Lokale Ringe:

6. Vorlesung, 26.10.2017

Definition 2.12: Ein komm. Ring R mit 1 heißt lokal falls er nur ein einziges maximales Ideal besitzt, meistens m oder m_R genannt.

Wir wollen zeigen, daß $R = \begin{cases} \mathcal{E} \\ \mathcal{O} \end{cases}$ und $\mathbb{K}[[x_1, \dots, x_n]]$ lokale Ringe sind, mit den maximalen Idealen $\{[f] \in \mathcal{E} \mid f(0) = 0\}$ bzw. $\left\{ \sum_{\nu \in \mathbb{N}^n \setminus \{0\}} a_\nu \cdot x^\nu \mid a_\nu \in \mathbb{R} \right\}$.

Lemma 2.13: R ist lokal falls

$$NU = \{ a \in R \mid a \notin R^* \}$$

ein Ideal (und dann das maximale Ideal) in R ist. Hierbei ist

$$R^* = \{ a \in R \mid \exists b \in R : a \cdot b = b \cdot a = 1_R \}$$

die Menge der Einheiten (units) von R.

Beweis: in mehreren Schritten

1.) $\forall x \in R: x \in R^\times \Longleftrightarrow (x) = R$: Klar ist:

$R = (1)$ also z.z: $x \in R^\times \Longleftrightarrow (x) = (1)$:

$\Rightarrow$: $x \in R^\times \Rightarrow \exists y \in R: xy = 1 \Rightarrow (1) \subset (x)$, aber

$(x) \subset (1) = R$ ist klar

$\Leftarrow$: $(1) \subset (x) \Rightarrow \exists y \in R: x \cdot y = 1 \Rightarrow x \in R^\times$

2.) $$NU = \bigcup_{\substack{m \text{ max. Ideal} \\ \text{in } R}} m$$

„$\subseteq$": Verwende das Lemma von Zorn (Mengentheorie, Auswahlaxiom), welches impliziert, das $\forall J \subsetneq R$ gilt: $\exists$ maximales Ideal $m \subset R$ mit $J \subset m \Rightarrow \forall x \in NU$ $\exists m \subset R$ max. Ideal, $(x) \subset m$, also $x \in \bigcup_{m \text{ max}} m$

„$\supseteq$": Sei $m \subset R$ maximal und $x \in m$

z.z. $x \in NU$, d.h., $x \notin R^*$, wegen 1.) haben wir $x \notin R^* \Leftrightarrow (x) \subsetneq R$, aber $(x) \subsetneq R$ ist klar, denn $(x) \subset m \subsetneq R$, denn m ist maximal.

3.) Die Implikation „$\Rightarrow$" von Lemma 2.13. gilt: Sei R lokal mit maximalem Ideal $m \subset R \Rightarrow NU = \bigcup_{m \text{ max}} m = m$

4.) Sei $NU \subset R$ ein Ideal, dann ist es maximal: Sei $NU \subset I \subset R$, dann gilt: $NU \subsetneq I \Rightarrow \exists x \in I, x \notin NU$, d.h., $x \in R^* \Rightarrow (x) = R$ aber wegen $(x) \subset I$ $\Rightarrow I = R$, also ist NU ein maximales Ideal

5.) Die Inklusion „$\supseteq$" in Lemma 2.13. gilt auch: Sei $\mathfrak{m} \subset R$ maximal und $\mathfrak{m} \neq \mathrm{Nil}$ dann gilt $\mathfrak{m} \not\subset \mathrm{Nil}$, d.h. $\exists\, x \in \mathfrak{m},\ x \notin \mathrm{Nil}$, also $x \in R^* \Rightarrow R = (x) \subset \mathfrak{m}$ ↯ $\mathfrak{m}$ maximal

$\square$

Wir können jetzt Lemma 2.13. verwenden, um zu zeigen, daß $\mathcal{R}$ und $\mathbb{K}[[x_1,\dots,x_n]]$ lokale Ringe sind.

<u>Lemma 2.14.</u>: a) $[f] \in \mathcal{R}$ ist Einheit $\Leftrightarrow f(0) \neq 0$

b) $\sum a_\nu x^\nu \in (\mathbb{K}[[x_1,\dots,x_n]])^* \Leftrightarrow a_{\underline{0}} \neq 0$

c) $\mathcal{R}$ und $\mathbb{K}[[x_1,\dots,x_n]]$ sind lokal mit max. Id.

$\mathfrak{m}_{\mathcal{R}} := \{[f] \in \mathcal{R} \mid f(0) = 0\}$ und $\mathfrak{m}_{\mathbb{K}[[\underline{x}]]} = \{\sum_{\nu \in \mathbb{N}^n \setminus 0} a_\nu x^\nu \mid a_\nu \in \mathbb{K}\}$

Außerdem ist die Taylorabbildung

$T: \mathcal{R} \to \mathbb{K}[[x_1,\dots,x_n]]$ lokal, d.h. $T(\mathfrak{m}_{\mathcal{R}}) \subset \mathfrak{m}_{\mathbb{K}[[\underline{x}]]}$

<u>Beweis</u>: a) Falls $f(0)=0$ und falls $[g] \in R$ existiert mit $[f]\cdot[g]=[fg]=1 \Rightarrow ↯$ da dann $f(0)\cdot g(0)=1$ sein müßte. Dies zeigt „$\Rightarrow$".

„$\Leftarrow$": Sei $[f] \in R$ mit $f(0) \neq 0$, dann existiert

$U \ni 0$, $f(x) \neq 0 \ \forall x \in U \Rightarrow g(x) := \dfrac{1}{f(x)} \in \overbrace{R(U)}^{C^\infty(U),\ C^0(U)}$ und

$f \cdot g_{|U} = 1_{|U} \Rightarrow [g]\cdot[f] = [1]$ in R

b) $a_0 = 0 \Rightarrow \forall \sum\limits_{\underline{k}} b_{\underline{k}} x^{\underline{k}} \Rightarrow \left(\sum\limits_{\underline{l}} a_{\underline{l}} x^{\underline{l}}\right)\left(\sum\limits_{\underline{k}} b_{\underline{k}} x^{\underline{k}}\right)$

$= \sum c_{\underline{\nu}} x^{\underline{\nu}}$ mit $c_0 = 0$, also

ist $\sum a_{\underline{l}} x^{\underline{l}}$ keine Einheit

Falls $a_0 \neq 0$, dann existiert $\sum\limits_{\underline{k} \in \mathbb{N}^n} b_{\underline{k}} \cdot x^{\underline{k}}$ mit

$\left(\sum\limits_{\underline{l}} a_{\underline{l}} x^{\underline{l}}\right)\left(\sum\limits_{\underline{k}} b_{\underline{k}} x^{\underline{k}}\right) = 1$ (Übung)

c) Aus Lemma 2.13. folgt jetzt, daß (R, m_R) und $(\mathbb{K}[[x]], m_{\mathbb{K}[[x]]})$ lokal sind und offensichtlich ist $T(f) \subset m_{\mathbb{K}[[x]]}$ falls $f(0)=0$ gilt, also ist auch T lokal.

Wir kommen jetzt zu einem wichtigen Struktursatz über Moduln über lokalen Ringen.

Zunächst einige Notationen.

<u>Definition/Lemma 2.15:</u> R komm. Ring mit 1

a) Sei M ein R-Modul, $A \subset M$ Teilmenge, dann heißt $R \cdot A := \left\{ \sum_{i=1}^{k} r_i \cdot m_i \,\middle|\, k \in \mathbb{N}, r_i \in R, m_i \in A \right\}$ der von A erzeugte Untermodul. M heißt endlich erzeugt, falls $\exists\, A \subset M$ endlich s.d. $R \cdot A = M$

b) Falls N und M mit $N \subset M$ R-Moduln sind, ist M/N auch ein R-Modul

c) Sei M ein R-Modul, $I \subset R$ Ideal, dann ist $I \cdot M = \{\sum r_i m_i \mid r_i \in I, m_i \in M\}$ ein R-Modul und $M/I \cdot M$ ist ein R/I-Modul

Beweis einfach.

Satz 2.16. (Lemma von Nakayama)

Sei (R, m) ein lokaler Ring.

(a) Sei A ein endlich erzeugter R-Modul und gelte $A \subset m \cdot A \Longrightarrow A = \{0\}$

(b) Sei A R-Modul, $B \subset A$ und $C \subset A$ Untermoduln s.d. B endl. erzeugt ist, dann folgt aus $B \subset C + mB \Rightarrow B \subset C$

(c) A endlich erzeugter R-Modul, dann gilt:

$A = R\{a_1, \dots, a_k\} \Leftrightarrow$ Die Restklassen $[a_1], \dots, [a_k]$ erzeugen den R/m-Vektorraum A/mA

Körper

<u>Wichtig besonders:</u> „$\Leftarrow$" in (c). Jeder Lift einer Basis $[a_1], \dots, [a_k]$ von A/m_R gibt ein Erzeugendensystem von A.

<u>Beweis:</u> (a) Sei $\{a_1, \dots, a_k\}$ ein Erzeugendensystem von A.

$$A \subset m_R \cdot A \Rightarrow \forall i \in \{1, \dots, k\} : \overset{A}{a_i} = \sum_{j=1}^{k} b_{ij} \cdot a_j$$

mit $b_{ij} \in m_R$. In Matrixschreibweise gilt

dann: $$\left(\underset{\substack{\uparrow \\ \text{Einträge in } R}}{Id_k} - (b_{ij}) \right) \begin{pmatrix} a_1 \\ | \\ a_k \end{pmatrix} = 0$$

Aus der Leibniz-Formel für die Determinante folgt, daß $\det(\mathrm{Id}_k - (a_{ij})) = 1 + c$, $c \in m_R$ gilt. Daher ist $\det(\mathrm{Id}_k - (a_{ij})) \in R^*$ (Übung) und dann existiert eine inverse Matrix Y

(Fakt: R Ring, $X \in M(k \times k, R)$, $\det(X) \in R^*$
$\Leftrightarrow \exists\, Y \in M(k \times k, R) : X \cdot Y = Y \cdot X = \mathrm{Id}_k$)

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a_1 \\ | \\ a_k \end{pmatrix} = \underbrace{Y \cdot (\mathrm{Id}_k - (a_{ij}))}_{\mathrm{Id}_k} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ | \\ a_k \end{pmatrix} = 0$$

$\Rightarrow a_1 = \ldots = a_k = 0 \quad \Rightarrow A = 0$

(b) Betrachte die Summe $B + C = \{b + c \mid b \in B, c \in C\}$, dies ist ein R-Untermodul von A und $C \subset B+C$, daher ist $\frac{B+C}{C}$ auch ein R-Modul, und sogar endlich erzeugt (da B endlich erzeugt ist).

Jetzt gilt:

$$B \subset C + mB \Longrightarrow B + C \subset C + mB + C = C + mB$$

$$\Longrightarrow \frac{B+C}{C} \subset \frac{C+mB}{C} \simeq m\frac{C+B}{C}$$

also $\frac{B+C}{C} \subset m\frac{B+C}{C} \overset{(a)}{\Longrightarrow} \frac{B+C}{C} = \{0\}$

also $B + C = C \Longrightarrow B \subset C$

(c) „$\Longrightarrow$": folgt aus 2.15 c)

„$\Longleftarrow$": Sei $\frac{A}{mA} = \frac{R}{m} \cdot \{[a_1], \dots, [a_k]\}$

wegen (b) reicht es, zu zeigen, daß gilt

$$A = R\{a_1, \dots, a_k\} + m \cdot A$$

(dann $A \subset R\{a_1 .. a_k\}$; $\supset$ ist klar)

Sei also $a \in A$ gegeben $\Longrightarrow \exists\, r_1, \dots, r_k \in R$ s.d.

$$\underset{A/mA}{[a]} = \sum_{i=1}^{k} [r_i] \cdot [a_i] \Longrightarrow a = \sum_{i=1}^{k} r_i \cdot a_i + mA$$