3. Vorlesung
16.10.17

Lemma 1.4. (Darstellungslemma):

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ sternförmig mit Zentrum $p \in U$ und $f: U \to \mathbb{R}$ glatt. Sei $k \in \mathbb{N}_{>0}$ so gewählt, daß $\forall \ell \in \{0, \dots, k-1\}$ $D^\ell f(p) = 0$. Dann existieren glatte Funktionen

$g_{i_1 \dots i_k}: U \to \mathbb{R}$, $\forall$ Tupel $(i_1, \dots, i_k) \subset \{1, \dots, n\}$, so daß gilt:

1.) $g_{i_1 \dots i_k} = g_{\sigma(i_1) \dots \sigma(i_k)}$, $\forall \sigma \in S_k$

2.) $$f(x) = \sum_{i_1 = \dots = i_k = 1}^{n} g_{i_1 \dots i_k} \prod_{j=1}^{k} (x_{i_j} - p_{i_j})$$

Insbesondere (Fall $k=1$): $f(p) = 0 \Rightarrow f(x) = \sum_{i=1}^{n} g_i(x)(x_i - p_i)$

und (Fall $k=2$): $f(p) = f'(p) = 0 \Rightarrow f(x) = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}(x)(x_i - p_i)(x_j - p_j)$.

$g_{ij}: U \to \mathrm{Sym}(n, \mathbb{R})$.

Außerdem gilt: $g_{i_1 \dots i_k}(p) = \frac{1}{k!} \left(\partial_{x_{i_1}} \dots \partial_{x_{i_k}} f \right)(p)$

MORAL: Falls die ersten k-1 Ableitungen einer Funktion verschwinden, beginnt die Taylorentwicklung erst beim k-ten Term.

Beweis: Es reicht, den Fall $p=0$ zu behandeln (sonst $f(x) \mapsto f(x-p)$). Fixiere $x \in U$ und definiere $F:[0,1]\to\mathbb{R}$ durch $F(t) = f(t\cdot x) \Rightarrow F(0) = f(0) = 0$ und $F(1) = f(x)$. Es gilt nach Kettenregel $F'(t) =$

$$\sum_{i=1}^n x_i \cdot (\partial_{x_i} f)(t\cdot x),\quad F^{(2)}(t) = \sum_{i,j=1}^n x_i x_j \cdot (\partial_{x_i}\partial_{x_j} f)(tx), \ \dots$$

$$F^{(\ell)}(x) = \sum_{i_1 = \dots = i_\ell = 1}^n x_{i_1}\cdots x_{i_\ell} \cdot (\partial_{x_{i_1}} \cdots \partial_{x_{i_\ell}} f)(tx).$$ Nun gilt

$$\forall \ell \le k:\ F^{(\ell-1)}(s) = \int_0^s F^{(\ell)}(t)\,dt \quad \forall s \in [0,1],\ \ell\in\mathbb{N}$$

$$\Big(= F^{(\ell-1)}(s) - \underbrace{F^{(\ell-1)}(0)}_{=\sum x_{i_1}\cdots x_{i_{\ell-1}} \underbrace{\partial_{i_1}\cdots\partial_{i_{\ell-1}} f(0)}_{0}}\Big)$$

also $\forall\ 0 \le t_0 \le t_1 \le \dots \le t_k \le 1$ haben wir

$$F^{(k-1)}(t_1) = \int_0^{t_1} F^{(k)}(t_0)\,dt_0,\quad F^{(k-2)}(t_2) = \int_0^{t_2} F^{(k-1)}(t_1)\,dt_1,$$

$$\dots,\ F(t_k) = \int_0^{t_k} F'(t_{k-1})\,dt_{k-1}$$

Falls also $t_k = 1$:

$$\Longrightarrow F(1) = f(x) = \int_0^1 \dots \int_0^{t_1} F^{(k)}(t_0)\,dt_0\,dt_1 \dots dt_{k-1} \qquad (*)$$

Setze jetzt $\forall\, i_1,\dots,i_k \in \{1,\dots,n\}$:

$$g_{i_1\dots i_k}(x) = \int_0^1 \int_0^{t_{k-1}} \dots \int_0^{t_1} \left(\partial_{x_{i_1}} \dots \partial_{x_{i_k}} f\right)(t_0 x)\, dt_0\, dt_1 \dots dt_{k-1}$$

und erinnere, daß $F^{(k)}(t) = \sum\limits_{i_1,\dots,i_k \in \{1\dots n\}} \left(\partial_{x_{i_1}} \dots \partial_{x_{i_k}} f\right)(t\cdot x) \cdot x_{i_1} \cdots x_{i_k}$

dann folgt aus $(*)$: $f(x) = \sum\limits_{i_1,\dots,i_k \in \{1,\dots,n\}} g_{i_1\dots i_k}(x) \cdot x_{i_1} \cdots x_{i_k}$

noch zu zeigen: $g_{i_1\dots i_k}(x)$ sind glatt: dies ist klar, da ∂_{x_j} und $\int_0^{t_\ell}$ vertauschen.

Auch klar: $g_{i_1\dots i_k} = g_{\sigma(i_1)\dots\sigma(i_k)}$ wegen $\partial_{x_i}\partial_{x_j} = \partial_{x_j}\partial_{x_i}$

Berechne $g_{i_1\dots i_k}(0)$: Benutze, daß

$$f(x) = \sum_{i_1\dots i_k=1}^{n} g_{i_1\dots i_k}(x)\, x_{i_1} \cdots x_{i_k}$$ gilt und

$$\partial_{j_1} \dots \partial_{j_k} \left(g_{i_1 \dots i_k}(x) x_{i_1} \cdot \dots \cdot x_{i_k} \right)(0) = \begin{cases} g_{i_1 \dots i_k}(0) & \text{falls } (j_1 \dots j_k) = \sigma(i_1 \dots i_k),\ \sigma \in S_k \\ 0 & \text{falls } (j_1, \dots, j_k) \neq \sigma(i_1 \dots i_k) \end{cases}$$

wegen $|S_k| = k!$, erhalten wir $g_{i_1 \dots i_k}(0) = \frac{1}{k!} \left(\partial_{i_1 \dots i_k} f \right)(0)$. $\square$

<u>Korollar 1.5.</u> (Taylorentwicklung) Sei $f : U \to \mathbb{R}$ glatt, schreibe

$$T^k_{f,p}(x) = \sum_{0 \leq |\underline{\alpha}| \leq k} \frac{D^{\underline{\alpha}} f}{\underline{\alpha}!}(p)\,(x-p)^{\underline{\alpha}}$$

für das k-te Taylorpolynom, wobei $\underline{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, $|\underline{\alpha}| = \sum_{i=1}^n a_i$, $\underline{\alpha}! = \alpha_1! \cdot \dots \cdot \alpha_n!$. Dann gilt

$$f(x) = T^{k-1}_{f,p}(x) + R(x)$$

mit $R(x) = \sum_{i_1 \dots i_k = 1}^n g_{i_1 \dots i_k}(x)\,(x_{i_1} - p_{i_1}) \cdot \dots \cdot (x_{i_k} - p_{i_k})$

und $g_{i_1 \dots i_k}(x) = \int_0^1 \int_0^{t_{k-1}} \dots \int_0^{t_1} \left(\partial_{x_{i_1}} \dots \partial_{x_{i_k}} f \right)(p + (x-p)t_0)\, dt_0 \dots dt_{k-1}$

und $|R(x)| \le \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i - p_i|\right)^k \cdot \frac{1}{k!} \sup_{\substack{t,\alpha:|\alpha|=k \\ t\in[0,1]}} \left|D^\alpha f(p+(x-p)t)\right|$

<u>Beweis:</u> Offensichtlich ist $D^\ell\left(f(x)-T^{k-1}_{f,p}(x)\right)(p)=0$ $\forall \ell=0,\dots,k-1 \Rightarrow$ Wende Lemma 1.4. auf $R(x)$ an.

$$\Rightarrow |R(x)| \le \underbrace{\sup_{(i_1..i_k)} |g_{i_1..i_k}(x)|} \cdot \overbrace{\left|\sum (x_{i_1}-p_{i_1})\cdot\ldots\cdot(x_{i_k}-p_{i_k})\right|}^{\left(\sum|x_i-p_i|\right)^k}$$

$$\to \le \sup_{t,\alpha} \left|D^\alpha f(p+(x-p)t)\right| \cdot \overbrace{\left|\int_0^1 \dots \int_0^{t_1} dt_0 \dots dt_{k-1}\right|}^{1/k!}$$

□

Eine weitere Anwendung des Darstellungslemmas:

<u>Lemma 1.6.:</u> Sei $0 \in U \subset \mathbb{R}$ offen und $f: U \to \mathbb{R}$. Dann existiert $0 \in V \subset U$ und ein lokaler Diffeomorphismus $\psi: V \to V$, $\psi(0)=0$ mit $f(\psi(y)) = \varepsilon^{k-1} \cdot y^k$, $k \in \mathbb{N}$, $\varepsilon \in \{-1,1\}$ genau dann, wenn gilt

$k = \min\{\ell \in \mathbb{N} \mid f^{(\ell)}(0) \neq 0\}$. Falls k gerade ist, muß $\varepsilon = f^{(k)}(0) / |f^{(k)}(0)|$ sein.

<u>MORAL</u>: Falls nicht alle Ableitungen von f bei $0 \in \mathbb{R}$ verschwinden, ist f zu $\pm y^k$ äquivalent.

<u>Beweis</u>: Sei $k = \min\{\ell \in \mathbb{N} \mid f^{(\ell)}(0) \neq 0\}$ und $\varepsilon = f^{(k)}(0) / |f^{(k)}(0)|$. Nach Lemma 1.4. gibt es dann eine glatte Funktion g auf einem Sterngebiet V mit Zentrum 0, d.h., einem Intervall $(a,b) \ni 0$, s.d. $f(x) = x^k \cdot g(x)$ $\forall x \in V$ und $g(0) = \frac{1}{k!} f^{(k)}(0)$.

Wir haben $\varepsilon \cdot g(0) > 0 \Rightarrow \varphi(x) = \varepsilon x \cdot \sqrt[k]{\varepsilon g(x)}$ ist auf $V' \subset V$ glatt, falls V' genügend klein ist, und es gilt $\varphi(0) = 0$ und $\varepsilon^{k-1} \varphi(x)^k = \varepsilon^{k-1} \left(\varepsilon x \sqrt[k]{\varepsilon g(x)}\right)^k = \varepsilon^{2k} \cdot x^k \cdot g(x)$ $= x^k \cdot g(x) = f(x)$. Andererseits ist $\varphi'(0) = \varepsilon \cdot \sqrt[k]{\varepsilon g(0)} \neq 0$ also ist φ ein lokaler Diffeomorphismus, d.h. $\exists V'' \subset V$ klein genug und eine Umkehrung $\psi: V'' \to V''$ von φ

$\psi(0) = 0$ und $f(\psi(y)) = \varepsilon^{k-1} \cdot y^k$ $\square$

Nächstes einfaches Beispiel für eine Klassifikation ist die folgende Aussage

<u>Lemma 1.7.</u>: Sei $U \subset \mathbb{R}^n$, $0 \in U$, $f : U \to \mathbb{R}$ glatt und $f(0) = 0$

Dann ist 0 kein kritischer Punkt von f, d.h. $Df(0) \neq 0$, genau dann, wenn $\exists$ lokalen Diffeom. φ bei 0 gibt mit $\varphi(0) = 0$ so daß $f(\varphi(y)) = y_1$ $\forall\, y = (y_1, \dots, y_n) \in V \subset U$, $0 \in V$.

<u>Beweis</u>: Falls φ existiert mit $f(\varphi(y)) = y_1$

$\rightsquigarrow D(f(\varphi(y))) = (1, \dots 0) \neq 0$, also ist 0 kein kritischer Punkt von $f(\varphi(y))$, und dann auch nicht von $f(x)$.

Setze nun $Df(0) \neq 0$ voraus, d.h. $\exists\, i \in \{1 \dots n\}$ mit $\partial_{x_i} f(0) \neq 0$. Falls $i \neq 1$ ist, definiere $\varphi : U \to U$

$(y_1, \dots, y_n) = (\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)) = (f(x), x_2, \dots, x_{i-1}, x_1, x_{i+1}, \dots, x_n)$

Dann folgt: $D\varphi = \begin{bmatrix} \partial_{x_1} f & 0 & & 1 & & \\ \partial_{x_2} f & 1 & & 0 & & \\ | & & \ddots & | & & \\ & & & 0 & & \\ & & & | & 1 & \\ \partial_{x_n} f & & & 0 & & 1 \end{bmatrix}$ $\leftarrow$ i-te Zeile

Vertausche 1. und i-te Zeile

aber dann ist $\det(D\varphi) = \det \begin{bmatrix} \partial_{x_i} f & & & \\ \partial_{x_2} f & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ \partial_{x_1} f & & & \\ \vdots & & & 1 \end{bmatrix} = \partial_{x_i} f$

$\Rightarrow (\det D\varphi)(0) \neq 0$, also ist φ lokaler Diffeomorphismus

Sei $\psi: V \to V$ eine zu φ inverse Abbildung, dann ist $f(\psi(y)) = y_1$. Falls $i = 1$ ist, vertausche die Koordinaten, dies ist ein globaler, d.h., auf ganz $\mathbb{R}^n$ definierter Diffeomorphismus. $\square$

Nun kommen wir zum Hauptergebnis dieses Kapitels.

<u>Satz 1.8. (Morse-Lemma)</u>: Sei $f: U \to \mathbb{R}$ glatt, $0 \in U$ und $f(0) = 0$. Dann ist 0 ein nicht-entarteter kritischer Punkt von f genau dann,

wenn es einen lok. Diffeom. ψ bei 0 mit $\psi(0)=0$ gibt, s. d. $f(\psi(y)) = y_1^2 + \dots + y_k^2 - y_{k+1}^2 - \dots - y_n^2$

Hierbei ist $n-k =: l$ der Index von $(D^2 f)(0)$.

<u>Beweis</u>: „$\Leftarrow$" ist klar, denn $D^2(f(\psi(0)))$

$$\begin{array}{cl} \left[\begin{array}{cccccc} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & -1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & -1 \end{array}\right] & \begin{array}{l} \}\,k \\ \\ \\ \}\,l \end{array} \end{array}$$

, also Rang $D^2(f(\psi(0))) = n$

und daher ist auch Rang $D^2 f(0) = n$ (und natürlich auch Index $(D^2 f(0)) = l$).