WH: Satz 3.6.: Sei $f \in \mathcal{R}_n$ und gelte

$$m_{\mathcal{R}_n}^{k+1} \subset m_{\mathcal{R}_n}^2 J_f \implies f \text{ ist } k\text{-bestimmt}$$

Beweis in 7 Schritten: 1.) $m^{k+1} \subset m^2 J_f \implies$

$$\forall g: j^k g = j^k f \rightarrow m^{k+1} \subset m J_g$$

2.) Es reicht, zu zeigen, daß $\forall g' \in \mathcal{R}_n: m^{k+1} \subset m J_g$

& $\forall s \in m^{k+1}$ gilt: $\exists \varepsilon > 0: \forall t \in \Delta_\varepsilon$ ist $g' - t \cdot s \underset{R}{\sim} g$

3.) Schreibe $G(x,t) = g' - t \cdot s$, dann ist eine Abb.

$H: U \times \Delta_\varepsilon \rightarrow U$ zu finden mit $0 \in U \subset \mathbb{R}^n$

i) $H(0,t) = 0$, ii) $H(x,0) = x$, iii) $G(H(x,t),t) = g'(x)$

$$\Delta_\varepsilon := \{x \in \mathbb{K} \mid |x| < \varepsilon\}$$

4.) In 3.) reicht es, U und H zu finden, so daß die Bedingungen i), ii) und

$$iii)' := \partial_t(iii)) : \partial_t G(H(\underline{x},t),t) = \partial_t g(x) = 0$$

erfüllt ist. Dies gilt, da $\partial_t G(H(\underline{x},t),t) = 0$ eine gewöhnliche Differentialgleichung mit Koeff. aus $R(G)$ ist und weil durch i) und ii) Anfangsbedingungen gegeben sind. Also iii)': $\partial_t G(H(\underline{x},t),t)$

$$= \sum_{i=1}^{n} (\partial_{x_i} G)(H(\underline{x},t),t) \cdot \partial_t H_i(\underline{x},t) + (\partial_t G)(H(\underline{x},t),t) = 0$$

Bezeichne diese DGL mit $(*)$, wir müssen nun zeigen, daß $(*)$ eine Lösung hat $H(\underline{x},t)$ hat.

5.) Aus $m_R^{k+1} \subset m_R J_{g'}$ folgt: $\exists\, \varphi_1, \dots, \varphi_n \in R_{n+1}$

mit: a) $\varphi_i(0,t) = 0 \quad \forall t$

b) $S = \sum_{i=1}^{n} (\partial_{x_i} G)(\underline{x},t) \cdot \varphi_i(\underline{x},t)$.

Beweis: Verwende folgende Notation:

Sei $I \subset \mathcal{R}_n$ ein Ideal, dann bezeichnet $I\mathcal{R}_{n+1}$ das von I in $\mathcal{R}_{n+1}$ erzeugte Ideal, beachte, daß $\mathcal{R}_n \subset \mathcal{R}_{n+1}$ ein Unterring ist.

Erinnere, daß $G(\underline{x}, t) = g' - t \cdot S \quad S \in m_{\mathcal{R}_n}^{k+1}$

$$\Rightarrow \partial_{x_i} G = \partial_{x_i} g' - t \cdot \overbrace{\partial_{x_i} S}^{m_{\mathcal{R}_n}^{k}} \Rightarrow \partial_{x_i} g' \in \underset{\underset{(\partial_{x_1}G, \dots, \partial_{x_n}G) \subset \mathcal{R}_{n+1}}{\parallel}}{\tilde{J}_G} + (t) \cdot m_{\mathcal{R}_n}^{k} \mathcal{R}_{n+1}$$

$$\Rightarrow J_{g'} \mathcal{R}_{n+1} \subset \tilde{J}_G + (t) \cdot m_{\mathcal{R}_n}^{k} \mathcal{R}_{n+1}$$

Wegen $m_{\mathcal{R}_n}^{k+1} \subset m_{\mathcal{R}_n} J_{g'} \Rightarrow m_{\mathcal{R}_n}^{k+1} \mathcal{R}_{n+1} \subset m_{\mathcal{R}_n} J_{g'} \mathcal{R}_{n+1}$

$$\subset (m_{\mathcal{R}_n} \mathcal{R}_{n+1}) \tilde{J}_G + (t)\, m_{\mathcal{R}_n}^{k+1} \mathcal{R}_{n+1} \subset (m_{\mathcal{R}_n} \mathcal{R}_{n+1}) \tilde{J}_G + m_{\mathcal{R}_{n+1}} m_{\mathcal{R}_n}^{k+1} \mathcal{R}_{n+1}$$

$\overset{\text{Nakayama}}{\Longrightarrow} \quad m_{\mathcal{R}_n}^{k+1} \cdot \mathcal{R}_{n+1} \subset (m_{\mathcal{R}_n} \mathcal{R}_{n+1}) \tilde{J}_G$. Also ist

$S \in \tilde{J}_G \cdot (m_{\mathcal{R}_n} \mathcal{R}_{n+1})$, d.h., $\exists\, \varphi_1, \dots, \varphi_n \in m_{\mathcal{R}_n} \mathcal{R}_{n+1}$

(d.h. $\varphi_i(0, t) = 0 \; \forall t$) mit $\quad S = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(\underline{x}, t) \cdot \partial_{x_i} G(\underline{x}, t)$

6.) Seien $\varphi_i \in m_{R_n} R_{n+1} \subset R_{n+1}$ gegeben, betrachte das System gewöhnlicher Differentialgleichungen

$$\left.\begin{aligned} (\partial_t H_i)(\underline{x},t) &= \varphi_i(H(\underline{x},t),t) \\ H(\underline{x},0) &= \underline{x} \end{aligned}\right\} \quad (**)$$

Die Existenzsätze der Analysis liefern eine eindeutige Lösung von $(**)$ auf $U \times \Delta_\varepsilon$, $0 \in U \subset \mathbb{K}^n$ offen.

und es gilt wegen $H(\underline{x},0) = \underline{x}$, daß für $h_t := H(-,t)$ $\det Dh_t(x) \neq 0$ $\forall x \in U$ und $\forall t \in \Delta_\varepsilon$ nach eventuellem Verkleinern von U und ε.

7.) Aus 5.) folgt: (Erinnerung $G(\underline{x},t) = g'(x) - tS(x)$)

$$S = -(\partial_t G)(\underline{x},t) = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(\underline{x},t) \cdot (\partial_{x_i} G)(\underline{x},t) \quad ; \forall (\underline{x},t) \in U \times \Delta_\varepsilon$$

$$\Rightarrow (\partial_t G)(H(\underline{x},t),t) = -\sum_{i=1}^{n} \varphi_i(H(\underline{x},t),t) \cdot (\partial_{x_i} G)(H(\underline{x},t),t)$$

da $h_t \in G_n \ \forall t \in \Delta_\varepsilon$

$$\overset{6.)}{\Rightarrow} (\partial_t G)(H(\underline{x},t),t) = -\sum_{i=1}^{n} \partial_t H_i(\underline{x},t) \cdot (\partial_{x_i} G)(H(\underline{x},t),t)$$

Dies ist genau die DGL (*) und damit ist Satz 3.6. bewiesen.

$\square$

<u>Lemma 3.8:</u> Seien $f, g \in R_n$ und $f \underset{R}{\sim} g$

a) $\mu(f) = \mu(g)$ (d.h. $\mu(f) < \infty \iff \mu(g) < \infty$ und in diesem Fall sind sie gleich)

b) f ist k-bestimmt $\iff$ g ist k-bestimmt

<u>Beweis:</u> a) Sei $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n) \in G_n$ mit $\varphi^* f = g$, d.h.

$g(x) = f(\varphi(x))$, da G_n Gruppe ist, existiert

$\psi \in G_n$ mit $\varphi \circ \psi = \psi \circ \varphi = Id$, d.h. $f(x) = g(\psi(x))$.

Also $\partial_{x_i} g(x) = \sum_{j=1}^{n} (\partial_{x_j} f)(\varphi(x)) \cdot \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}(x)$, d.h.

$J_g \subset \varphi^* J_f$ und analog ist $J_f \subset \psi^* J_g$

aber da $\varphi^* \circ \psi^* = \psi^* \circ \varphi^* = Id_{R_n}$ ist haben wir

$J_g = \varphi^* J_f$ und $J_f = \psi^* J_g$, also

$$R/J_f \underset{\psi^*}{\overset{\varphi^*}{\rightleftarrows}} R/J_g \Rightarrow \mu(f) = \mu(g)$$

(mit $\cong$ zwischen den Pfeilen)

b) Klar $\varphi \in \mathcal{G}_n \subset \mathcal{R}_n^{\oplus n} \Longrightarrow \varphi^* m^k \subset m^k$

Erinnere, daß $\underset{R}{\sim}$ eine Äquivalenzrelation ist.

Sei f k-bestimmt, zeige, daß g k-bestimmt ist: Sei $S \in m^{k+1}$ und $g' = g + S$, dann ist zu zeigen, daß $g \underset{R}{\sim} g'$ ist. Sei $\varphi \in \mathcal{G}_n$ mit

$$f = \varphi^* g \Rightarrow g' \underset{R}{\sim} \varphi^* g' = \varphi^* g + \varphi^* S = f + \underbrace{\varphi^* S}_{\in m^{k+1}}$$

$$\underset{\substack{R \\ f \text{ ist } k\text{-best.}}}{\sim} f \underset{\text{Vor.}}{\sim} g. \text{ Also } g' \underset{R}{\sim} g. \qquad \square$$

<u>Beispiele zur Berechnung von μ und der Bestimmtheit:</u>

1.) $f = x^k \in \mathcal{R}_1, k > 0 \Rightarrow J_f = (\partial_x f) = (k x^{k-1})$

$= (x^{k-1})$, $\mathcal{R}_1 / J_f \cong \mathbb{K}[x] / (x^{k-1}) = \mathbb{K}\, 1 \oplus \ldots \oplus \mathbb{K}\, x^{k-2}$

$\Rightarrow \mu = \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{R} / J_f = k-1 \Rightarrow f$ ist k-bestimmt

aber f ist nicht $k-1$-bestimmt, denn
$f \not\sim_{k} 0 \Rightarrow$ Bestimmtheit $= k$

2.) $f = x^2 - y^2 \in R_2 \rightsquigarrow J_f = (2x, -2y) = (x, y)$

$R_2 / (x, y) = R_2 / m_{R_2} = \mathbb{K}^1 \Rightarrow \mu(f) = 1$

analog zu 1.): Bestimmtheit $= 2$

Hier haben wir folgende Präzisierung

<u>Lemma 3.9.</u>: Sei $f \in m_{R_n}$, dann gilt

a) $\mu(f) = 0 \iff f \notin m_{R_n}^2$ ($\iff 0$ ist kein krit. Pkt von f)

b) $f \in m^2$: $\mu(f) = 1 \iff f$ hat nicht-entarteten kritischen Punkt bei $x = 0$

<u>Beweis</u>: a) $\mu(f) = 0 \iff J_f = R_n \iff 1 \in J_f$

$\iff \exists i : \partial_{x_i} f \notin m_{R_n} \iff f \notin m_{R_n}^2$

b) „$\Leftarrow$" Das Morse-Lemma sagt:

$\mathcal{R}=\mathcal{E}_n$ $f \sim q := x_1^2+\dots+x_k^2 - x_{k+1}^2 - \dots - x_n^2$ $\quad n-k = \text{Index } D^2 f(0)$

$\mathcal{R}=\mathcal{O}_n$ $f \sim q = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$

$\Rightarrow \mathcal{R}_n / J_f \simeq \mathcal{R}_n / J_q \simeq \mathcal{R}_n / m_{\mathcal{R}_n} \Rightarrow \mu(f) = 1$

„$\Rightarrow$" $\mu(f)=1 \Longleftrightarrow J_f = m_{\mathcal{R}_n}$. Wegen $f \in m_{\mathcal{R}_n}^2$

gilt: $f \sim g + S$, $g = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$, $a_i \in \begin{cases} \{0,1,-1\}, & \mathcal{R}=\mathcal{E}_n \\ \{0,1\}, & \mathcal{R}=\mathcal{O}_n \end{cases}$

$S \in m^3$. zu zeigen ist, daß $\mu(g)=1$ $\left(\Longleftrightarrow a_i \in \begin{cases} 1,-1 \\ 1 \end{cases}\right.$

aus $f \sim g + S$ folgt $J_f \subset J_g + m^2$ (da $\partial_{x_i} S \in m^2$)

also wegen $\mu(f)=1 \Rightarrow m \subset J_f \subset J_g + m^2$

$\xRightarrow{\text{Nakayama}}$ $m \subset J_g$. Natürlich ist $J_g \subset m$ $\square$

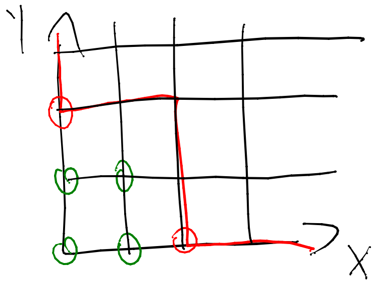
3.) $f = x^2 \pm y^k \in \mathcal{R}_2 \Rightarrow J_f = (x, y^{k-1})$

$\Rightarrow \mathcal{R}_2 / J_f = \mathbb{K}\,\bar{1} \oplus \mathbb{K}\,\bar{y} \oplus \dots \oplus \mathbb{K}\,\overline{y^{k-2}}$

$\Rightarrow \mu(f) = k-1$; f ist k bestimmt f ist nicht k-1-bestimmt, denn $f \not\sim_k x^2$;

Bestimmtheit $= k$

4.) $f = x^3 + y^3 \in R_2$. $\quad J_f = (x^2, y^2)$



$$R_2/J_f = \mathbb{K}\,\bar{1} \oplus \mathbb{K}\,\bar{x} \oplus \mathbb{K}\,\bar{y} \oplus \mathbb{K}\,\overline{xy}$$

$\Rightarrow \mu(f) = 4 \Rightarrow f$ ist 5-bestimmt

<u>Bestimmtheit</u>: f ist nicht 2-bestimmt, da $f \not\sim_k 0$

ist f 4-bestimmt? 3-bestimmt?

$$m \cdot J_f = (x,y)(x^2,y^2) = (x^3, xy^2, yx^2, y^3) = m^3$$

$m^3 \subset m J_f \Rightarrow m^4 \subset m^2 J \xRightarrow{\text{Satz 3.6}} f$ ist 3-bestimmt

(und dann auch 4-bestimmt), Bestimmtheit $= 3$