Notation: $f \in \mathcal{R} = \mathcal{R}_n$ dann heißt

$j_k(f) := \overline{f} \in \mathcal{R} / m_{\mathcal{R}}^{k+1}$ der k-jet von

f. Unter dem Isomorphismus $\mathcal{R} / m_{\mathcal{R}}^{k+1} \to$
$\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]_{\leq k}$ gilt: $j_k(f) = T_f^k$

Definition 3.4: a) Sei $f \in \mathcal{R}_n$, dann bezeichnet

J_f das von den partiellen Ableitungen

$\partial_{x_1} f, \dots, \partial_{x_n} f$ erzeugte Ideal, genannt Jacobiideal

b) $\mathcal{R}/J_f$ heißt Jacobialgebra oder Milnor-
algebra

c) Falls $\mu := \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{R}/J_f < \infty$ ist, dann

heißt μ Milnorzahl von f, geschrieben
$\mu(f)$

Lemma 3.5.: Sei K Körper, $(R, \mathfrak{m})$ lokale K-Algebra

z.B. $R = \begin{cases} R \\ K[[x]] \end{cases}$ und $I \subset R$ ein Ideal. Angenommen, es gelte $\dim_K (R/I) =: r < \infty$. Dann ist $\mathfrak{m}^r \subset I$.

Beweis: $\forall k \in \mathbb{N}$ ist $\mathfrak{m}^k + I \subset R$ ein Ideal und wir haben $\mathfrak{m}^{k+1} + I \subset \mathfrak{m}^k + I$. Betrachte die Quotientenabbildung $\varphi_k : R/\mathfrak{m}^{k+1}+I \twoheadrightarrow R/\mathfrak{m}^k + I$ dann haben wir $\ker \varphi \cong \dfrac{\mathfrak{m}^k + I}{\mathfrak{m}^{k+1}+I}$. Sei

$v_k := \dim_K \ker \varphi_k$, dann gilt:

$$v_k = 0 \iff \frac{\mathfrak{m}^k + I}{\mathfrak{m}^{k+1} + I} = \{0\} \iff \frac{\mathfrak{m}^k}{\mathfrak{m}^k \cap I + \mathfrak{m}^{k+1}} = 0$$

$$\iff \mathfrak{m}^k \subset \mathfrak{m}^k \cap I + \mathfrak{m}^{k+1} \underset{\substack{\text{Lemma von} \\ \text{Nakayama}}}{\iff} \mathfrak{m}^k \subset \mathfrak{m}^k \cap I$$

$$\Updownarrow$$

$$\mathfrak{m}^k \subset I$$

klar: $v_k = 0 \Rightarrow v_{k+1} = 0$, sei $N := \min_k (v_k = 0)$

Jetzt ist $r = \dim_K R/I = \sum_{k\geq 0} \dim \ker \varphi_k = \sum_{k=0}^{N-1} \dim \ker \varphi_k$

aber nach Def. von N ist $\forall k \in \{0, \dots, N-1\}: \dim \ker \varphi_k > 0$

$\Rightarrow r \geq N$. Also $m^r \subset m^N \subset I$ $\square$

Satz 3.6. (Mather 1968): Sei $f \in R_n$ und sei $k \in \mathbb{N}$ s.d.

$m_R^{k+1} \subset m_R^2 \cdot J_f$ gilt, dann ist f k-bestimmt.

Korollar 3.7.: Sei $f \in R_n$ mit $\mu(f) < \infty$, dann

ist f $\mu+1$ bestimmt.

Beweis: Wegen Lemma 3.5. folgt $m_R^\mu \subset J_f$,

dies impliziert $m_R^{(\mu+1)+1} \subset m_R^2 J_f$, also ist f nach

Satz 3.6 $k = \mu+1$ - bestimmt. $\square$

Beispiele:

a) Sei $f = x^2 - y^{k+1} \in \mathcal{R}_2$, dann ist

$$J_f = (2x, -(k+1)y^k) = (x, y^k) \text{ und}$$

$$\mathcal{R}/J_f = \mathbb{K}[[x,y]]/J_f = ?$$

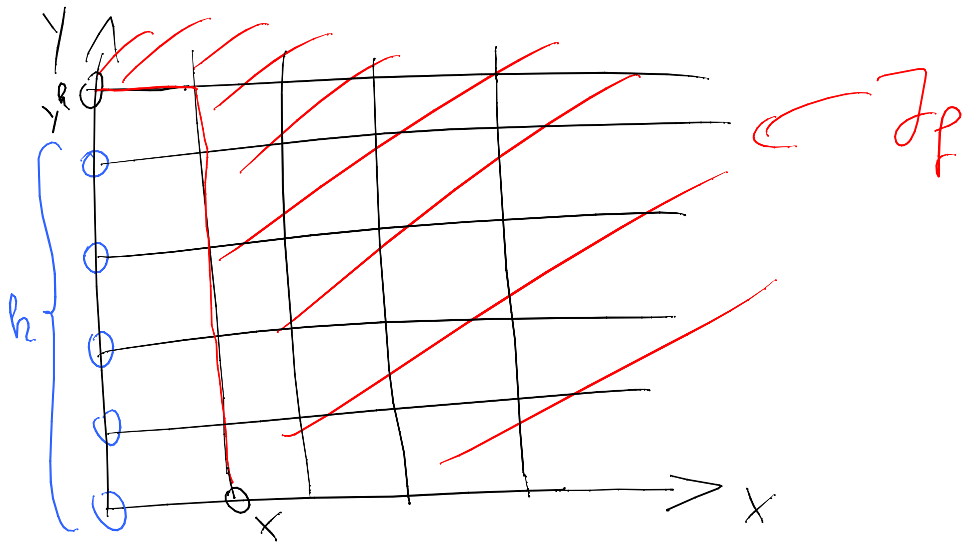
Offensichtlich ist $J_f = (x, xy^{k-1}, x^2y^{k-2}, \dots, x^{k-1}y, x^k, y^k) \supset m_{\mathcal{R}}^k$

$$\Rightarrow \mathcal{R}_2/J_f = \mathbb{K}[[x,y]]/J_f \subset \mathcal{R}_2/m_{\mathcal{R}}^k \simeq \mathbb{K}[[x,y]]/m^k_{\mathbb{K}[x,y]}$$

$$= \mathbb{K}[x,y]/(x,y)^k \quad \Rightarrow \mathcal{R}_2/J_f = \mathbb{K}[x,y]/J_f$$

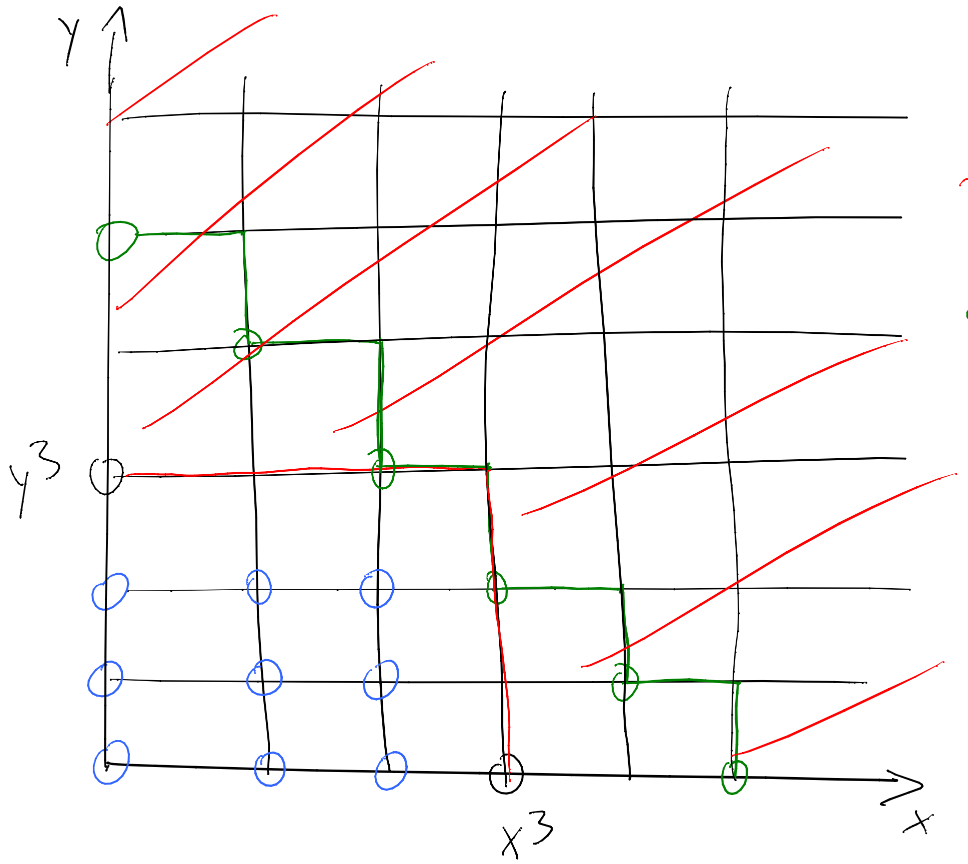
und $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{R}_2/J_f = k$, genauer gilt:

$$\mathcal{R}_2/J_f = \mathbb{K}\cdot[1] \oplus \mathbb{K}[y] \oplus \dots \oplus \mathbb{K}[y^{k-1}]$$



Also folgt mit Satz 3.6: f ist $k+1$-bestimmt. Wir werden später sehen, daß die Bestimmtheit von f auch gleich $k+1$ ist.

b) $f = x^4 + y^4$, $J_f = (4x^3, 4y^3) = (x^3, y^3)$



rot: J_f

grün: $m^5 = m^2 J_f$

$\mu(f) = \dim \mathcal{E}/J_f = 9 \Rightarrow f$ ist 10-bestimmt.

Aber es gilt sogar: $m^5 = m^2 \cdot J_f$, also

$m^5 \subset m^2 J_f \xRightarrow{\text{Satz 3.6.}} f$ ist 4-bestimmt

Klar ist auch: Die Bestimmtheit von f ist 4, denn wäre f 3-best. $\Rightarrow$ $f \sim T^3_f = 0$. ↯

<u>Beweis von Satz 3.6.:</u>

Sei $g \in R$ mit $j^k f = j^k g$, dann ist zu zeigen, daß $f \underset{R}{\sim} g$ gilt.

Beweis in 7 Schritten, Ende erst nächste Vorlesung:

1.) Es ist $f = g + S$, $S \in m^{k+1} \Rightarrow \partial_{x_i} f \in \partial_{x_i} g + m^k$

also $J_f \subset J_g + m^k \Longrightarrow m^2 J_f \subset m^2 J_g + m^{k+2}$

$\overset{\text{Vor. von 3.6}}{\Longrightarrow} m^{k+1} \overset{!}{\subset} m^2 J_f \subset m^2 J_g + m^{k+2} = m^2 J_g + m \cdot m^{k+1}$

$\overset{\text{Nakayama}}{\Longrightarrow} m^{k+1} \subset m^2 J_g \subset m J_g$

Also $\forall g : j^k f = j^k g \Rightarrow m^{k+1} \subset m J_g$

2.) Setze $F(x_1,\dots,x_n,t) := (1-t)\cdot f(\underline{x}) + t g(x)$, dann ist $j^k F = j^k f$ und wir können F als Element in $\mathcal{R}_n[t] \subset \mathcal{R}_{n+1}$ auffassen. Es ist $f = F(\underline{x},0)$ und $g = F(x,1)$, setze außerdem $\forall t \in [0,1]$, $f_t := F(\cdot,t) \in \mathcal{R}_n$

Wir wollen zeigen: $m^{k+1} \subset m^2 J_f \Rightarrow f$ ist k-bestimmt.

<u>Behauptung 1:</u> Es reicht, zu zeigen, daß $\forall t \in \mathbb{K}$

$$\exists \varepsilon > 0 : f_s \underset{R}{\sim} f_t \quad \forall s \in B_\varepsilon(t) = (t-\varepsilon, t+\varepsilon).$$

Dies ist klar, da $[0,1] \subset \mathbb{K}$ kompakt ist, also kann man $[0,1]$ mit endlich vielen offenen Mengen $B_\varepsilon(t) \cap [0,1]$ überdecken und bekommt dann $f_0 = f \underset{R}{\sim} f_1 = g$.

<u>Behauptung 2:</u> Für Behauptung 1 reicht es, zu zeigen, daß gilt: Sei $g' \in \mathcal{R}_n$, $S \in m^{k+1}$ und $m^{k+1} \subset m \cdot J_{g'} \Rightarrow \exists \varepsilon > 0 : g' \underset{R}{\sim} g' - t\cdot S$, $\forall t \in B_\varepsilon(0)$

Dies ist auch klar, denn $\forall t \in \mathbb{K}$ gilt nach 1.) wegen $j^k f_t = j^k f$, daß $m^{k+1} \subset m J_{f_t}$ ist, setze dann $g' = f_t$

3.) Wir wollen also zeigen: $g' \in \mathcal{R}_{n}$, $m^{k+1} \subset m J_{g'}$

$S \in m^{k+1} \Rightarrow \exists \varepsilon > 0 : g' \underset{R}{\sim} g' - t \cdot S \quad \forall t \in \Delta_\varepsilon := \{ z \in \mathbb{K} \,|\, |z| < \varepsilon \}$

Schreibe wieder $G(x,t) := g' - t \cdot S \in \mathcal{R}_{n+1}$

Es reicht jetzt, eine offene Umgebung $0 \in U \subset \mathbb{K}^n$ und eine $\begin{cases} \mathcal{C}^\infty \\ \text{hol.} \end{cases}$ -Abbildung $H : U \times \Delta_\varepsilon \to U$ zu finden mit folgenden Eigenschaften:

$$\left.\begin{array}{l} \text{i)}\ H(\underline{x}, 0) = \underline{x} \\ \text{ii)}\ H(0, t) = 0 \\ \text{iii)}\ G(H(\underline{x}, t), t) = g'(x) \ (= G(\underline{x}, 0)) \end{array}\right\} \forall \underline{x} \in U,\ t \in \Delta_\varepsilon$$

Klar, denn wegen ii) ist $\forall t \in \Delta_\varepsilon$: $h_t = H(-, t) \in G_n$ und wegen iii) ist $g' - t \cdot S \underset{R}{\sim} g'$ $\forall t \in \Delta_\varepsilon$, denn $D h_0 = \mathrm{Id}_n$ (wegen i)) und wegen der Stetigkeit von $\det D h_t$ ist dann nach eventuellem Verkleinern von ε $\det(D h_t) \neq 0$ $\forall t \leq \varepsilon$