)\ln(x)) = x^{a+b}. \end{aligned}$$

(iii) Wegen $\ln(e) = 1$ gilt

$$e^a := \exp(a \cdot \ln(e)) = \exp(a), \quad a \in \mathbb{R}.$$

Dies ist der Grund dafür, dass man die Exponentialfunktion auch häufig als **$e$-Funktion** bezeichnet.

(iv) Da die Exponential- und Logarithmusfunktion jeweils stetig sind, sehen wir somit insbesondere mit Satz 5.1.7 auch, dass für ein festes $a \in \mathbb{R}$ die **Potenzfunktion**

$$f : (0, \infty) \to \mathbb{R}, \quad f(x) := x^a := \exp(a\ln(x))$$

und für ein festes $b > 0$ auch die **Exponentialfunktion zur Basis** $b$, d.h.

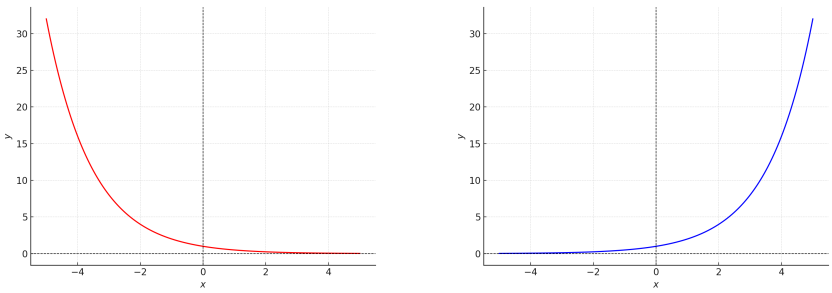
$$g : \mathbb{R} \to (0, \infty), \quad g(x) := b^x := \exp(x \cdot \ln(b)),$$

jeweils stetig sind.

(v) Aus (iv) folgt insbesondere Folgendes: Ist $x \in \mathbb{R}$ und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine (z.B. rationale) Folge mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, so gilt

$$b^x = \lim_{n\to\infty} b^{x_n}.$$

Dies zeigt, dass auch der oben zunächst skizzierte Weg zur Definition von $b^x$, mittels Approximation von $x$ durch rationale Zahlen, funktioniert hätte.




*Die Exponentialfunktion zur Basis $b$. Links im Falle $0 < b < 1$ und rechts im Falle $b > 1$.*

**Beispiel 5.3.4.** Wie berechnet man nun also $2^{\sqrt{2}}$?

**1. Antwort:** Man setzt $x = \sqrt{2} \cdot \ln(2)$ in die Exponentialreihe ein

$$2^{\sqrt{2}} = \exp(\sqrt{2}\ln(2)) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\sqrt{2}\ln(2))^k}{k!}.$$

**2. Antwort:** Man wählt eine rationale Folge $a_n = \frac{p_n}{q_n}$ mit $a_n \to \sqrt{2}$ für $n \to \infty$ (z.B. wie im Heron-Verfahren, siehe Satz 4.3.5). Dann gilt

$$2^{\sqrt{2}} = \lim_{n\to\infty} 2^{\frac{p_n}{q_n}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[q_n]{2^{p_n}}.$$

Mit beiden Methoden kann man $2^{\sqrt{2}}$ beliebig gut approximieren und erhält etwa

$$2^{\sqrt{2}} = 2,6651441\ldots$$

—Ende VL 24—

## 5.4. Grenzwerte von Funktionen

In der Schule haben Sie Grenzwerte von Funktionen untersucht, also so etwas wie $\lim_{x\to p} f(x)$. Vielleicht haben Sie auch gelernt, dass $f$ in $p$ stetig ist, falls

$$\lim_{x\to p} f(x) = f(p)$$

gilt. All diese Dinge wollen wir in diesem Abschnitt nun noch einmal genauer unter die Lupe nehmen.

Zunächst müssen wir klären, für welche Punkte $p$ man obige Grenzwerte überhaupt untersuchen darf. Grob gesprochen: der Punkt $p$ sollte an den Definitionsbereich von $f$ zumindest „angrenzen". Um dies zu präzisieren, führen wir einen neuen Begriff ein.

**Definition 5.4.1.** (a) Wir setzen $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{\infty\}$.

(b) Sei $D \subseteq \mathbb{R}$. Dann heißt ein Punkt $p \in \overline{\mathbb{R}}$ ein **Häufungspunkt von** $D$, falls eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit folgenden Eigenschaften existiert:

(i) Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $x_n \in D$ und $x_n \neq p$.

(ii) Es gilt $\lim_{n\to\infty} x_n = p$.[a]

[a] Im Falle $p = \pm\infty$ ist hiermit natürlich die bestimmte Divergenz gemeint.

Einem Häufungspunkt $p$ von $D$ kann man also mit Elementen von $D$ beliebig nahe kommen, **ohne** ihn selbst zu erreichen.

**Beispiel 5.4.2.** (i) Sei $a < b$. Für jedes der Intervalle

$$[a,b], (a,b], [a,b) \text{ oder } (a,b)$$

ist die Menge der Häufungspunkte durch $[a,b]$ gegeben (d.h. Häufungspunkte eines beschränkten Intervalls sind die Punkte des Intervalls + dessen Randpunkte).

**Beweis:** Gilt $a \leq p < b$, so können wir z.B.

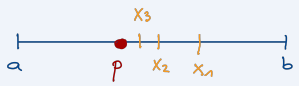
$$x_n := p + \frac{b-p}{2^n}, \quad n \in \mathbb{N},$$

wählen und erhalten $x_n \in (a,b), x_n \neq p$, und

$$\lim_{n\to\infty} x_n = p,$$

d.h. $p$ ist ein Häufungspunkt.

$x_n = p + \frac{b-p}{2^n}, n \in \mathbb{N}$




Genauso ist $b$ ein Häufungspunkt, denn

$$b = \lim_{n\to\infty}(b - \frac{b-a}{2^n}).$$

Da für jede konvergente Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus $[a,b]$ auch $\lim_{n\to\infty} x_n \in [a,b]$ gilt, ist andererseits kein $p$ mit $p < a$ bzw. $p > b$ ein Häufungspunkt.

(ii) Sei $a \in \mathbb{R}$. Für $D = (a,\infty)$ besteht die Menge der Häufungspunkte aus $[a,\infty) \cup \{\infty\}$. Auch $\infty$ ist hier ein Häufungspunkt, da z.B. $\lim_{n\to\infty}(a+n) = \infty$.

(iii) Für $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ besteht die Menge der Häufungspunkte aus $\mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{\infty\}$.

(iv) Ist $D = \{-1\} \cup [0,\infty)$, so ist $-1$ **kein** Häufungspunkt von $D$, obwohl es ein Element von $D$ ist.

**Vorsicht.** Wir sahen:

- ein Häufungspunkt von $D$ muss kein Element von $D$ sein,
- nicht jedes Element von $D$ muss ein Häufungspunkt von $D$ sein,
- auch $\pm\infty$ können Häufungspunkte sein.

Mit dem Begriff des Häufungspunktes sind wir für die folgende Definition gerüstet.

**Definition 5.4.3** (Grenzwerte von Funktionen). Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ und $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Ferner sei $p \in \overline{\mathbb{R}}$ ein Häufungspunkt von $D$ und $a \in \overline{\mathbb{R}}$. Dann nennt man $a$ **Grenzwert von $f$ an der Stelle $p$** und schreibt

$$\lim_{x \to p} f(x) = a,$$

falls für **jede** Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $D \setminus \{p\}$ die folgende Implikation gilt:

$$\lim_{n \to \infty} x_n = p \quad \Rightarrow \quad \lim_{n \to \infty} f(x_n) = a.$$

Egal auf welche Weise man sich $p$ also mittels einer Folge $(x_n)$ aus $D \setminus \{p\}$ annähert (und mindestens eine solche Folge gibt es, denn $p$ ist ein Häufungspunkt von $D$), muss sich die zugehörige Bildfolge $(f(x_n))$ stets dem Wert $a$ annähern.

**Beachte.** (i) Zur Verdeutlichung des Definitionsbereichs schreibt man auch $\lim\limits_{\substack{x \to p \\ x \in D}} f(x)$.

(ii) Aus der Eindeutigkeit des Grenzwertes für Folgen (Satz 4.2.9) folgt auch sofort, dass der Grenzwert einer Funktion, sofern existent, eindeutig ist.

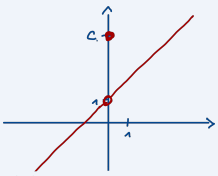
**Vorsicht.** (i) Die Grenzwertdefinition erinnert an unsere Definition der Stetigkeit (Definition 5.1.1). Aber es gibt wichtige Unterschiede:

| $f$ ist stetig in $p$ | vs. | $\lim_{x \to p} f(x) = a$ |
|---|---|---|
| $p \in D$ | | $p$ ist Häufungspunkt von $D$. Es kann $p \notin D$ gelten. |
| Für $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ aus $D$ gilt: $x_n \to p \Rightarrow f(x_n) \to f(p)$ | | Für $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ aus $D \setminus \{p\}$ gilt: $x_n \to p \Rightarrow f(x_n) \to a$ |

(ii) Insbesondere spielt der Wert $f(p)$ (selbst wenn definiert) bei der Berechnung von $\lim_{x \to p} f(x)$ **überhaupt keine Rolle**.

**Beispiel 5.4.4.** Es sei $c \in \mathbb{R}$ fixiert und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} x + 1, & \text{falls } x \neq 0, \\ c, & \text{falls } x = 0. \end{cases}$$




Dann gilt $\lim_{x \to 0} f(x) = 1$, d.h. der Grenzwert ist unabhängig vom Wert $c = f(0)$.

**Beweis:** Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beliebige Folge in $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ mit $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$. Dann gilt also $f(x_n) = x_n + 1$ und mit den Folgenrechenregeln folgt

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty}(x_n+1) = (\lim_{n\to\infty} x_n) + 1 = 1.$$

**Beachte.** (i) Insbesondere darf man also im vorherigen Beispiel nicht einfach $x = 0$ in die Funktion einsetzen, denn für $c \neq 1$ gilt $\lim_{x\to 0} f(x) \neq f(0)$.

(ii) Im Falle $c = 1$ gilt andererseits, dass $\lim_{x\to 0} f(x) = 1 = f(0)$.

**Quiz:** Welche Eigenschaft hat die Funktion $f$ nur im Falle $c = 1$?

**Antwort:** Im Fall $c = 1$ ist die Funktion $f$ stetig, d.h. aus $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ folgt, dass

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(0).$$

Wir schauen uns ein paar weitere Beispiele an.

**Beispiel 5.4.5.** a) Sei $p \in \mathbb{R}$ beliebig und

$$g : \mathbb{R}\setminus\{p\} \to \mathbb{R}, \quad g(x) = \frac{x^2 - p^2}{x - p}.$$

Auch hier kann man nicht einfach $x = p$ in die Funktion einsetzen! Folgende Umformung hilft aber weiter: für $x \neq p$ gilt

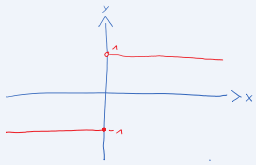
$$g(x) = \frac{x^2 - p^2}{x - p} = \frac{(x-p)(x+p)}{x-p} = x + p.$$

Hieraus folgt sofort, dass $\lim_{x\to p} g(x) = 2p$. **Quiz:** Welche aus der Schule bekannte Größe haben wir hier gerade ausgerechnet?

Weiterhin gilt etwa $\lim_{x\to\infty} g(x) = \infty$ und $\lim_{x\to-\infty} g(x) = -\infty$.

b) Es sei $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$h(x) = \begin{cases} -1, & x \leq 0 \\ 1, & x > 0. \end{cases}$$




In diesem Fall existiert $\lim_{x\to 0} h(x)$ **nicht**!

**Beweis:** Die Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = (1/n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(x'_n)_{n\in\mathbb{N}} = (-1/n)_{n\in\mathbb{N}}$ sind aus $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ und es gilt $x_n \to 0$ und $x'_n \to 0$ für $n \to \infty$, aber

$$\lim_{n\to\infty} h(x_n) = 1 \neq -1 = \lim_{n\to\infty} h(x'_n).$$

**Beachte.** Aus den Folgenrechenregeln 4.2.7 ergeben sich entsprechende Regeln für Grenzwerte von Summen, Produkten und Quotienten von Funktionen. Zum Beispiel gilt

$$\lim_{x\to p}(f(x)+g(x)) = \lim_{x\to p} f(x) + \lim_{x\to p} g(x),$$

usw. Dies ist folgendermaßen zu lesen: Falls die beiden Grenzwerte auf der rechten Seite existieren, so existiert auch der Grenzwert auf der linken Seite und stimmt mit der rechten Seite überein.

Nach all diesen Vorarbeiten sollte das nächste Resultat nicht mehr überraschen.

**Satz 5.4.6.** Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ und $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Ferner sei $p \in D$ ein Häufungspunkt von $D$. Dann sind äquivalent:

(i) $f$ ist stetig in $p$.

(ii) Es gilt $\lim_{x\to p} f(x) = f(p)$.

**Beweis.** Ergibt sich fast unmittelbar aus den Definitionen. Versuchen Sie es mal selbst! □

In der Schule haben Sie vermutlich auch von einseitigen Grenzwerten gehört.

**Definition 5.4.7.** Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ und $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion.

(i) Ist $p$ ein Häufungspunkt von $D \cap (p, \infty)$, so heißt der Grenzwert

$$\lim_{x\to p^+} f(x) := \lim_{\substack{x\to p \\ x\in D\cap(p,\infty)}} f(x),$$

falls existent, der **rechtsseitige Grenzwert** von $f$ an der Stelle $p$.[a]

(ii) Ist $p$ ein Häufungspunkt von $D \cap (-\infty, p)$, so heißt der Grenzwert

$$\lim_{x\to p^-} f(x) := \lim_{\substack{x\to p \\ x\in D\cap(-\infty,p)}} f(x),$$

falls existent, entsprechend der **linksseitige Grenzwert** von $f$ an der Stelle $p$.

[a] Beim rechtsseitigen Grenzwert muss also für alle Folgen $(x_n)$ aus $D$, mit $x_n > p$ für alle $n \in \mathbb{N}$, gelten, dass

$$\lim_{n\to\infty} x_n = p \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(p).$$

Entsprechend betrachtet man nur Folgen mit $x_n < p$ für den linksseitigen Grenzwert.

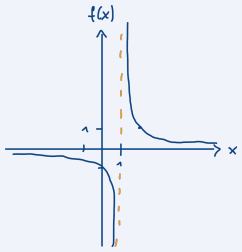
**Beispiel 5.4.8.** (i) Für

$$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad h(x) = \begin{cases} -1, & \text{falls } x \leq 0, \\ 1, & \text{falls } x > 0, \end{cases}$$

gilt $\lim_{x \to 0^+} h(x) = 1$ und $\lim_{x \to 0^-} h(x) = -1$.

(ii) Sei $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = \frac{1}{x-1}.$$




Dann gilt

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \infty \quad \text{und} \quad \lim_{x \to 1^-} f(x) = -\infty.$$

Auch der folgende Satz leuchtet ein (und wäre nicht schwierig zu beweisen).

**Satz 5.4.9.** Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ und $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Ferner sei $p$ sowohl ein Häufungspunkt von $D \cap (p, \infty)$ als auch von $D \cap (-\infty, p)$.

(i) Es sind äquivalent:

1. $\lim_{x \to p} f(x) = a$
2. Die links- und rechtsseitigen Grenzwerte von $f$ an der Stelle $p$ existieren und haben beide den Wert $a$.

(ii) Im Falle $p \in D$ sind äquivalent:

1. $f$ ist stetig in $p$.
2. Die links- und rechtsseitigen Grenzwerte von $f$ an der Stelle $p$ existieren und haben beide den Wert $f(p)$.

—Ende VL 25—

## 5.5. Differenzierbarkeit

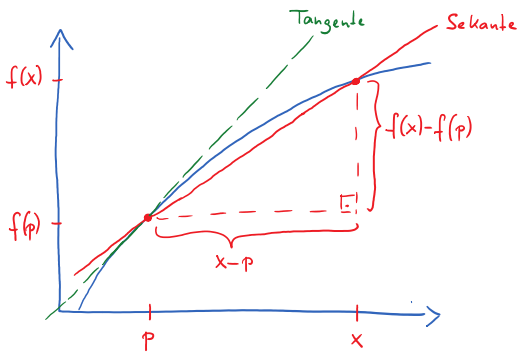
**Beachte.** Im Folgenden sei $I \subseteq \mathbb{R}$ stets ein echtes Intervall, d.h. ein Intervall das aus mehr als einem Punkt besteht. Insbesondere ist dann jeder Punkt von $I$ auch ein Häufungspunkt von $I$.

Wir erinnern zunächst an ein paar Begriffe, die Sie schon aus der Schule kennen. Dazu

sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $p \in I$. Die Abbildung

$$I \setminus \{p\} \ni x \mapsto \frac{f(x) - f(p)}{x - p} \in \mathbb{R}$$

wird der **Differenzenquotient** von $f$ an der Stelle $p$ genannt. Dieser gibt an der Stelle $x$ gerade die Steigung der **Sekante** des Graphen von $f$ durch die Punkte $(p, f(p))$ und $(x, f(x))$ an.




Beim Grenzübergang $x \to p$ geht die Sekante in die **Tangente** an den Graphen von $f$ im Punkt $(p, f(p))$ über. Der sogenannte **Differentialquotient**

$$\lim_{x \to p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p}$$

gibt also gerade die Steigung der Tangente an. Wenn all dies so wirklich funktioniert, nennt man $f$ differenzierbar im Punkt $p$. Dies halten wir nun noch einmal formal fest.

**Definition 5.5.1.** Sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $p \in I$.

(i) $f$ heißt **in $p$ differenzierbar**, falls der Grenzwert

$$(\star) \qquad \lim_{x \to p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p}$$

in $\mathbb{R}$ existiert.[a] In diesem Fall wird dieser Grenzwert mit $f'(p)$ bezeichnet und **Ableitung von $f$ in $p$** genannt.

(ii) $f$ heißt **differenzierbar auf $I$** oder einfach **differenzierbar**, falls sie in jedem $p \in I$ differenzierbar ist. In diesem Fall heißt die Funktion $f' : I \to \mathbb{R}$ die **Ableitung von $f$**.

[a] D.h. der Grenzwert existiert **und** ist eine reelle Zahl (und nicht $\pm\infty$).

**Beachte.** (i) Manchmal schreibt man den Differentialquotienten $(\star)$ auch als

$$\lim_{\substack{x \to p \\ x \neq p}} \frac{f(x) - f(p)}{x - p},$$

um zu betonen, dass der Fall $x = p$ ausgeschlossen wird. Dass dies ausgeschlossen wird, hatten wir aber in unsere Definition des Grenzwertes (vergleiche Definition 5.4.3) schon mit eingebaut, indem wir nur Folgen $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $x_n \neq p$ und $x_n \to p$ zur Untersuchung des Grenzwertes verwendet haben. Der Zusatz $x \neq p$ in der Schreibweise ist also nicht nötig, er schadet aber auch nicht.

(ii) Direkt aus der Grenzwertdefinition folgt auch, dass der Grenzwert $(\star)$ genau dann existiert, wenn dies für folgenden Grenzwert gilt

$$(\star\star) \qquad \lim_{h \to 0} \frac{f(p+h) - f(p)}{h} = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} \frac{f(p+h) - f(p)}{h},$$

und dass beide Grenzwerte dann den gleichen Wert annehmen. Je nach Funktion ist es manchmal sinnvoller, die Differenzierbarkeit von $f$ in $p$ mittels $(\star)$ und manchmal mittels $(\star\star)$ zu untersuchen.

Bevor wir zu Beispielen kommen, halten wir Folgendes fest.

**Satz 5.5.2.** Ist $f : I \to \mathbb{R}$ im Punkt $p \in I$ differenzierbar, so ist $f$ dort auch stetig.

**Beweis.** Mit der Produktregel für Grenzwerte folgt

$$\begin{aligned} \lim_{x \to p} (f(x) - f(p)) &= \lim_{x \to p} \left( \frac{f(x) - f(p)}{x - p} \cdot (x - p) \right) \\ &= \lim_{x \to p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p} \cdot \lim_{x \to p} (x - p) = f'(p) \cdot 0 = 0. \end{aligned}$$

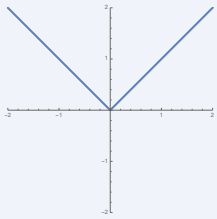
Also gilt $\lim_{x \to p} f(x) = f(p)$. □

**Vorsicht.** Die Umkehrung des Satzes gilt nicht! Nicht jede stetige Funktion ist auch differenzierbar! Dies zeigt das folgende Beispiel.

**Beispiel 5.5.3.** Die Betragsfunktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = |x|$$

ist im Punkte $p = 0$ stetig, aber nicht differenzierbar.



**Beweis:** Die Stetigkeit der Betragsfunktion haben wir in Beispiel 5.1.2 (c) gezeigt. Wegen

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{x} = 1$$

und

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-x}{x} = -1,$$

existiert der Differentialquotient

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0}$$

nach Satz 5.4.9 **nicht**.

Schauen wir uns nun ein paar einfache differenzierbare Funktionen an.

**Beispiel 5.5.4.** (i) Sei $c \in \mathbb{R}$. Die konstante Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = c$$

ist differenzierbar. Ferner gilt $f'(p) = 0$ für alle $p \in \mathbb{R}$.

**Beweis:** Es gilt

$$\frac{f(x)-f(p)}{x-p} = \frac{c-c}{x-p} = 0, \quad x \neq p,$$

also auch

$$\lim_{x\to p} \frac{f(x)-f(p)}{x-p} = 0.$$

(ii) Auch die Identitätsfunktion

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad g(x) = x$$

ist differenzierbar. Es gilt $g'(p) = 1$ für alle $p \in \mathbb{R}$.

**Beweis:** Es gilt

$$\frac{g(x)-g(p)}{x-p} = \frac{x-p}{x-p} = 1, \quad x \neq p,$$

also auch

$$\lim_{x\to p} \frac{g(x)-g(p)}{x-p} = 1.$$

(iii) In Beispiel 5.4.5 haben wir bereits gesehen, dass

$$\lim_{x\to p} \frac{x^2-p^2}{x-p} = 2p.$$

Dies zeigt, dass die Funktion $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, h(x) = x^2$ differenzierbar ist und $h'(p) = 2p$ für alle $p \in \mathbb{R}$.

(iv) Die Wurzelfunktion

$$w : [0,\infty) \to [0,\infty), \quad w(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$$

ist differenzierbar auf $(0,\infty)$ mit

$$w'(p) = \frac{1}{2\sqrt{p}} = \frac{1}{2}p^{-\frac{1}{2}}, \quad p > 0.$$

Im Punkt $p = 0$ ist die Funktion nicht differenzierbar.

**Beweis:** Für $p, x \in [0,\infty), x \neq p$, gilt wegen $(x-p) = (\sqrt{x}-\sqrt{p})(\sqrt{x}+\sqrt{p})$, dass

$$\frac{\sqrt{x}-\sqrt{p}}{x-p} = \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{p}} \overset{x\to p}{\to} \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{p}}, & \text{falls } p > 0, \\ \infty, & \text{falls } p = 0. \end{cases}$$

Die Differenzierbarkeit der Exponentialfunktion ist nicht ganz so leicht zu zeigen.

**Proposition 5.5.5.** Die Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist differenzierbar und

$$\forall p \in \mathbb{R} : \qquad \exp'(p) = \exp(p),$$

d.h. die Ableitung der Exponentialfunktion ist die Exponentialfunktion.

**Beachte.** Wegen Satz 5.5.2 ist die Exponentialfunktion damit insbesondere auch stetig. Dies hatten wir bislang auch noch nicht bewiesen.

**Beweis** (von Proposition 5.5.5). Wir teilen den Beweis in zwei Schritte auf.

**1. Schritt:** Es gilt

$$(\star) \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\exp(x)-1}{x} = 1.$$

**Beweis:** Im Folgenden sei zunächst $0 < x < 1$ (im Grenzwert $(\star)$ spielen sowieso nur kleine Werte von $x$ ein Rolle). Dann rechnen wir

$$\begin{aligned}\frac{\exp(x)-1}{x} - 1 &= \frac{1}{x}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!} - 1\right) - 1 = \frac{1}{x}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{k!}\right) - 1 \\ &= \left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^{k-1}}{k!}\right) - 1 = \sum_{k=2}^{\infty}\frac{x^{k-1}}{k!} = x\left(\sum_{k=2}^{\infty}\frac{x^{k-2}}{k!}\right).\end{aligned}$$

Die rechte Seite ist für $0 < x < 1$ positiv, also auch die linke. Wir können also unter Verwendung der geometrischen Reihe (siehe Satz 4.5.3) abschätzen

$$0 < \frac{\exp(x)-1}{x} - 1 = x\left(\sum_{k=2}^{\infty}\frac{x^{k-2}}{k!}\right) \leq x \underbrace{\sum_{k=2}^{\infty} x^{k-2}}_{=1+x+x^2+\ldots} = x\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{x}{1-x}.$$

Da $\lim_{x\to 0^+} \frac{x}{1-x} = 0$, folgt aus dieser Ungleichungskette und dem Sandwichprinzip

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\exp(x)-1}{x} - 1\right) = 0 \quad \text{also} \quad \lim_{x\to 0^+}\frac{\exp(x)-1}{x} = 1.$$

Dies zeigt, dass $(\star)$ zumindest für den rechtsseitigen Grenzwert gilt. Weiterhin sehen wir, dass $\lim_{x\to 0^+}\exp(x) = 1$. Mit $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$ folgt somit auch

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^-}\frac{\exp(x)-1}{x} &= \lim_{x\to 0^+}\frac{\exp(-x)-1}{-x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{\exp(x)}-1}{-x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{1}{\exp(x)}\frac{\exp(x)-1}{x} \\ &= \lim_{x\to 0^+}\frac{1}{\exp(x)} \cdot \lim_{x\to 0^+}\frac{\exp(x)-1}{x} = 1\cdot 1 = 1.\end{aligned}$$

Also ist $(\star)$ mit Satz 5.4.9 gezeigt.

**2. Schritt:** exp ist in jedem $p \in \mathbb{R}$ differenzierbar und $\exp'(p) = \exp(p)$.

**Beweis:** Mit der Funktionalgleichung und Schritt 1 gilt

$$\begin{aligned}\lim_{z\to p}\frac{\exp(z)-\exp(p)}{z-p} &= \lim_{z\to p}\exp(p)\cdot\frac{\exp(z-p)-1}{z-p} \\ &= \exp(p)\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\exp(x)-1}{x} = \exp(p)\cdot 1 = \exp(p).\end{aligned}$$

□

**Beachte.** Es existiert noch ein anderer Ansatz, um $\exp' = \exp$ zu beweisen. Falls Sie daran interessiert sind, können Sie im Anhang an dieses Kapitel einen Blick darauf werfen. —Ende VL 26—

Um die Ableitung von zusammengesetzten Funktionen zu bestimmen, können die folgenden Resultate verwendet werden. Hier seien $I, J \subseteq \mathbb{R}$ jeweils echte Intervalle.

**Satz 5.5.6.** (a) Sind die Funktionen $f, g : I \to \mathbb{R}$ beide differenzierbar im Punkt $p \in I$, so sind auch die Funktion $f + g, f - g$ und $f \cdot g$ in $p$ differenzierbar. Gilt $g(x) \neq 0$ für alle $x \in I$, so ist auch die Funktion $\frac{f}{g}$ differenzierbar in $p$. Ferner gilt in diesen Fällen

$$(f \pm g)'(p) = f'(p) \pm g'(p) \qquad \text{(Summenregel)}$$

$$(f \cdot g)'(p) = f'(p) \cdot g(p) + f(p) \cdot g'(p) \qquad \text{(Produktregel)}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(p) = \frac{f'(p)g(p) - f(p)g'(p)}{(g(p))^2} \qquad \text{(Quotientenregel).}$$

(b) Gilt $f : I \to J$ und $g : J \to \mathbb{R}$ und ist $f$ differenzierbar im Punkt $p \in I$ und $g$ differenzierbar im Punkt $f(p)$, so ist die Funktion $g \circ f : I \to \mathbb{R}$ differenzierbar im Punkt $p$ und es gilt

$$(g \circ f)'(p) = g'(f(p)) \cdot f'(p). \qquad \text{(Kettenregel)}$$

Die Kettenregel besagt, dass die Ableitung von $g \circ f$ das Produkt aus der Ableitung der äußeren Funktion $g$ (an der Stelle $f(p)$) und der Ableitung der inneren Funktion $f$ (an der Stelle $p$) ist.

**Beweis.** Wir beweisen exemplarisch die Produktregel und betrachten den zugehörigen Differenzenquotienten für $x \neq p$:

$$\begin{aligned}
\frac{(f \cdot g)(x) - (f \cdot g)(p)}{x - p} &= \frac{f(x)g(x) - f(p)g(p)}{x - p} \\
&= \frac{(f(x) - f(p))g(x) + f(p)(g(x) - g(p))}{x - p} \\
&= \underbrace{\frac{f(x) - f(p)}{x - p}}_{\overset{x \to p}{\to} f'(p)} \cdot \underbrace{g(x)}_{\overset{x \to p}{\to} g(p)} + f(p) \cdot \underbrace{\frac{g(x) - g(p)}{x - p}}_{\overset{x \to p}{\to} g'(p)},
\end{aligned}$$

d.h. die Grenzwertrechenregeln zeigen, dass

$$\lim_{x \to p} \frac{(f \cdot g)(x) - (f \cdot g)(p)}{x - p} = f'(p)g(p) + f(p)g'(p).$$

Man beachte, dass wir hier an einer Stelle auch benutzt haben, dass die in $p$ differenzierbare Funktion $g$ dort insbesondere auch stetig ist. Wo genau? □

**Beispiel 5.5.7.** (a) Sei $c \in \mathbb{R}$. Ist $g : I \to \mathbb{R}$ differenzierbar in $p \in I$, so auch die Funktion $c \cdot g : I \to \mathbb{R}$ und es gilt

$$(c \cdot g)'(p) = c \cdot g'(p), \quad p \in \mathbb{R}.$$

**Beweis:** Wende die Produktregel mit der konstanten Funktion $f(x) = c, x \in \mathbb{R}$, an und nutze, dass $f' = 0$.

(b) Es sei $n \in \mathbb{N}$ und $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f_n(x) = x^n$. Dann gilt:

$$f_n \text{ ist differenzierbar und } f_n'(x) = nx^{n-1} \text{ für alle } x \in \mathbb{R}.$$

**Beweis:** Nennen wir die zu beweisende Aussage einmal $B(n)$. Wir zeigen per Induktion, dass diese für alle $n \in \mathbb{N}$ wahr ist.

(A) Dass die Identitätsfunktion $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f_1(x) = x$ differenzierbar ist und $f_1'(x) = 1$ erfüllt, haben wir oben schon gesehen, d.h. $B(1)$ ist wahr und der Induktionsanfang ist gemacht.

(S) Nehmen wir nun an, $B(n)$ sei für ein beliebiges $n \in \mathbb{N}$ war, d.h. $f_n$ sei differenzierbar und es sei $f_n'(x) = nx^{n-1}$ (Induktionsvoraussetzung). Da

$$f_{n+1}(x) = x^{n+1} = x \cdot x^n = f_1(x) \cdot f_n(x),$$

folgt dann die Differenzierbarkeit von $f_{n+1}$ mit der Produktregel, die gleichzeitig zeigt, dass

$$\begin{aligned} f_{n+1}'(x) &= f_1'(x) \cdot f_n(x) + f_1(x) \cdot f_n'(x) \overset{I.V.}{=} 1 \cdot f_n(x) + x \cdot (nx^{n-1}) \\ &= x^n + nx^n = (n+1)x^n. \end{aligned}$$

Also ist auch $B(n+1)$ wahr.

Aus (A) und (S) folgt die Gültigkeit von $B(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit vollständiger Induktion.

(c) Teil (a) und (b) zeigen zusammen mit der Summen- und Quotientenregel, dass jede Polynom- und jede rationale Funktion (vgl. Korollar 5.1.5) differenzierbar ist.

Zum Beispiel gilt für die rationale Funktion

$$r : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad r(x) = \frac{1-x}{1+x^2},$$

dass

$$\begin{aligned} r'(x) &= \frac{(1-x)' \cdot (1+x^2) - (1-x) \cdot (1+x^2)'}{(1+x^2)^2} \\ &= \frac{(-1) \cdot (1+x^2) - (1-x) \cdot (2x)}{(1+x^2)^2} = \frac{-1-2x+x^2}{(1+x^2)^2}. \end{aligned}$$

(d) Ist $b > 0$, so ist die Exponentialfunktion zur Basis $b$, d.h.

$$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad h(x) = b^x$$

differenzierbar und $h'(x) = \ln(b) \cdot b^x$.[a]

**Beweis:** Dies kann man direkt über den Differentialquotienten zeigen (machen Sie in der Übung) oder wie folgt mit der Kettenregel: Es seien

$$g : \mathbb{R} \to (0, \infty), \quad g(x) = \exp(x) \quad \text{und} \quad f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x \cdot \ln(b).$$

Dann gilt

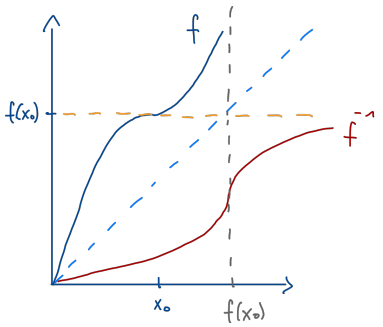
$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \exp(f(x)) = \exp(x \cdot \ln(b)) \overset{\text{Def.}}{=} b^x = h(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Ferner sind $f, g$ differenzierbar und $g' = g$ und $f'(x) = \ln(b), x \in \mathbb{R}$. Mit der Kettenregel ist also auch $h$ differenzierbar und es gilt

$$h'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x) = g(f(x)) \cdot \ln(b) = h(x) \cdot \ln(b) = b^x \cdot \ln(b).$$

[a] Den Spezialfall $b = e$ haben wir schon in Proposition 5.5.5 gezeigt.

Wie sieht es mit der Differenzierbarkeit der Umkehrfunktion einer differenzierbaren Funktion aus?




$f'(x_0) = 0$

$\Downarrow$

$f^{-1}$ hat bei $f(x_0)$ senkrechte Tangente

☹

Ist $f : I \to J$ bijektiv und stetig, so wissen wir bereits aus Satz 5.2.6, dass $f^{-1}$ ebenfalls stetig ist (und dass mit $I$ auch $J$ ein Intervall ist und $f$ und $f^{-1}$ beide streng monoton sind). Denken wir daran, dass der Graph von $f^{-1}$ durch Spiegelung des Graphen von $f$ an der Winkelhalbierenden entsteht, so sehen wir, dass eine waagerechte Tangente an den Graphen von $f$ (also ein $x_0 \in I$ mit $f'(x_0) = 0$) zu einer vertikalen Tangente an den Graphen von $f^{-1}$ führt. Gilt also $f'(x_0) = 0$, so kann $f^{-1}$ im Punkt $f(x_0)$ nicht differenzierbar sein. Der folgende Satz zeigt, dass dies das einzige Problem ist, auf das man stoßen kann.

**Satz 5.5.8** (Differenzierbarkeit der Umkehrfunktion). Sei $f : I \to J$ bijektiv und stetig. Ferner sei $f$ in $x_0 \in I$ differenzierbar. Dann sind äquivalent:

(i) $f^{-1}$ ist differenzierbar in $y_0 := f(x_0)$.

(ii) $f'(x_0) \neq 0$.

Ferner gilt in diesem Fall

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}. \qquad (\star)$$

**Beweis.** Es sei $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beliebige Folge in $J$ mit

$$\lim_{n\to\infty} y_n = y_0$$

und $y_n \neq y_0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Aufgrund der Bijektivität von $f$ existiert zu jedem $y_n, n \in \mathbb{N}_0$, genau ein $x_n \in I$ mit $f(x_n) = y_n$ bzw. $f^{-1}(y_n) = x_n$. Da $f^{-1}$ stetig ist (Satz 5.2.6) gilt ferner

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} f^{-1}(y_n) = f^{-1}(y_0) = x_0.$$

Da $f$ nach Voraussetzung in $x_0$ differenzierbar ist, gilt somit auch

$$f'(x_0) = \lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0} \in \mathbb{R}.$$

Schreiben wir nun den Differenzenquotienten für $f^{-1}$ wie folgt:

$$\frac{f^{-1}(y_n) - f^{-1}(y_0)}{y_n - y_0} = \frac{x_n - x_0}{f(x_n) - f(x_0)} = \frac{1}{\frac{f(x_n)-f(x_0)}{x_n - x_0}}. \qquad (\star\star)$$

Gilt dann $f'(x_0) \neq 0$, so folgt mit den Folgenrechenregeln

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f^{-1}(y_n) - f^{-1}(y_0)}{y_n - y_0} = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n)-f(x_0)}{x_n - x_0}} = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Da die gegen $y_0$ konvergente Folge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus $J \setminus \{y_0\}$ beliebig wahr, zeigt dies, dass $f^{-1}$ differenzierbar in $y_0$ ist und $(\star)$ gilt. Ist umgekehrt $f^{-1}$ differenzierbar in $y_0$, so zeigt $(\star\star)$ auch, dass $f'(x_0) \neq 0$ gelten muss. □

**Beispiel 5.5.9.** Der natürliche Logarithmus $\ln : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ ist differenzierbar und

$$\ln'(y) = \frac{1}{y}, \quad y > 0.$$

**Beweis:** Da die Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{R} \to (0,\infty)$ differenzierbar ist mit $\exp'(x) = \exp(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$, ist nach dem vorherigen Satz auch dessen Umkehrfunktion ln differenzierbar. Ferner ist deren Ableitung an der Stelle $y = \exp(x)$ gegeben durch

$$\ln'(y) = \frac{1}{\exp'(x)} = \frac{1}{\exp(x)} = \frac{1}{y}.$$

**Beachte.** Hier haben wir das Argument von ln mit $y$ bezeichnet, weil ihre Rolle als Umkehrfunktion von exp benutzt wurde. Natürlich gilt auch

$$\ln'(x) = \frac{1}{x}, \quad x > 0,$$

usw.

Schließlich können wir Beispiel 5.5.7 (b) nun auch noch auf beliebige reelle Exponenten ausdehnen.

**Beispiel 5.5.10.** Es sei $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann ist die Potenzfunktion

$$h : (0,\infty) \to (0,\infty), \quad h(x) = x^\alpha$$

differenzierbar und

$$h'(x) = \alpha x^{\alpha-1}, \quad x > 0.$$

**Beweis:** Setzen wir $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g(x) = \exp(x)$ und $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}, f(x) = \alpha \ln(x)$, so gilt zunächst

$$h(x) = x^\alpha = \exp(\alpha \cdot \ln(x)) = g(\alpha \cdot \ln(x)) = g(f(x)) = (g \circ f)(x), \quad x > 0.$$

Ferner sind $g, f$ differenzierbar mit $g' = g$ und $h'(x) = \frac{\alpha}{x}, x > 0$. Also folgt aus der Kettenregel, dass auch $h$ differenzierbar ist und

$$h'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x) = g(f(x)) \cdot \frac{\alpha}{x} = h(x) \cdot \frac{\alpha}{x} = x^\alpha \cdot \frac{\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha-1}, \qquad x > 0.$$

—Ende VL 27—

## 5.6. Ableitung und Funktionseigenschaften

In diesem letzten Abschnitt wollen wir noch kurz über das sprechen, was Sie in der Schule unter dem Stichwort „Kurvendiskussion“ kennengelernt haben, d.h. über (lokale) Extremwerte, Monotonieverhalten und dergleichen.

Schauen wir dazu zunächst einmal auf eine differenzierbare Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Ihr Graph könnte zum Beispiel so aussehen.

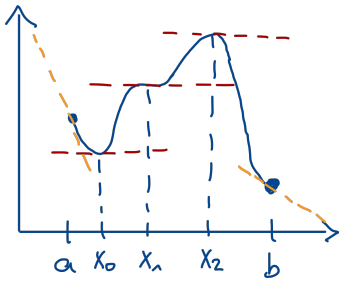



Abbildung 5.1.

Wir sehen, dass $f$

- bei $x_0$ ein lokales Minimum besitzt und $f'(x_0) = 0$,
- bei $x_2$ ein lokales (und globales) Maximum besitzt und $f'(x_2) = 0$,
- bei $x_1$ kein lokales Extremum besitzt, obwohl $f'(x_1) = 0$,
- bei $a$ ein lokales Maximum besitzt, obwohl $f'(a) \neq 0$,
- bei $b$ ein lokales (und globales) Minimum besitzt, obwohl $f'(b) \neq 0$.

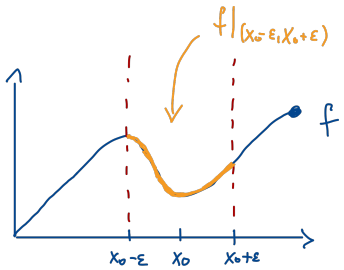
Zumindest bei Punkten im Inneren des Intervalls scheint das Verschwinden der Ableitung also notwendig für die Existenz eines lokalen Extremums zu sein. Dass dies tatsächlich so ist, wird unser erstes Resultat dieses Abschnitts sein. Zuvor sollten wir die schon verwendeten Begriffe jedoch noch einmal exakt definieren.

**Definition 5.6.1.** Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein echtes Intervall, $f : I \to \mathbb{R}$ eine Funkt. und $x_0 \in I$.

(i) Man sagt, $f$ hat in $x_0$ ein **lokales Maximum** bzw. **Minimum**, falls ein $\varepsilon > 0$ existiert, so dass die Einschränkung $f|_{I \cap (x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)}$ in $x_0$ ein Maximum bzw. Minimum besitzt. Ferner heißt $x_0$ in diesem Fall eine **lokale Maximal-** bzw. **Minimalstelle** von $f$.

(ii) Man sagt, $f$ hat in $x_0$ ein **lokales Extremum**, falls $f$ in $x_0$ ein lokales Maximum oder Minimum besitzt. In diesem Fall heißt $x_0$ **lokale Extremstelle** von $f$.

**Beachte.** Im Falle, dass $x_0$ kein Randpunkt von $I$ ist, kann man $\varepsilon > 0$ in Teil (i) stets so klein wählen, dass $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \subseteq I$, d.h. $I \cap (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) = (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$.




**Satz 5.6.2** (Notwendiges Kriterium für lok. Extrema). Seien $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ und $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ sei in $x_0 \in (a, b)$ differenzierbar. Dann gilt die folgende Implikation:

$$f \text{ hat in } x_0 \text{ ein lokales Extremum} \quad \Rightarrow \quad f'(x_0) = 0$$

Wie wir gesehen haben, ist die Implikation i.A. falsch, wenn $x_0$ ein Randpunkt des Intervalls ist (falls $f$ auch dort definiert wäre). Genauso ist die Umkehrung der Implikation i.A. falsch.

**Beweis.** Wir betrachten nur den Fall, dass $x_0$ eine lokale Minimalstelle von $f$ ist (sonst betrachte $-f$). Dann existiert $\varepsilon > 0$, so dass $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \subseteq (a, b)$ und

$$\forall x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) : \quad f(x) \geq f(x_0). \qquad (\star)$$

Da $f$ in $x_0$ differenzierbar ist, existiert der zugehörige Differentialquotient und nach Satz 5.4.9 gilt

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Aber wegen $(\star)$ folgt dann

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{\overbrace{f(x) - f(x_0)}^{\geq 0}}{\underbrace{x - x_0}_{>0}} \geq 0 \quad \text{und} \quad f'(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{\overbrace{f(x) - f(x_0)}^{\geq 0}}{\underbrace{x - x_0}_{<0}} \leq 0$$

Also muss $f'(x_0) = 0$ gelten. □

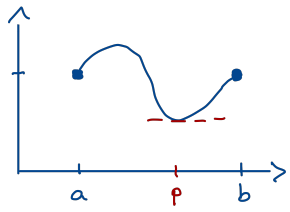
**Beachte.** Gilt $f'(x_0) = 0$, so wird $x_0$ ein **stationärer Punkt** von $f$ genannt. Der vorherige Satz führt dann natürlich sofort zu der Frage, welche stationären Punkte nun tatsächlich lokale Extremstellen von $f$ sind?

Anschaulich ist dies klar: Genau solche, in denen sich das Wachstumsverhalten der Funktion ändert (vergleiche Abbildung 5.1). Wie hängt das Wachstumsverhalten mit der Ableitung zusammen? Das kennen Sie aus der Schule: positive Ableitung impliziert Wachstum und negative Ableitung impliziert, dass die Funktion fällt. Also ist ein stationärer Punkt ein lokales Extremum, falls die Ableitung in diesem Punkt das Vorzeichen wechselt.

All das in der vorherigen Bemerkung Beschriebene ist richtig, aber um dies wirklich zu beweisen, müssen wir, wie so oft, etwas genauer hinschauen. Unser wichtigstes Hilfsmittel dabei sind die folgenden beiden Sätze.

**Satz 5.6.3** (Satz von Rolle). [a] Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und $f|_{(a,b)}$ differenzierbar. Ferner sei $f(a) = f(b)$. Dann existiert ein $p \in (a, b)$ mit $f'(p) = 0$.

[a] Michel Rolle,1652-1719




**Beweis.** Wir unterscheiden zwei Fälle.

**1. Fall:** $f$ ist konstant. Dann gilt nach Beispiel 5.5.4 (i) sogar, dass $f'(p) = 0$ für alle $p \in (a, b)$.

**2. Fall:** $f$ ist nicht konstant. Dann existiert $x_0 \in (a, b)$, so dass

$$\text{(a)} \quad f(x_0) < f(a) = f(b) \quad \text{oder} \quad \text{(b)} \quad f(x_0) > f(a) = f(b).$$

Nehmem wir an, Fall (a) liegt vor. Sei dann $p \in [a,b]$ eine Minimalstelle von $f$ auf $[a,b]$ (diese existiert wegen Satz 5.2.2, da $f$ auf $[a,b]$ stetig ist). Dann muss gelten

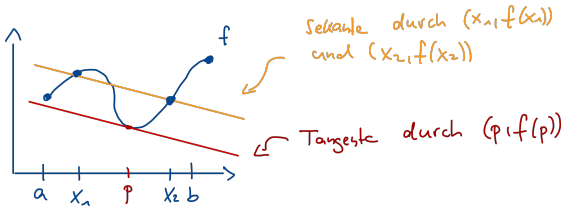
$$f(p) \leq f(x_0) < f(a) = f(b),$$

d.h. $p$ ist keiner der Randpunkte $a, b$, sondern $p \in (a,b)$. Aber dann folgt aus Satz 5.6.2 (denn $p$ ist als Minimalstelle natürlich auch eine lokale Extremstelle), dass $f'(p) = 0$. Im Fall (b) wird ganz analog argumentiert (mit dem Maximum statt dem Minimum von $f$). □

Etwas allgemeiner als der Satz von Rolle ist folgender Satz.

**Satz 5.6.4** (Mittelwertsatz der Differentialrechnung). Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und $f|_{(a,b)}$ differenzierbar. Ferner seien $x_1, x_2 \in [a,b]$ mit $x_1 < x_2$. Dann existiert ein $p \in (x_1, x_2)$ mit

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(p).$$




**Beweis.** Betrachte die differenzierbare Hilfsfunktion

$$h : [x_1, x_2] \to \mathbb{R}, \quad h(x) := f(x) - \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \cdot (x - x_1).$$

Dann gilt (da $x_1, x_2, f(x_1), f(x_2)$ Konstanten sind)

$$h'(x) = f'(x) - \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

Ferner ist

$$h(x_1) = f(x_1) - \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \cdot \overbrace{(x_1 - x_1)}^{=0} = f(x_1)$$

und

$$h(x_2) = f(x_2) - \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \cdot (x_2 - x_1) = f(x_2) - (f(x_2) - f(x_1)) = f(x_1),$$

d.h. $h(x_1) = h(x_2)$. Wir können also den Satz von Rolle auf $h$ anwenden und

erhalten die Existenz eines $p \in (x_1, x_2)$ mit

$$0 = h'(p) = f'(p) - \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

□

Aus dem Mittelwertsatz ergibt sich nun sofort der Zusammenhang zwischen den Werten der Ableitung von $f$ und dessen Monotonieverhalten.

**Satz 5.6.5** (Ableitung und Monotonie). Es seien $a, b \in \overline{\mathbb{R}}, a < b$ und $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ sei differenzierbar. Dann gelten folgende Äquivalenzen bzw. Implikationen:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| (i) | $\forall x \in (a,b):$ | $f'(x) = 0$ | $\Leftrightarrow$ | $f$ ist konstant |
| (ii) | $\forall x \in (a,b):$ | $f'(x) \geq 0$ | $\Leftrightarrow$ | $f$ ist monoton wachsend |
| (iii) | $\forall x \in (a,b):$ | $f'(x) > 0$ | $\Rightarrow$ | $f$ ist streng monoton wachsend |
| (iv) | $\forall x \in (a,b):$ | $f'(x) \leq 0$ | $\Leftrightarrow$ | $f$ ist monoton fallend |
| (v) | $\forall x \in (a,b):$ | $f'(x) < 0$ | $\Rightarrow$ | $f$ ist streng monoton fallend |

**Beachte.** In (iii) und (v) gilt die Implikation „$\Leftarrow$“ im Allgemeinen nicht. Beispielsweise ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^3$ streng monoton wachsend, aber $f'(0) = 0$.

**Beweis** (von Satz 5.6.5). Wir beweisen (i) bis (iii). Unter Betrachung von $-f$ folgen (iv) und (v) sofort aus (ii) und (iii).

(i) „$\Leftarrow$“ : Dies haben wir schon in Beispiel 5.5.4 (i) gesehen.

(i)-(iii) „$\Rightarrow$“ : Sind $a \leq x_1 < x_2 \leq b$ beliebig gewählt und $p \in (x_1, x_2) \subseteq (a, b)$ wie im Mittelwertsatz, so folgt

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(p) \cdot \overbrace{(x_2 - x_1)}^{>0} \begin{cases} > 0, & \text{falls } f' > 0, \\ \geq 0, & \text{falls } f' \geq 0, \\ = 0, & \text{falls } f' = 0. \end{cases}$$

Im ersten Fall folgt $f(x_1) < f(x_2)$, im zweiten Fall $f(x_1) \leq f(x_2)$ und im dritten Fall $f(x_1) = f(x_2)$. Da $a \leq x_1 < x_2 \leq b$ beliebig waren, ist $f$ also streng monoton wachsend bzw. monoton wachsend bzw. konstant.

(ii) „$\Leftarrow$“ : Sei $x \in (a, b)$. Da $f$ in $x$ differenzierbar ist, können wir $f'(x)$ mittels des rechtsseitigen Differentialquotienten berechnen und erhalten wegen des strengen

monotonen Wachstums, dass

$$f'(x) = \lim_{y \to x^+} \frac{\overbrace{f(y) - f(x)}^{>0}}{\underbrace{y - x}_{>0}} \geq 0.$$

□ —Ende VL 28—

Hieraus lässt sich nun das Monotonieverhalten einfacher Funktionen sofort bestimmen bzw. wiedergewinnen. Zum Beispiel ist $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ streng monoton wachsend, da $\exp' = \exp > 0$ auf $\mathbb{R}$. Auch etwas weniger offensichtliche Resultate lassen sich hieraus ableiten. Wir schauen uns zwei davon näher an.

**Beispiel 5.6.6.** Für alle $x > 0$ gilt $x - 1 \geq \ln(x)$.

**Beweis:** Für die Funktion

$$f : (0, \infty) \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x - 1 - \ln(x)$$

gilt

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x} \begin{cases} > 0, & \text{falls } x > 1, \\ < 0, & \text{falls } 0 < x < 1. \end{cases}$$

Also ist $f$ auf $(0, 1)$ streng monoton fallend und auf $(1, \infty)$ streng monoton wachsend. Also gilt $f(x) \geq f(1) = 0$ für alle $x > 0$.

Das nächste Beispiel führt in das Gebiet der **Differentialgleichungen**. Hierüber werden Sie in der Vorlesung „Weiterführende Kapitel der Analysis und Stochastik“ noch etwas mehr erfahren.

**Beispiel 5.6.7.** Zu $\lambda \in \mathbb{R}$ betrachten wir die Differentialgleichung (DGL)

$$(\star) \qquad f'(x) = \lambda \cdot f(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Eine Lösung dieser DGL ist eine differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die $(\star)$ für jedes $x \in \mathbb{R}$ erfüllt. Hierzu lässt sich Folgendes zeigen:

(i) Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist genau dann eine Lösung von $(\star)$, wenn eine Konstante $C \in \mathbb{R}$ existiert, so dass

$$f(x) = C \exp(\lambda x) = Ce^{\lambda x}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

(ii) Es gibt genau eine Lösung des sogenannten „Anfangswertproblems“

$$\begin{cases} f'(x) = f(x), & x \in \mathbb{R} \\ f(0) = 1. \end{cases}$$

Diese ist durch $f(x) = \exp(x) = e^x, x \in \mathbb{R}$, gegeben.

**Beweis:** (i) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Lösung von $(\star)$ (d.h. $f' = \lambda f$) und betrachte

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad g(x) := f(x) \cdot \exp(-\lambda x).$$

Dann gilt mit der Produkt- und Kettenregel, dass

$$\begin{aligned} g'(x) &= f'(x) \cdot \exp(-\lambda x) + f(x) \cdot (\exp(-\lambda x))' \\ &= f'(x) \cdot \exp(-\lambda x) + f(x) \cdot (-\lambda \exp(-\lambda x)) \\ &\overset{f'=\lambda f}{=} \lambda f(x) \cdot \exp(-\lambda x) - \lambda f(x) \cdot \exp(-\lambda x) = 0 \end{aligned}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Nach Satz 5.6.5 (i) muss $g$ also konstant sein. Also existiert $C \in \mathbb{R}$, so dass $g(x) = C$ für alle $x \in \mathbb{R}$, d.h. $f(x) = C \exp(\lambda x)$. Dass umgekehrt jedes $f$ von dieser Form eine Lösung von $(\star)$ ist, rechnet man direkt nach.

(ii) Aus Teil (i) mit $\lambda = 1$ folgt, dass jede Lösung von $f' = f$ von der Form $f(x) = C \cdot \exp(x)$ ist. Genau für $C = 1$ erfüllt diese Funktion $f(0) = 1$.

Wir erhalten schließlich auch noch die schon angesprochenen hinreichenden Kriterien für die Existenz lokaler Extrema.

**Korollar 5.6.8** (Hinreichende Kriterien für lokale Extrema). Es seien $a, b \in \overline{\mathbb{R}}, a < b$ und $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ sei differenzierbar. Ferner sei $x_0 \in (a, b)$ ein stationärer Punkt von $f$, d.h.

$$f'(x_0) = 0.$$

Dann hat $f$ in $x_0$ ein lokales Extremum, falls eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist.

(i) **$f'$ wechselt in $x_0$ das Vorzeichen**. Genauer gilt: $f$ hat in $x_0$ ein lokales Minimum, falls $a \leq \alpha < x_0 < \beta \leq b$ existieren, so dass

$$\forall x \in (\alpha, x_0) : \quad f'(x) \leq 0 \quad \text{und} \quad \forall x \in (x_0, \beta) : \quad f'(x) \geq 0,$$

und ein lokales Maximum, falls

$$\forall x \in (\alpha, x_0) : \quad f'(x) \geq 0 \quad \text{und} \quad \forall x \in (x_0, \beta) : \quad f'(x) \leq 0.$$

(ii) $\mathbf{f''(x_0)}$ **verschwindet nicht**. Genauer gilt: Ist $f$ in $(a,b)$ sogar zweimal differenzierbar[a] und $f''$ ist stetig auf $(a,b)$, so hat $f$ in $x_0$ ein

- lokales Minimum, falls $f''(x_0) > 0$,
- lokales Maximum, falls $f''(x_0) < 0$.

[a] D.h. auch $f'$ ist differenzierbar mit Ableitung $f'' := (f')'$.

**Beweis.** (i) Folgt mit Satz 5.6.5 direkt aus dem Monotonieverhalten von $f$ in der Nähe von $x_0$.

(ii) Sei $f''(x_0) > 0$. Da $f''$ nach Voraussetzung stetig ist, muss $f''$ dann auch in einer Umgebung von $x_0$ positiv sein, d.h. es existieren $a \leq \alpha < x_0 < \beta \leq b$, so dass

$$\forall x \in (\alpha, \beta): \quad f''(x) = (f')'(x) > 0.$$

Nach Satz 5.6.5, angewandt auf $f'$, ist $f'$ somit auf $(\alpha, \beta)$ streng monoton wachsend. Da nach Annahme $f'(x_0) = 0$, folgt also

$$\forall x \in (\alpha, x_0): \quad f'(x) < 0 \quad \text{und} \quad \forall x \in (x_0, \beta): \quad f'(x) > 0.$$

Also sind die Voraussetzungen des ersten Falles erfüllt und $f$ hat in $x_0$ ein lokales Minimum. Im Falle $f''(x_0) < 0$ wird völlig analog argumentiert. □ —Ende VL 29—

## — Zusatzmaterial —

**Zusatz** (Alternativer Beweis von $\exp' = \exp$). Es sei $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge und es sei angenommen, dass die Reihe

$$f(x) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots$$

für alle $x \in (-R, R)$ konvergiert (hier ist $R > 0$ irgendeine feste Zahl). Dann lässt sich zeigen, dass die so definierte Funktion $f : (-R, R) \to \mathbb{R}$ differenzierbar ist und gliedweise differenziert werden darf, d.h.

$$f'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot a_k \cdot x^{k-1}.$$

Für die Exponentialfunktion ergibt dies nun gerade (wegen $a_k = \frac{1}{k!}$), dass

$$\exp'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k!} x^{k-1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k-1)!} x^{k-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n = \exp(x).$$

# Literaturverzeichnis

Die Vorlesung wird sich an keinem einzelnen Lehrbuch orientieren. Die folgende Liste enthält aber eine Reihe von Büchern, die sich als Begleitlektüre zur Vorlesung eignen. Alle sind aus dem Campusnetz online frei einsehbar. Die Bücher [1-5,7,8] sind Standardlehrbücher zur Analysis. Das Buch [6] gibt einen schönen Überblick über die Mathematik und seine Anwendungen. Schließlich ist [9] ein sehr lesbares und nicht zu anspruchsvolles Buch zur Geschichte der Mathematik.

[1] Theodor Bröcker. *Analysis I. 2., korr. Aufl.* Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag, 2., korr. aufl. edition, 1995. Online verfügbar: `https://web.archive.org/web/20160304115246/http://home.arcor.de/brt22071/analysis1.pdf`.

[2] Oliver Deiser. *Analysis 1.* Berlin: Springer, 2011. Online verfügbar: `http://www.aleph1.info/?call=Puc&permalink=analysis1`.

[3] Oliver Deiser. *Erste Hilfe in Analysis. Überblick und Grundwissen mit vielen Abbildungen und Beispielen.* Berlin: Springer Spektrum, 2012. Online verfügbar: `http://www.aleph1.info/?call=Puc&permalink=eha1`.

[4] Otto Forster. *Analysis 1. Differential- und Integralrechnung einer Veränderlichen.* Heidelberg: Springer Spektrum, 12th edition edition, 2016. Aus TU-Campusnetz online verfügbar: `http://link.springer.com/book/10.1007%2F978-3-658-00317-3`.

[5] Daniel Grieser. *Analysis I. Eine Einführung in die Mathematik des Kontinuums.* Wiesbaden: Springer Spektrum, 2015. Aus TU-Campusnetz online verfügbar: `https://link.springer.com/book/10.1007%2F978-3-658-05947-7`.

[6] Ingrid und Joachim Hilgert. *Mathematik – ein Reiseführer.* Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag, 2012. Aus TU-Campusnetz online verfügbar: `http://link.springer.com/book/10.1007%2F978-3-8274-2932-2`.

[7] Thomas Sonar. *Einführung in die Analysis. Unter besonderer Berücksichtigung ihrer historischen Entwicklung für Studierende des Lehramtes.* Wiesbaden: Vieweg, 1999. Aus TU-Campusnetz online verfügbar: `https://link.springer.com/book/10.1007/978-3-322-80216-3`

[8] Christiane Tretter. *Analysis I.* Basel: Birkhäuser, 2013. Aus TU-Campusnetz online verfügbar: `https://link.springer.com/book/10.1007/978-3-0348-0349-6`

[9] Hans Wußing. *6000 Jahre Mathematik. Eine kulturgeschichtliche Zeitreise. 1. Von den Anfängen bis Leibniz und Newton.* Berlin: Springer, 2008. Aus TU-Campusnetz online verfügbar: `http://link.springer.com/book/10.1007%2F978-3-540-77192-0`.