"$\Rightarrow$": Aus dem Darstellungslemma (Lemma 1.4.) folgt, daß es glatte Funktionen $g_{ij}: U \to \mathbb{R}$ gibt, s.d. $f(x) = \sum_{i,j=1}^{n} x_i x_j \cdot g_{ij}(x)$ gilt, und $g_{ij}(x) = g_{ji}(x)$

Sei $G = (g_{ij}(x))_{i,j} : U \to Sym(n, \mathbb{R})$ die entsprechende Matrix, dann gilt $G(0) = D^2 f(0)$ und $f(x) = x^{tr} \cdot G \cdot x$, $x = (x_1, \dots, x_n)^{tr}$. Das Ziel ist es jetzt einen lokalen Diffeomorphismus zu finden, welcher G in eine konstante Diagonalmatrix, welche nur 1 und -1 als Diagonalelemente hat, transformiert. Zunächst ist klar: $\exists\, S \in Gl(n, \mathbb{R})$, so daß $S^{tr} \cdot G(0) \cdot S = D := \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_k, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_l)$ mit $\lambda_i = 1$, $\varepsilon_j = -1$, $k + l = n$ und $l = \mathrm{Index}(G(0))$.

Sei $T(n, \mathbb{R})$ der Raum der oberen Dreiecksmatrizen

Betrachte die Abbildung

$$\alpha: \mathcal{T}(n,\mathbb{R}) \longrightarrow \mathrm{Sym}(n,\mathbb{R})$$
$$T \longmapsto (S\cdot T)^{tr}\cdot G(0)\cdot(S\cdot T)$$
$$= T^{tr}\cdot(S^{tr}\cdot G(0)\cdot S)\cdot T = T^{tr}\cdot D\cdot T$$

Offensichtlich ist $Id \in \mathcal{T}(n,\mathbb{R})$ und

$$\alpha(Id) = S^{tr}\cdot G(0)\cdot S = D.$$

Außerdem sind $\mathcal{T}(n,\mathbb{R})$ und $\mathrm{Sym}(n,\mathbb{R})$ beides $\frac{1}{2}n(n+1)$-dimensionale $\mathbb{R}$-Vektorräume, also kann man α als glatte Abbildung von $W_1 \subset \mathcal{T}(n,\mathbb{R})$ nach $W_2 \subset \mathrm{Sym}(n,\mathbb{R})$ betrachten, wobei W_1 bzw. W_2 kleine offene Umgebungen von Id bzw. $D = S^{tr}\cdot G(0)\cdot S$ sind. Dann ist $D\alpha(Id)$ eine lineare Abbildung von $\mathcal{T}(n,\mathbb{R})$ nach $\mathrm{Sym}(n,\mathbb{R})$, geg. durch $D\alpha(Id)(T) = (S\cdot T)^{tr}\cdot G(0) + G(0)\cdot S\cdot T$, und daher injektiv und auch surjektiv (Beweis: Übung).

hier geht $\det G(0) \neq 0$ ein.

Also ist α bei $\mathrm{Id} \in \tilde{C}(n,\mathbb{R})$ ein lok. Diffeo. mit Umkehrung β, d.h. $\exists\, 0 \in V \subset U$ klein, s.d. $\forall x \in V$ gilt: $G(x) = \left((\beta \circ G)(x)\right)^{tr} \cdot D \cdot (\beta \circ G)(x)$. Definiere dann $\phi : V \to V$, $x \mapsto \left(\beta \circ G(x)\right) \cdot x =: y$, klar: ϕ ist glatt.

Wir haben: $\phi(0) = 0$ und $(D\phi)(0) = (\beta \circ G)(0) = S^{-1} \in Gl(n,\mathbb{R}) \Rightarrow \phi$ ist lokaler Diffeo. bei $0 \in V$ mit Umkehrung $x := \psi(y)$. Wir haben $\forall x \in V$

$$f(x) = x^{tr} \cdot G(x) \cdot x = x^{tr} \cdot \left[\left((\beta \circ G)(x)\right)^{tr} \cdot D \cdot (\beta \circ G)(x)\right] \cdot x$$
$$= \left((\beta \circ G)(x) \cdot x\right)^{tr} \cdot D \cdot \left((\beta \circ G)(x) \cdot x\right)$$
$$= \phi(x)^{tr} \cdot D \cdot \phi(x)$$

Also ist $f(\psi(y)) = y^{tr} \cdot D \cdot y = y_1^2 + \ldots + y_k^2 - y_{k+1}^2 - \ldots - y_n^2$

$\square$

§2. Abbildungskeime, Taylorentwicklung lokale Ringe und das Lemma von Nakayama

<u>Ziel</u>: Präzise Sprechweise für lokale Untersuchungen

Benötigt werden Grundbegriffe der Algebra wie:

Ringe, Ideale, Moduln, maximale Ideale etc.

<u>Definition 2.1</u>: Sei R ein Ring. Ein Ring S heißt R-Algebra, falls es einen Ringhomomorphismus $R \to S$ gibt. Anders formuliert: Ein R-Modul S mit Multiplikation, welche mit Skalarmult. $R \times S \to S$ kompatibel ist, heißt R-Algebra.

<u>Def.-Lemma 2.2</u>: Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, setze:

$$\mathcal{C}^\infty(U) := \{ f : U \to \mathbb{R} \mid f \text{ bel. oft differenzierbar} \}$$

Dann ist $\mathcal{C}^\infty(U)$ $\mathbb{R}$-Algebra mit punktweiser Addition und Multiplikation. $\forall\, V \subset U$ $\exists$ Restriktionsabbildungen

$$\rho^U_V : \mathcal{C}^\infty(U) \to \mathcal{C}^\infty(V) \quad (\mathbb{R}\text{-Algebren-Homomorphismus})$$

& $\forall\, W \subset V \subset U$ gilt: $\rho^U_W = \rho^V_W \circ \rho^U_V$

<u>Definition 2.3.</u> (Mengen- und Abbildungskeime)

i) Seien $A, B \subset \mathbb{R}^n$ (allgemeiner, $A, B \subset X$, wobei X ein topologischer Raum ist.) und $p \in \mathbb{R}^n$. Wir sagen, daß $A \overset{p}{\sim} B$ gilt, falls $\exists$ offene Umgebung U von p, s.d. $A \cap U = B \cap U$ gilt. Dies ist Äquivalenzrelation auf $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n) = \{A \subset \mathbb{R}^n\}$. Schreibe (A, p) für die Äquivalenzklasse von A bzgl. $\overset{p}{\sim}$. (A, p) heißt der (Mengen-) Keim von A bei p.

ii) Sei $Y \subset \mathbb{R}^m$ offen, $f : A \to Y$ und $g : B \to Y$ beliebige Abbildungen und $p \in \mathbb{R}^n$. Dann definieren wir

$f \sim g \Leftrightarrow \exists\, U$ off. Umgebung von p in $\mathbb{R}^n$ s.d. $f_{|U} = g_{|U}$. Die Äquivalenzklasse von f bzgl. $\sim$ heißt (Abbildungs-) Keim von f bei p, geschrieben (f,p) oder $[f]_p$

Lemma 2.4. (Übungsaufgabe)

i) Seien $A, B \subset \mathbb{R}^n$, $p \in \mathbb{R}^n$ und $(A,p), (B,p)$ Keime

$(A,p) \cap (B,p)$ ist wohldefiniert, und es gilt:

$(A,p) \cap (B,p) = (A \cap B, p)$

ii) analog: $A \subset \mathbb{R}^n$, $B \subset \mathbb{R}^m$, $p \in \mathbb{R}^n$, $q \in \mathbb{R}^m$, dann

ist $(A,p) \times (B,q)$ wohldefiniert

iii) Ein Keim bei p einer Abbildung $f: A \to Y$ hat einen wohldef. Definitionskeim (A,p), man schreibt $f: (A,p) \to (Y, f(A))$

Lemma 2.5: Sei $p \in \mathbb{R}^n$, dann ist die Menge

$$\mathcal{E}_{\mathbb{R}^n, p} := \mathcal{E}_p := \{ [f]_p \mid f \in C^\infty(U) \text{ für } U \text{ offene Umg. von } p \}$$

in natürlicher Weise eine $\mathbb{R}$-Algebra und

$m_p := \{ [f]_p \mid f(p) = 0 \} \subset \mathcal{E}_p$ ist ein maximales Ideal.

Beweis: Seien $[f]_p, [g]_p \in \mathcal{E}_p$ und $a \in R$ gegeben, dann sind $[f]_p$ und $[g]_p$ Äquivalenzklassen von Abbildungen $f: U_1 \to \mathbb{R}$ und $g: U_2 \to \mathbb{R}$ mit $p \in U_1$ und $p \in U_2$. Setze dann $[f]_p + [g]_p := [f_{|V} + g_{|V}]_p$ wobei $V = U_1 \cap U_2 \ni p$. Genauso: $[f]_p \cdot [g]_p = [f_{|V} \cdot g_{|V}]_p$ und $a \cdot [f]_p := [a \cdot f]_p$. Sei $1_{\mathcal{E}_p} := [1]_p$, $1: U \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 1$ also ist $\mathbb{R} \to \mathcal{E}_p$, $a \mapsto a \cdot [1]_p$ ein Ringhomomorphismus.

m_p Ideal: klar. maximal: Sei $m_p \subseteq I \subsetneq \mathcal{E}_p \Rightarrow \exists [f]_p \in I$ s.d. $f(p) \neq 0 \Rightarrow \exists$ Repr. $f: U \to \mathbb{R}$: $f(x) \neq 0$ $\forall x \in U \Rightarrow [1/f]_p \in \mathcal{E}_p$

$\Rightarrow [f]_p \in \mathcal{E}_p^* \Rightarrow I = \mathcal{E}_p$ ↯ $\Rightarrow m_p$ ist maximal

Lemma 2.6.:

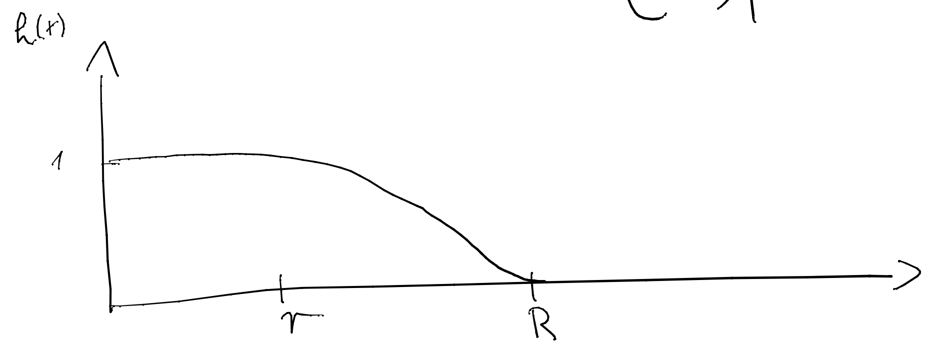
Sei $p \in \mathbb{R}^n$, dann ist die Abbildung

$$\phi : C^\infty(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{E}_p := \{[f]_p \mid f \in C^\infty(U), p \in U\} \text{ surjektiv.}$$

$$f \longmapsto [f]_p$$

Beweis: Wähle $r, R \in \mathbb{R}_{>0}$ beliebig mit $r < R$. Definiere $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch

$$h(t) := \begin{cases} 0 & \forall\, t \geq R \\ \left(1 + e^{\frac{1}{r-t} + \frac{1}{R-t}}\right)^{-1} & \forall\, t \in (r, R) \\ 1 & \forall\, t \leq r \end{cases}$$



Behauptung: h ist glatt ($h \in C^\infty(\mathbb{R})$).

Beweis analog zu Beispiel in Kapitel 0.

Sei jetzt $[f]_p \in \mathcal{E}_p$ gegeben, dann existiert nach Definition eine offene Umgebung U von p und ein Repräsentant $f \in C^\infty(U)$ des Keimes $[f]_p$.

Wähle R, s.d. $B_p(R) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x-p| < R\} \subset U$

Definiere $g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ durch

$$g(x) = \begin{cases} h(|x-p|) \cdot f(x) & \forall x \in U \\ 0 & \forall x \notin U \end{cases}$$

hierbei ist $|x| := \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2}$ die euklidische Norm.

Klar: $g \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ und $g(x) = f(x)$ für alle $x \in B_p(r) \subset B_p(R) \subset U$.

Also gilt $[g]_p = [f]_p$, d.h. $\Phi(g) = [f]_p$

$\square$