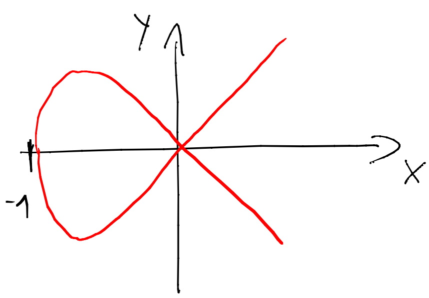
<u>Beispiele für Entfaltungen:</u> Sei $0 \in U \subset \mathbb{R}^2$ klein und $f: U \to \mathbb{R}$; $(x,y) \mapsto y^2 - x^3$, sei $0 \in V \subset \mathbb{R}$ und betrachte die Entfaltung $F: U \times V \to \mathbb{R}$

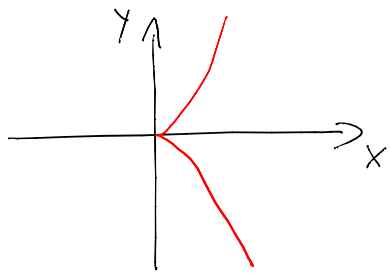
$$F(x,y,t) = y^2 - x^2(t+x) \rightsquigarrow F(x,y,0) = y^2 - x^3 = f(x,y)$$

<u>Bild $F(x,y,t_0)^{-1}(0)$:</u>

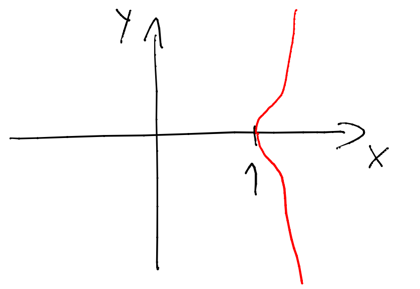
<u>$t_0 = 1$:</u> $y^2 = x^2(x+1)$



<u>$t_0 = 0$:</u> $y^2 = x^3$



<u>$t_0 = -1$:</u> $y^2 = x^2(x-1)$



Sei jetzt $V \subset \mathbb{R}^2$ mit $0 \in V$ und $F: U \times V \to \mathbb{R}$

$$F(x,y,s,t) = y^2 - x^3 - t \cdot x + s$$

<u>„Satz" 0.6:</u> Es gibt offene Mengen $U' \subset U$ & $V' \subset V$ so daß F die „universelle" Entfaltung von $f = y^2 - x^3 : U' \to \mathbb{R}$ ist.

<u>„Beweis"</u>: Wir nehmen an, daß eine beliebige „Entfaltung von f gegeben ist durch

$$F'(x,y,s_0,s_1,s_2,\dots,t_1,t_2,\dots) = y^2 - x^3 + s_0 + s_1 y + s_2 y^2 + \dots$$
$$+ t_1 x + t_2 x^2 + \dots : U \times V'' \to \mathbb{R}, \quad V'' \subset (\mathbb{R}^{\mathbb{N}})^2$$

<u>Bem.:</u> Es ist schon nicht klar, daß es keine anderen Entfaltungen gibt, dies muß man beweisen. Insbesondere könnte F' auch Terme der Form $x^k y^l$ mit $k, l > 0$ enthalten.

also: $$F'(x,y,s_0,s_1,\dots,t_1,t_2,\dots) = s_0 + s_1 y + y^2 \underbrace{(1 + s_2 + s_3 y + \dots)}_{A(\underline{s},y)}$$
$$+ t_1 x + t_2 x^2 - x^3 \underbrace{(1 - t_3 - t_4 x - \dots)}_{B(\underline{t},x)}$$

Die Terme A und B sind für V'' sehr klein „fast" gleich 1 also ist F' „fast" gleich

$$F'' = y^2 - x^3 + s_0 + s_1 y + t_1 x + t_2 x^2$$

<u>Betrachte folgende Variablentransformation:</u>

$$x := x' + \frac{t_2}{3} \quad ; \quad y := y' - \frac{s_1}{2}$$

Dann gilt: $$F(x', y', s_0, s_1, t_1, t_2) := F''(\overset{x' + \frac{t_2}{3}}{x}, \overset{y' - \frac{s_1}{2}}{y}, s_0, s_1, t_1, t_2)$$

$$= \left(y' - \frac{s_1}{2}\right)^2 - \left(x' + \frac{t_2}{3}\right)^3 + s_0 + s_1\left(y' - \frac{s_1}{2}\right) + t_1\left(x' + \frac{t_2}{3}\right) + t_2\left(x' + \frac{t_2}{3}\right)^2$$

$$= y'^2 - s_1 y' + \frac{s_1^2}{4} - \left(x'^3 + x'^2 t_2 + \frac{1}{3}x' t_2^2 + \frac{t_2^3}{81}\right) + s_0 + s_1 y' - \frac{s_1^2}{2} + t_1 x'$$

$$+ \frac{t_1 t_2}{3} + t_1\left(x'^2 + \frac{2}{3}x' t_2 + \frac{t_2^2}{9}\right)$$

$$= y'^2 - x'^3 + x' \underbrace{\left(\frac{1}{3}t_2^2 + t_1 + \frac{2}{3}t_1 t_2\right)}_{=: -t} + \underbrace{\left(\frac{s_1^2}{4} + \frac{t_2^2}{81} + s_0 - \frac{s_1^2}{2} + \frac{t_1 t_2}{3} + \frac{t_1 t_2^2}{9}\right)}_{=: s}$$

$$= y'^2 - x'^3 - t \cdot x' + s$$

<u>MORAL</u>: Bis auf Koordinatenwechsel und „Vergessen" von kleinen Termen ist jede Entfaltung von $f = y^2 - x^3$ zu $F(x,y) = y^2 - x^3 - t\cdot x + s$ äquivalent.

<u>„Definition 0.8"</u>: Sei $f: U \to \mathbb{R}$ glatt. Falls eine „universelle" Entfaltung $F: U \times V \to \mathbb{R}$ mit $0 \in V \subset \mathbb{R}^\mu$ existiert, dann heißt μ die Milnorzahl von f.

<u>Definition 0.9:</u> Sei $f: U \to \mathbb{R}$ glatt und ($U \subset \mathbb{R}^n$)

$F: U \times V \to \mathbb{R}$ eine beliebige Entfaltung, $V \subset \mathbb{R}^m$

von f.

1.) $$\mathrm{Crit}_F := \{(\underbrace{x_1, \dots, x_n}_{\underline{x}}, \underbrace{t_1, \dots, t_m}_{\underline{t}}) \in U \times V \mid (\partial_{x_1} F)(\underline{x}, \underline{t}) = \dots = (\partial_{x_n} F)(\underline{x}, \underline{t}) = 0\}$$

heißt kritischer Ort (kritische Menge, Menge der kritischen Punkte) von F. Insbesondere ist für $m = 0$, d.h. $F = f: U \to \mathbb{R}$, $\mathrm{Crit}_F = \mathrm{Crit}_f$

$$= \{\underline{x} = (x_1, \dots, x_n) \in U \mid (\partial_{x_1} f)(\underline{x}) = \dots = (\partial_{x_n} f)(\underline{x}) = 0\}$$

2.) $$D_F := \{(z, t_1, \dots, t_m) \in \mathbb{R} \times V \mid \exists\, \underline{x} = (x_1, \dots, x_n) \in U, \\ (\underline{x}, \underline{t}) \in C_F \text{ und } z = F(\underline{x}, \underline{t})\}$$

heißt die Diskriminante von F. Sie ist das Bild unter $(F, pr): U \times V \to \mathbb{R} \times V$ von C_F.

§ 1. Das Morse-Lemma

Ziel: jede glatte Funktion $f: U \to \mathbb{R}$ mit nicht-entarteten kritischen Punkt $0 \in U$ läßt sich nach Koordinatenwechsel lokal als quadratische Form schreiben.

zunächst etwas Wiederholung aus Analysis II:

Definition 1.1.: Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen.

i) Eine stetige Abbildung $\phi = (\phi_1, \dots, \phi_m): U \to \mathbb{R}^m$ ist glatt falls alle $\phi_i: U \to \mathbb{R}^m$ glatt sind

ii) Für eine glatte Abbildung $\phi: U \to \mathbb{R}^m$ (einmal differenzierbar reicht) ist $D\phi = (\partial_{x_k} \phi_j)_{jk} \in \mathrm{Mat}(m \times n, \mathbb{R})$ die Jacobi-Matrix.

iii) Sei spezieller $m=n$ und sei ϕ eine Bijektion $\phi : U \to V$ mit $V \subset \mathbb{R}^n$ offen. Dann heißt ϕ ein Diffeomorphismus, falls ϕ^{-1} auch glatt ist

Beispiele: - $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto -x$ ist ein Diffeom

- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^3$ ist bijektiv, aber kein Diffeomorphismus, da $\sqrt[3]{x}$ bei 0 nicht glatt ist

Satz 1.1. (Lokaler Umkehrsatz, Beweis in Analysis II)

Sei $\phi : U \to \mathbb{R}^n$ glatt und $p \in U$. Dann existieren offene Umgebungen U' von p und V' von $\phi(p)$ sodaß $\phi_{|U'} : U' \to V'$ ein Diffeomorphismus ist genau dann, wenn $(D\phi)(p) \in Gl(n, \mathbb{R})$ ist, d.h., wenn $\det (D\phi)(p) \neq 0$ gilt. In diesem Fall heißt ϕ ein lokaler Diffeomorphismus bei p.

<u>Korollar 1.2.</u>: Sei $f: U \to \mathbb{R}$ glatt und $p \in \mathrm{Crit}(f)$ nicht-entartet, dann ist p isoliert.

<u>Beweis</u>: Sei $\phi := Df: U \to \mathrm{Mat}(1 \times n, \mathbb{R})$. Dann betrachte $D\phi = D^2 f: U \to \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{R})$. Da p nicht-entarteter kritischer Punkt von f ist, haben wir $\det(D^2 f) = \det(D\phi) \neq 0$, d.h. ϕ ist ein lokaler Diffeomorphismus bei p, also existiert $p \in V \subset U$ offen, so daß $\phi_{|V}$ injektiv ist. Also ist $\phi^{-1}(0_{\mathrm{Mat}(1 \times n, \mathbb{R})}) = p$, also ist $Df(q) \neq 0 \quad \forall q \in V \setminus \{p\}$ $\square$

Das große Ziel der Vorlesung wird in der Klassifikation glatter Funktionen „bis auf lokale Diffeomorphismen" bestehen. Genauer, sei $0 \in U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f: U \to \mathbb{R}$ glatt und sei $\psi: U \to U$ ein lokaler Diffeomorphismus bei 0 mit $\psi(0) = 0$. Setze $g(\underline{y}) := \psi^* f(\underline{y}) := f(\psi(\underline{y}))$

dann ist $g: U \to U$ glatt und die Kettenregel zeigt, daß $\underbrace{Dg(0)}_{\in \mathrm{Mat}(1\times n, \mathbb{R})} = \underbrace{Df(0)}_{\in \mathrm{Mat}(1\times n, \mathbb{R})} \cdot \underbrace{D\varphi(0)}_{\in \mathrm{Mat}(n\times n, \mathbb{R})}$ gilt.

Da φ lok. Diff. bei 0 $\xRightarrow{\text{Satz 1.1}}$ $D\varphi(0) \in Gl(n, \mathbb{R})$.

Also: $Dg(0) = 0 \iff Df(0) = 0$, d.h. f hat bei 0 kritischen Punkt genau dann, wenn g dort einen solchen hat. Analog folgt aus $(Df)(0) = 0$, daß

$$D^2 g(0) = \left((D\varphi)(0)\right)^{tr} \cdot D^2 f(0) \cdot D\varphi(0)$$

Übungsaufgabe!

Wiederum impliziert $D\varphi(0) \in Gl(n, \mathbb{R})$, daß

Rang $D^2 g(0) =$ Rang $D^2 f(0)$, d.h., g hat bei 0 einen nicht-entarteten kritischen Punkt genau dann, wenn f dort einen hat. Auch die Sylvesterinvarianten von $D^2 f(0)$ & $D^2 g(0)$ sind gleich.

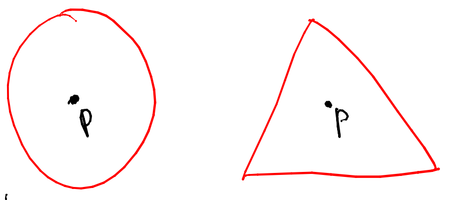
Als erste einfache Beispiele wollen wir glatte Funktionen ohne kritische Punkte bzw. (fast) beliebige glatte Funktionen in einer Variable modulo lokalen Diffeom. klassifizieren.

Vorbemerkungen

<u>Definition 1.3:</u> Eine offene Menge $U \subset \mathbb{R}^n$ heißt sternförmig mit Zentrum $p \in U$, falls $\forall q \in U$ gilt: $\{ y \in \mathbb{R}^n : y = p + t(q-p),\ t \in [0,1] \} \subset U$

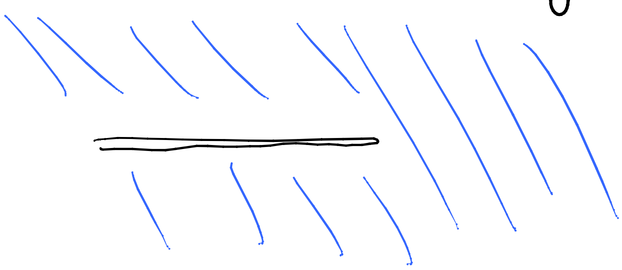
<u>Klar:</u> konvex $\Rightarrow$ sternförmig

<u>Bsp:</u>

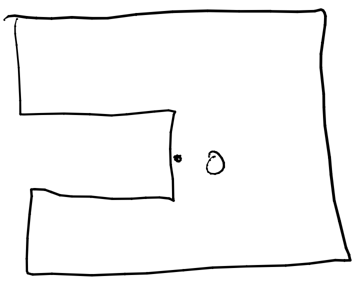


sternförmig (+konvex)

$\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,a) \mid a < 0\}$ sternförmig, nicht konvex



nicht sternförmig



$\subset \mathbb{R}^2$