7. Vorlesung 30.10.2017

Anwendung des Lemmas von Nakayama:

Prüfe Inklusion von Idealen in R oder $k[[x]]$ mit Hilfe von 2.16 b).

__Beispiel__: Sei $n=2$ und $I=(x,y) \subset k[[x,y]]$

$J = (x+\sin(xy), y+x^2+y^3\cos(x))$, $I, J \subset R$ gegeben. Dann gilt $I \subset J$. Dies ist bemerkenswert, weil man natürlich nur sehr schwer direkt zeigen kann, daß $x, y \in J$ gilt. Aber: Wegen 2.16 b) reicht es, $I \subset J + m \cdot I$ zu zeigen, also hier $I = m \subset J + m^2$. Wir haben $J + m^2 = (x+\sin(xy), y+x^2+y^3\cos(x)) + (x^2, xy, y^2)$

$= (x+\sin(xy), y, x^2, xy) = (x,y)$, da $\sin(xy) \subset (xy)$

Also $J+m^2 = I$ also insgesamt $I \subset J$.

Betrachte die lokalen Ringe $\mathbb{K}[[x]]$ und $\mathcal{R}$

<u>Lemma 2.17:</u> Sei $f \in \mathcal{R}$ und $T_f^k = \sum_{|\nu| \leq k} \frac{D^\nu f(0)}{\nu!} x^\nu$

das k-te Taylorpolynom

a) $\forall k \in \mathbb{N}$ gilt $I_k := \{ f \in \mathcal{R} \mid T_f^{k-1} = 0 \}$ ist Ideal in $\mathcal{R}$, welches von $\{ x^\nu, |\nu| = k \}$ erzeugt wird

b) $I_1 = \{ f \in \mathcal{R} \mid T_f^0 = 0 \} = \{ f \in \mathcal{R} \mid f(0) = 0 \} = m$

c) $I_k = m^k := \underbrace{m \cdot \ldots \cdot m}_{k\text{-mal}} = (a_1 \cdot \ldots \cdot a_k \mid a_i \in m)$

d) $T : \mathcal{R} \to \mathbb{K}[[x]]$ induziert $\forall k \in \mathbb{N}$ einen $\mathbb{K}$-Algebraisomorphismus $\mathcal{R}/m_{\mathcal{R}}^k \xrightarrow{\cong} \mathbb{K}[[x]]/m_{\mathbb{K}[[x]]}^k$

und wir haben $\mathbb{K}[[x]]/m_{\mathbb{K}[[x]]}^k \cong \dfrac{\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]}{(x_1, \ldots, x_n)^k}$

$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{Isomorphismus} \\ \text{von } \mathbb{R}\text{-VR}}}{\cong} \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]_{<k} = \{ g \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n] \mid \deg(g) < k \}$

e) $\dim_{\mathbb{K}} \mathbb{K}[x_1,\dots,x_n] / (x_1,\dots x_n)^k = \dim \mathbb{K}[x_1,\dots,x_n]_{<k}$

$= \binom{n+k}{k}$ und $\dim_{\mathbb{K}} \mathfrak{m}^k / \mathfrak{m}^{k+1}$ ← kom. Ring ohne 1 ← Ideal in $\mathfrak{m}^k$

$= \dim_{\mathbb{K}} \mathbb{K}[x]_{<k+1} / \mathbb{K}[x]_{<k} = \binom{n+k-1}{k}$

f) $\mathrm{Ker}\left(T : \mathcal{R} \to \mathbb{K}[[x]]\right) = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} \mathfrak{m}_{\mathcal{R}}^k =: \mathfrak{m}_{\mathcal{R}}^\infty \subset \mathcal{R}$ ← Ideal

und $\mathcal{R}/\mathfrak{m}^\infty \simeq \mathrm{Im}\, T$ $\mathbb{K}$-Algebrenisomorphismus

g) $\underline{\mathcal{R}=\mathcal{E}}$: T surjektiv, also $\mathcal{E}/\mathfrak{m}_{\mathcal{E}}^\infty \simeq \mathbb{R}[[x]]$

$\underline{\mathcal{R}=\mathcal{O}}$: $\bigcap_{k\in\mathbb{N}} \mathfrak{m}_{\mathcal{O}}^k = (0)$, also $\mathcal{O} \simeq \mathbb{C}\{x\} = \mathrm{Im}\,(T : \mathcal{O} \to \mathbb{C}[[x]])$

<u>Beweis:</u>

a) I_k ist Ideal: klar, denn falls $c, f, g \in \mathcal{R}$

mit $T_f^{k-1} = T_g^{k-1} = 0 \Longrightarrow T_{f+c\cdot g}^{k-1} = 0$

wegen Lemma 1.3 (Darstellungslemma, gilt auch für $\mathcal{R}=\mathcal{O}$)

$T_f^{k-1} = 0 \Rightarrow \forall\, \underline{\nu} \in \mathbb{N}^n\ |\nu| = k : \exists g_{\underline{\nu}} \in \mathcal{R} : f = \sum_{|\underline{\nu}|=k} g_{\underline{\nu}} \cdot x^{\underline{\nu}}$

$\Rightarrow f \in (x^{\underline{\nu}})_{|\underline{\nu}|=k}$

b) klar, dies ist a) im Spezialfall $|\underline{\nu}|=1$

c) auch klar: nach Definition ist $m^k = (x_1,\dots,x_n)^k$

$= (x^{\underline{\nu}} \mid |\underline{\nu}| = k)$

d) Da T lokal (also $T(m_R) \subset m_{\mathbb{K}[[\underline{x}]]}$) und ein Algebrenhomomorphismus ist (insbesondere also $T(fg) = T(f)\cdot T(g)$), folgt $T(m_R^k) \subset m^k_{\mathbb{K}[[\underline{x}]]}$, d.h., die induzierte Abbildung $T: R/m_R^k \to \mathbb{K}[[\underline{x}]]/m^k_{\mathbb{K}[[\underline{x}]]}$ ist ein wohldefinierter Algebrenhomomorphismus.

Dass dies ein Isomorphismus ist, wird erst in f)+g) gezeigt.

Auch klar: $\mathbb{K}[x_1,\dots,x_n] \subset \mathbb{K}[[x_1,\dots,x_n]]$, also

$$\mathbb{K}[\underline{x}]/(x_1,\dots,x_n)^k \subset \mathbb{K}[[\underline{x}]]/m^k_{\mathbb{K}[[\underline{x}]]}$$

Aber $\forall \sum_{\underline{\nu}} a_{\underline{\nu}} x^{\underline{\nu}} \in \mathbb{K}[\underline{x}]$ gilt

$$\Big[\sum_\nu a_\nu x^\nu\Big] = \Big[\underbrace{\sum_{|\nu|<k} a_\nu x^\nu}_{\substack{\cap \\ \mathbb{K}[x]/(x_1,\dots,x_n)^k}}\Big] \text{ in } \mathbb{K}[[x]]/m^k_{\mathbb{R}[[x]]}$$

e) Übungsaufgabe

f) $f \in \ker(T) \iff D^\nu f(0) = 0 \quad \forall \nu \in \mathbb{N}^n$

$\iff \forall k \in \mathbb{N}: T^k_f = 0 \iff \forall k \in \mathbb{N}: f \in I_k = m^k_\mathcal{R} \iff f \in m^\infty_\mathcal{R}$

klar (Homomorphiesatz): $T: \mathcal{R}/m^\infty_\mathcal{R} \cong \operatorname{Im} T$

Wegen $m^k_\mathcal{R} + m^\infty_\mathcal{R} = m^k_\mathcal{R}$ ist dann die induzierte Abbildung $T: \big(\mathcal{R}/m^\infty_\mathcal{R}\big)/m^k_\mathcal{R} = \mathcal{R}/m^k_\mathcal{R} \to \operatorname{Im} T/m^k_{\mathbb{K}[[x]]}$ ein Isomorphismus.

g) $\mathcal{R} = \mathcal{E} \Rightarrow \operatorname{Im} T = \mathbb{R}[[x]] \Rightarrow T: \mathcal{E}/m^\infty_\mathcal{E} \cong \mathbb{R}[[x]]$ &

$\mathcal{E}/m^k_\mathcal{E} \cong \mathbb{R}[x]/(x_1,\dots,x_n)^k$

$\mathcal{R} = \mathcal{O}: m^\infty_\mathcal{O} = (0)$: klar, weil $T: \mathcal{O}_n \to \mathbb{C}[[x]]$ injektiv ist

außerdem ist $\mathbb{C}[x]/(x_1,\dots,x_n)^k \cong \overbrace{\mathbb{C}\{x\}}^{\operatorname{Im} T}/m^k_{\mathbb{C}\{x\}} \cong \mathbb{C}[[x]]/m^k_{\mathbb{C}[[x]]}$

§ 3. Endliche Bestimmtheit

Ziel: a) Definiere Äquivalenzrelation auf $\mathcal{R}$

Idee: $f, g \in \mathcal{R}$, $f \sim g \iff \exists$ Koordinatenwechsel ϕ s.d. $f = g \circ \phi$

b) Def.: f ist k-bestimmt $\iff \forall g: T_f^k = T_g^k$ folgt $f \sim g$

c) f isolierte Sing. bei $0 \Rightarrow f$ ist endlich bestimmt, d.h. $\exists k \in \mathbb{N}$: f ist k-bestimmt

---

Wiederholung: Gruppenwirkungen

Definition 3.1: Sei G eine Gruppe (nicht unbedingt abelsch) und M eine Menge.

a) Eine Abbildung $G \times M \to M$ heißt Gruppenwirkung, falls gilt

i) $(g \cdot h)(x) = g(h(x)) \quad \forall g, h \in G, x \in M$

ii) $id_g(x) = x \quad \forall x \in M$

Man schreibt auch $g.x := g \cdot x := g(x)$

b) Die Relation $x \sim y \Leftrightarrow \exists g \in G: x = g \cdot y$ ist eine Äquivalenzrelation auf M, die Menge der zu x äquivalenten Elemente von M heißt Bahn (Orbit), häufig bezeichnet mit $G \cdot x$, die Menge der Bahnen heißt Bahnen- (oder Orbit-) raum und wird mit M/G bezeichnet

Bsp.: a) $G = (\mathbb{R}^* := \mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$, $M = \mathbb{R}^2$, $G \times M \to M$, $(r, x) \mapsto r \cdot x$

$$\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}^2: Gx = \begin{cases} \{\text{Gerade durch } x\} \setminus \{0\} & \text{falls } x \neq 0 \\ \{0\} & x = 0 \end{cases}$$

$$M/G = \underbrace{\text{Menge der Geraden} \subset \mathbb{R}^2}_{\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}} \cup \{0\}$$

b) $G = Gl(n, \mathbb{C})$, $M = Mat(n \times n, \mathbb{C})$,

$G \times M \to M$; $(T, A) \mapsto TAT^{-1}$

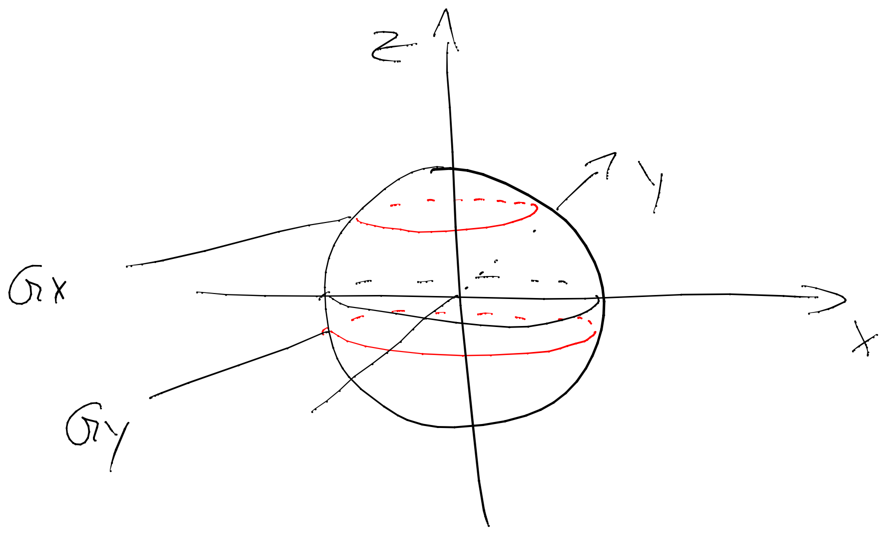
$\Rightarrow G \cdot A = \{$zu A ähnliche Matrizen$\}$

$M/G = \{$Jordannormalformen$\}$

c) $$G = \left\{ \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \;\middle|\; \varphi \in [0, 2\pi) \right\} \subset O(2, \mathbb{R}) \subset M(2 \times 2, \mathbb{R})$$

$$M = S^2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x^2 + y^2 + z^2 = 1 \right\}$$

$$G \times M \to M : \left(A, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right) \longmapsto \left(\begin{array}{cc|c} \multicolumn{2}{c|}{A} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$



$M/G \simeq [-1, 1]$

Jetzt kommen wir zum für die gesamte Vorlesung zentralen Begriff der Rechtsäquivalenz.

<u>Definition/Lemma 3.2:</u> a) Sei $\mathcal{R}_{n,n} := \mathcal{R}_n^n = \mathcal{R}_n \oplus \ldots \oplus \mathcal{R}_n$

$$m^{\oplus n} = m \oplus \ldots \oplus m \subset \mathcal{R}_{n,n}$$

$$G_n := \{ [\varphi] = ([\varphi_1], \ldots, [\varphi_n]) \in m^{\oplus n} \mid \det(D\varphi(0)) \neq 0 \}$$

b) $(G_n, \circ)$ ist eine Gruppe (klar: $D(\varphi \circ \psi)(0)$

$= (D\varphi)(0) \cdot (D\psi)(0)$), und heißt die Gruppe

der $\begin{cases} \text{lokalen Diffeomorphismen } (\mathcal{R}_n = \mathcal{E}_n) \\ \text{lokalen analytischen Diffeomorphismen/} \\ \text{biholomorphen Koordinatenwechseln } (\mathcal{R}_n = \mathcal{O}_n) \end{cases}$

c) G_n operiert auf $\mathcal{R}$ durch

$$G_n \times \mathcal{R}_n \to \mathcal{R}_n$$
$$(\varphi, f) \mapsto (\varphi^{-1})^* f : U \to \mathbb{K},\ x \mapsto f(\varphi^{-1}(x))$$

Beweis einfach, siehe auch Übungsaufgabe 4 auf Blatt 3.

d) Zwei Keime $f, h \in \mathcal{R}_n$ heißen rechtsäquivalent, falls sie in der gleichen $\mathcal{R}_n$-Bahn liegen, d.h., falls $\varphi \in \mathcal{R}_n$ existiert mit $h = \varphi^* f$, man schreibt $f \underset{R}{\sim} g$.

<u>Beispiele</u>:

a) Sei $f \in m^{k-1} \subset \mathcal{R}_1$, aber $f \notin m^k$ (d.h. $f \neq 0$ in m^{k-1}/m^k) dann ist f rechtsäquivalent zu $\varepsilon \cdot x^k$ (Lemma 1.6.)
für $\mathcal{R} = \mathcal{O} \Rightarrow \varepsilon = 1$.

b) Sei $f \in m \subset \mathcal{R}_n$, $(Df)(0) \neq 0$, dann ist f rechtsäquivalent zu x_1 (Lemma 1.7.)

c) Sei $f \in m^2 \subset \mathcal{R}_n$, $\text{Rang}\left(D^2 f(0)\right) = n$, also f nicht-entartet, dann ist $f \sim D^2 f$
(Morse-Lemma, Satz 1.8. nur für $\mathcal{E}_n$ bewiesen, aber Beweis für $\mathcal{O}_n$ gleich)

Nun kommen wir zum eingangs erwähnten Begriff der endlichen Bestimmtheit.

<u>Definition 3.3:</u> Sei $f \in \mathcal{R}_n$

a) Sei $k \in \mathbb{N}$. f heißt k-bestimmt, falls $\forall g \in \mathcal{R}_n$ mit $T_f^k = T_g^k$ gilt: $f \underset{R}{\sim} g$
(klar: f ist k-bestimmt $\Rightarrow$ f ist $k+1$ bestimmt)

b) f heißt endlich bestimmt falls es ein $k \in \mathbb{N}$ s.d. f k-bestimmt ist

c) Sei f endlich bestimmt, dann heißt das kleinste k, s.d. f k-bestimmt ist, die Bestimmtheit (Determinancy) von f.