Kapitel 5

Der Vorbereitungssatz von Weierstraß

Zum Beweis des Hauptsatzes über Entfaltungen benötigen wir einige Hilfsmittel aus der höherdimensionalen Funktionentheorie, welche wir nun entwicklen.

5.1 Vorbereitssatz und Divisionssatz

Wir wollen hier eine zu der folgenden (elementaren) Bemerkung aus der Funktionentheorie einer Variablen analoge Aussage zeigen: Sei ein Keim oder eine konvergente Potenzreihe

$$f(t) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m t^m$$

gegeben (zur Erinnerung: Die Taylorabbildung $T : \mathcal{O}_{\mathbb{C},0} \to \mathbb{C}\{t\}$ ist ein Isomorphismus von $\mathbb{C}$-Algebren). Dann existiert ein $k \in \mathbb{N}$, sowie eine Einheit $u(t) \in (\mathcal{O}_{\mathbb{C},0})^*$, so dass

$$f(t) = t^k \cdot u(t)$$

gilt. k ist dabei die Ordnung der Nullstelle 0 von f (und falls $k = 0$ ist, dann ist $f(0) \neq 0$, d.h., f hat dann bei 0 gar keine Nullstelle, sondern ist selbst eine Einheit in $\mathcal{O}_{\mathbb{C},0}$.
Der Weierstraßsche Vorbereitungssatz ist eine Verallgemeinerung dieser Aussage für konvergente Potenzreihen in mehreren Variablen. Wir führen zunächst einige Begriffe ein. Wir schreiben $\mathbb{C}\{z\}$ für den Ring $\mathbb{C}\{z_1, \ldots, z_{n+1}\}$ der konvergenten Potenzreihen in $n+1$ Variablen. Ein Element

$$g(z) = \sum_{\underline{\nu} \in \mathbb{N}^n} a_{\underline{\nu}} z^{\underline{\nu}} \in \mathbb{C}\{z\}$$

hat dann eine eindeutige Darstellung

$$g(z) = \sum_{m=0}^{\infty} p_m(z),$$

wobei

$$p_m(z) = \sum_{|\underline{\nu}|=m} a_{\underline{\nu}} z^{\underline{\nu}}$$

ein homogenes Polynom vom Grad m ist.

Definition 5.1. *Sei* $g(z) = \sum_{\underline{\nu} \in \mathbb{N}^n} a_{\underline{\nu}} z^{\underline{\nu}} \in \mathbb{C}\{z\}$.

1. *Die Zahl*

$$\min\{|\nu| \mid a_{\underline{\nu}} \neq 0\}$$

   heißt die Ordnung *der Potenzreihe* g.

2. *g heißt* regulär *oder* allgemein der Ordnung k in z_{n+1}*, falls die Potenzreihe*

$$g(0,0,\ldots,0,z_{n+1}) \in \mathbb{C}\{z_{n+1}\}$$

die Ordnung k hat.

Das nächste Lemma zeigt, dass die Begriffe „Ordnung einer Potenzreihe in mehreren Variablen" und der Begriff „regulär von der Ordnung bezüglich einer Variablen" eng verwandt sind.

Lemma 5.2. *Sei $g(z) \in \mathbb{C}\{z\}$, und habe g die Ordnung k, dann gibt es eine lineare Transformation $(z'_1,\ldots,z'_{n+1}) := \phi_A(z_1,\ldots,z_{n+1})$ (d.h., $A \in GL(n+1,\mathbb{C})$), so dass $g(z')$ regulär in z'_{n+1} von der Ordnung k ist.*

Beweis. Wir schreiben wir vorher $g(z) = \sum_{m=k}^{\infty} p_m(z)$ mit $p_k \neq 0$ und

$$p_k(z) = \sum_{|\underline{\nu}|=k} a_{\underline{\nu}} z^{\underline{\nu}}.$$

Für ein gegebenes Tupel $(w_1,\ldots,w_n) \in \mathbb{C}^n$ setzen wir dann

$$z'_i := \begin{cases} z_i - w_i z_{n+1} & \text{falls} \quad i \in \{1,\ldots,n\} \\ z_{n+1} & \text{falls} \quad i = n+1 \end{cases}$$

Dann ist der Koeffizient c von $(z')^k_{n+1}$ in $p_k(z')$ durch

$$c = \sum_{\nu_1+\ldots+\nu_{n+1}=k} a_{\nu_1,\ldots,\nu_{n+1}} w_1^{\nu_1} \cdot \ldots \cdot w_n^{\nu_n}$$

gegeben. Falls nun für alle Wahlen von $(w_1,\ldots,w_n) \in \mathbb{C}^n$ gelten würde, dass $c = 0$ ist, dann müssten alle Koeffizienten a_ν mit $|\nu| = k$ gleich Null sein, d.h., dann wäre $p_k = 0$, was nach Voraussetzung unmöglich ist. Also gibt es $(w_1,\ldots,w_n) \in \mathbb{C}$ mit $c \neq 0$, und für dieses Tupel $(w_1,\ldots,w_n)$ ist dann

$$g(0,\ldots,0,z'_{n+1}) = c \cdot z^k_{n+1} + \text{Terme höherer Ordnung in } z_{n+1},$$

d.h., es ist dann $g(z')$ regulär von der Ordnung k in z'_{n+1}. □

Im folgenden wollen wir die Entwicklung einer Potenzreihe in $n+1$ Variablen nach der letzten Variable genauer untersuchen, dazu setzen wir zur besseren Unterscheidung

$$\begin{aligned} \mathbb{C}\{z\} &:= \mathbb{C}\{z_1,\ldots,z_n\} \\ \mathbb{C}\{z,t\} &:= \mathbb{C}\{z_1,\ldots,z_n,t\} \end{aligned}$$

Ab jetzt bezeichnet also $\mathbb{C}\{z\}$ einen Potenzreihenring in n Variablen. Damit kommen wir zum folgenden fundamentalen Begriff.

Definition 5.3. *Ein Weierstraß-Polynom vom Grad k ist eine Potenzreihe $h(z,t)$ in $\mathbb{C}\{z,t\}$ der Form*

$$h(z,t) = t^k + c_1(z)t^{k-1} + \ldots + c_{k-1}(z)t + c_k(z)$$

wobei $c_i \in \mathbb{C}\{z\}$ ist und $c_i(0) = 0$ gilt.

Wegen $h(0,t) = t^k$ ist also ein Weierstraß-Polynom insbesondere regulär der Ordnung k in t. Man beachte auch, dass nach Definition ein Weierstraß-Polynom h ein Element von $\mathbb{C}\{z\}[t]$ ist (ein Polynom in t, dessen Koeffizienten aus dem Ring $\mathbb{C}\{z\}$ stammen).
Der Hauptsatz dieses Abschnitts sagt nun aus, dass im Wesentlichen alle Potenzreihen in $\mathbb{C}\{z,t\}$, die regulär der Ordnung k in t sind, so aussehen.

Satz 5.4 (Vorbereitungssatz von Weierstraß). *Sei $g(z,t) \in \mathbb{C}\{z,t\}$ eine konvergente Potenzreihe, welche regulär der Ordnung k in t ist. Dann existiert ein eindeutig bestimmtes Weierstraß-Polynom $h \in \mathbb{C}\{z\}[t]$ sowie eine eindeutig bestimmte Einheit $u \in \mathbb{C}\{z,t\}^*$, so dass gilt*

$$g(z,t) = u(z,t) \cdot h(z,t).$$

Der Name „Vorbereitungssatz" ist folgendermaßen motiviert: In der analytischen Geometrie (die zur Singularitätentheorie eng verwandt ist), interessiert man sich insbesondere für die Nullstellemenge einer Funktion $g \in \mathbb{C}\{z,t\}$. Diese ist, da die Einheit u in der Nähe der Null in $\mathbb{C}^{n+1}$ nicht verschwindet, natürlich gleich der des Weierstraß-Polynoms h. Letzteres ist zwar kein Polynom, sondern nach wie vor eine Potenzreihe, aber von einfacherer Gestalt, und man kann daher ihre Nullstellenmenge einfacher untersuchen (z.B. ist h im Fall $n = 0$, also $h, g \in \mathbb{C}\{t\}$ tatsächlich ein Polynom). Man sagt daher, dass die Potenzreihe g für die Untersuchung ihrer Nullstellen(menge) „vorbereitet" wird.
Der Beweis des Vorbereitungssatzes wird einige Zeit in Anspruch nehmen. Wir werden einige Hilfsmittel aus der Funktionentheorie verwenden, welche wir nicht noch einmal neu beweisen wollen. Tatsächlich werden wir einen etwas anderen Satz beweisen, den sogenannten Divisionssatz von Weierstraß, und den Vorbereitungssatz aus diesem ableiten.

Satz 5.5 (Divisionssatz von Weierstraß). *Seien Potenzreihen $f, g \in \mathbb{C}\{z,t\}$ gegeben. Angenommen, g sei regulär in t der Ordnung k. Dann gibt es eine eindeutig bestimmte Potenzreihe $q \in \mathbb{C}\{z,t\}$ sowie ein eindeutig bestimmtes Polynom $r \in \mathbb{C}\{z\}[t]$, mit $\deg_t(r) \leq k-1$, so dass*

$$f = q \cdot g + r$$

gilt.

Man beachte, dass r i.A. kein Weierstraß-Polynom ist, da nicht vorausgesetzt ist, dass der Koeffizient des höchsten Terms t^{k-1} gleich 1 ist.
Wir zeigen zunächst, wie man den Vorbereitungssatz aus dem Divisionssatz ableiten kann.

Beweis von Satz 5.4 aus Satz 5.5. Sei eine Potenzreihe $g(z,t) \in \mathbb{C}\{z,t\}$, welche regulär von der Ordnung k in t ist, gegeben. Wir wollen den Vorbereitungssatz für g beweisen, und wenden dazu den Divisionssatz auf $f(z,t) := t^k$ und g an. Es existiert dann nach Satz 5.5 ein $q \in \mathbb{C}\{z,t\}$, sowie ein

$$r(z,t) := \sum_{i=1}^{k} a_i(z) t^{k-i} \in \mathbb{C}\{z\}[t]$$

mit $t^k = q \cdot g + r$. Umstellen liefert

$$q(z,t) \cdot g(z,t) = t^k - \sum_{i=1}^{k} a_i(z) t^{k-i}.$$

Da g regulär der Ordnung k in t ist, gilt

$$g(0,t) = c \cdot t^k + \text{Terme höherer Ordnung in } t,$$

mit $c \neq 0$. Also bekommen wir durch Einsetzen

$$q(0,t) \cdot \big(c \cdot t^k + \text{Terme höherer Ordnung in } t\big) = t^k - \sum_{i=1}^{k} a_i(0) t^{k-i}.$$

Dies liefert durch Koeffizientenvergleich zwei Aussagen: Erstens muss $q(0,0) \neq 0$ sein, d.h. $q \in \mathbb{C}\{z,t\}^*$ mit Inversem $u \in \mathbb{C}\{z,t\}^*$. Andererseits folgt auch, dass $a_i(0) = 0$ gilt, und damit ist $h(z,t) := t^k - \sum_{i=1}^{k} a_i(z) t^{k-i}$ ein Weierstraß-Polynom. Wir erhalten

$$q(z,t) = u(z,t) \cdot h(z,t).$$

Klar ist natürlich, dass u und h eindeutig bestimmt sind, wenn wir schon wissen, dass die Potenzreihen q und r im Divisionssatz eindeutig bestimmt sind. Damit ist der Weierstraßsche Vorbereitungssatz aus dem Weierstraßschen Divisionssatz abgeleitet. $\square$

Im Beweis des Divisionssatzes beschäftigen wir uns zunächst mit der dort behaupteten Eindeutigkeit.

Lemma 5.6. *Seien wie im Divisionssatz $f, g \in \mathbb{C}\{z,t\}$ gegeben, und sei g regulär der Ordnung k in t. Angenommen, es gäbe $q, \widetilde{q} \in \mathbb{C}\{z,t\}$ sowie Polynome $r, \widetilde{r} \in \mathbb{C}\{z\}[t]$ vom Grad kleiner k, so dass*

$$f = qg + r = \widetilde{q}g + \widetilde{r}$$

gelte. Dann ist $q = \widetilde{q}$ und $r = \widetilde{r}$.

Beweis. Wir können $k > 0$ annehmen. Andernfalls wäre $\deg_t(r), \deg_t(\widetilde{r}) < 0$, d.h., $r = \widetilde{r} = 0$. Da der Ring $\mathbb{C}\{z,t\}$ natürlich ein Integritätsring ist (aus $a(z,t) \cdot b(z,t) \equiv 0$ für alle (z,t) folgt immer $a \equiv 0$ oder $b \equiv 0$) ist dann $q = \widetilde{q} = 0$. Wir haben also die Gleichung

$$r - \widetilde{r} = (\widetilde{q} - q) \cdot g,$$

und $r - \widetilde{r}$ ist ein Polynom in $\mathbb{C}\{z\}[t]$ vom Grad kleiner k. Wir beweisen jetzt das folgende: Es gibt eine Umgebung V von $0 \in \mathbb{C}^n$, so dass für alle $z \in V$ die Potenzreihe $g(z,t) \in \mathbb{C}\{t\}$ mindestens k Nullstellen hat. Wegen der letzten Gleichung gilt dies dann auch für $(\widetilde{r} - r)(z,t)$, aber das kann wegen $\deg_t(\widetilde{r} - r) < k$ nur sein, wenn $(\widetilde{r} - r)(z,t)$ das Nullpolynom ist. Damit ist $\widetilde{r} = r$ und dann auch $q = \widetilde{q}$, da nicht $g \equiv 0$ gelten kann, sonst wäre g nicht regulär der Ordnung k in t.
Nach Voraussetzung des Satzes ist g regulär der Ordnung k in t, anders formuliert, $g(0,t) \in \mathbb{C}\{t\}$ hat bei $t = 0$ eine Nullstelle der Ordnung k. Natürlich hat die Potenzreihe $g(0,t) \in \mathbb{C}\{t\}$ bei Null eine isolierte Nullstelle, d.h., es existiert $\delta > 0$, so dass $g(0,t) \neq 0$ für alle $0 < |t| \leq \delta$ gilt. Sei nun

$$\varepsilon := \inf_{|t|=\delta} |g(0,t)|,$$

Jetzt existiert wegen der Stetigkeit von g natürlich eine Umgebung V von 0 in $\mathbb{C}^n$, so dass

$$|g(z,t) - g(0,t)| < \varepsilon$$

für alle $z \in V$ und alle t mit $|t| = \delta$ gilt. Mit der Wahl von ε haben wir aber auch $\varepsilon \leq |g(0,t)$ für alle $|t| = \delta$. Damit können wir den Satz von Rouché für die Funktionen $F(t) := g(0,t)$ und $G(t) := g(z,t) - g(0,t)$ anwenden, welcher besagt, dass aus $|G(t)| < |F(t)|$ für alle t auf $\partial B_\delta(0)$ folgt, dass F und $F + G$ in $B_\delta(0)$ gleich viele Nullstellen (mit Multiplizität gezählt) haben. Wir erhalten also, dass $(F+G)(t) = g(z,t)$ auf $B_\delta(0)$ gleich viele Nullstellen wir $F(t) = g(0,t)$, also, mit Multiplizität gezählt, k Nullstellen hat. Dies war zu beweisen, und damit ist die Eindeutigkeitsaussage im Weierstraßschen Divisionssatz gezeigt. $\square$

Es bleibt die Existenzaussage des Weierstraßschen Divisionssatzes zu zeigen. Wir werden sehen, dass es ausreicht, die in folgendem Spezialfall zu tun.

Lemma 5.7. *Sei für alle $k \in \mathbb{N}$*

$$p_k(y,t) := t^k + y_1 t^{k-1} + \ldots + y_{k-1} t + y_k \in \mathbb{C}\{y_1, \ldots, y_k\}[t]$$

(insbesondere ist natürlich p_k regulär der Ordnung k in t). Dann gibt es für alle $f \in \mathbb{C}\{z,y,t\}$ eine Potenzreihe $q \in \mathbb{C}\{z,y,t\}$ und ein Polynom $r \in \mathbb{C}\{z,y\}[t]$ mit $\deg_t(r) < k$, so dass

$$f = q \cdot p_k + r$$

ist.

Natürlich ist dies ein Spezialfall des Divisionssatzes von Weierstraß, weil die Existenz einer Division mit Rest nicht für beliebige Potenzreihen $g \in \mathbb{C}\{z, y, t\}$, welche bezüglich t regulär der Ordnung k sind, sondern nur für die speziellen Polynome p_k behauptet wird. Wir zeigen nun, dass dies aber ausreicht.

Beweis von Satz 5.5 mit Lemma 5.7. Wir haben $f \in \mathbb{C}\{z, t\}$ und $g \in \mathbb{C}\{z, t\}$ gegeben mit der Bedingung, dass g regulär der Ordnung k in t ist. Wir wenden Lemma 5.7 zweimal an, einmal auf f, einmal auf g. Es gibt dann also Potenzreihen $q_1, q_2 \in \mathbb{C}\{z, y, t\}$ sowie Polynome $r_1, r_2 \in \mathbb{C}\{z, y\}[t]$ mit $\deg_t(r_1), \deg_t(r_2) < k$, so dass

$$g(z, t) = q_1(z, y, t) \cdot p_k(y, t) + r_1(z, y, t) \tag{5.1}$$
$$f(z, t) = q_2(z, y, t) \cdot p_k(y, t) + r_2(z, y, t) \tag{5.2}$$

Man beachte, dass die Potenzreihen g und f nicht von den Variablen y abhängen, nichtsdestotrotz können wir Lemma 5.7 auf f und g anwenden. Wir schreiben

$$r_1(z, y, t) = A_1(z, y)t^{k-1} + \ldots + A_k(z, y)$$

Wir haben vorausgesetzt, dass g regulär der Ordnung k in t ist, d.h., wir haben

$$g(0, t) = c \cdot t^k + \text{Termer höherer Ordnung in } t$$

mit $c \neq 0$. Deshalb bekommen wir aus Gleichung (5.1) durch Setzen $z = y = 0$ und Koeffizientenvergleich der Potenzen von t, dass

$$A_1(0, 0) = \ldots = A_k(0, 0) = 0$$

ist und dass $q_1(0, 0, 0) = c$, also insbesondere $q_1(0, 0, 0) \neq 0$ gilt. Wir können daraus bereits schlußfolgern, dass q_1 eine Einheit in $\mathbb{C}\{z, y, t\}$ ist.
Wir betrachten nun den durch $A(z, y) := (A_1(z, y), \ldots, A_k(z, y))$ gegebene Abbildungskeim in $\mathcal{O}^k_{n+k}$. Wir zeigen, dass für alle $j, l \in \{1, \ldots, k\}$

$$\frac{\partial A_j}{\partial y_l}(0, 0) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad j > l \\ -c & \text{für} \quad j = l \end{cases}$$

gilt. Dazu leiten wir die Gleichung (5.1) nach y_l ab und setzen $y = z = 0$. Wir bekommen

$$0 = \frac{\partial q_1}{\partial y_l}(0, 0, t)t^k + q_1(0, 0, t)t^{k-l} + \frac{\partial A_1}{\partial y_l}(0, 0)t^{k-1} + \ldots + \frac{\partial A_k}{\partial y_l}(0, 0)$$

Jetzt vergleichen wir die Koeffizienten von $t^{k-(l+1)}$, $t^{k-(l+2)}$ bis t^0, und erhalten

$$\frac{\partial A_{l+1}}{\partial y_l}(0, 0) = 0, \frac{\partial A_{l+2}}{\partial y_l}(0, 0) = 0, \ldots, \frac{\partial A_k}{\partial y_l}(0, 0) = 0.$$

Durch Koeffizientenvergleich von t^{k-l} bekommen wir hingegen

$$\frac{\partial A_l}{\partial y_l}(0, 0) = -q_1(0, 0, 0) = -c.$$

Damit ist $(\partial A_j / \partial y_l)(0, 0))_{j,l}$ eine obere Dreiecksmatrix mit Einträgen gleich $-c$ auf der Diagonalen. Es folgt, dass

$$\det DA(0, 0) = (-c)^k \neq 0,$$

ist, und nach dem Satz über implizite Funktionen (welcher auch für holomorphe Abbildungskeime gilt), existiert ein Keim $\varphi \in \mathcal{O}^k_n$, so dass

$$A(z, \varphi(z)) = 0$$

gilt. Also haben wir auch

$$r_1(z, \varphi(z), t) = 0$$

und weil $q_1 \in \mathbb{C}\{z, y, t\}^*$ eine Einheit ist, bekommen wir aus Gleichung (5.1)

$$p_k(\varphi(z), t) = g(z, t) \cdot (q_1(z, \varphi(z), t))^{-1}.$$

Setzen wir dies in Gleichung (5.2) ein, so steht dort

$$f(z, t) = q_2(z, \varphi(z), t) \cdot g(z, t) \cdot (q_1(z, \varphi(z), t))^{-1} + r_2(z, \varphi(z), t),$$

so dass wir durch Setzen von $q(z, t) := q_2(z, \varphi(z), t) \cdot (q_1(z, \varphi(z), t))^{-1}$ und $r(z, t) := r_2(z, \varphi(z), t)$ die Gleichung

$$f(z, t) = q(z, t) \cdot g(z, t) + r(z, t)$$

bekommen. □

Wir müssen nun noch die spezielle Form des Divisionssatzes von Weierstraß, bei dem eine Potenzreihe $f(z, y, t) \in \mathbb{C}\{z, y, t\}$ durch die speziellen Polynome $p_k(y, t) = \sum_{i=0}^{k} t^{k-i} y_i \in \mathbb{C}\{y\}[t]$ dividiert wird, beweisen. Hier verwenden wir etwas Funktionentheorie, insbesondere die Integralformel von Cauchy.

Beweis von Lemma 5.7. Sei die Reihe $f(z, y, t) \in \mathbb{C}\{z, y, t\}$ gegeben und sei $p_k(y, t) := t^k + y_1 t^{k-1} + \ldots + y_{k-1} t + y_k \in \mathbb{C}\{y_1, \ldots, y_k\}[t]$ Wir fassen p_k als Element von $\mathbb{C}\{z, y, t\}$ auf, dann existiert ein Polyzylinder $\Delta_1 \subset \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^k \times \mathbb{C}$, so dass $f, p_k \in \mathcal{O}(\Delta_1)$ gilt. Natürlich hat $p(0, t)$ bei $0 \in \mathbb{C}$ eine Nullstelle (der Ordnung k). Nullstellen holomorpher Funktionen sind isoliert, daher existiert ein $\delta > 0$, so dass $p_k(0, t) \neq 0$ für alle t mit $t| = \delta$ ist. Nun ist aber p_k eine stetige Funktion, d.h., es gibt einen Zahlen $r_1, \ldots, r_n, \rho_1, \ldots, \rho_k > 0$ und einen Polyzylinder

$$\Delta := \left\{(z, y, t) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^k \times \mathbb{C} \,|\, |z_j| < r_j, |y_l| < \rho_l, |t| < \delta\right\}$$

so dass $p_k(z, y, t) \neq 0$ gilt für alle $(z, y, t) \in \Delta$ und so, dass der Abschluss $\overline{\Delta}$ vollständig in Δ_1 liegt. Wir sehen also, dass die Funktion

$$q(z, y, t) := \frac{f(z, y, t)}{p_k(y, t)}$$

auf Δ holomorph ist. Nach dem Integralsatz von Cauchy (für holomorphe Funktionen in einer Variablen, nämlich der Variablen t) hat sie dann eine Integraldarstellung

$$q(z, y, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|t|=\delta} \frac{f(z, y, \tau)}{p_k(y, \tau) \cdot (\tau - t)} d\tau$$

Da auch $f(z, y, t) \in \mathcal{O}(\Delta)$ gilt, bekommen wir eine Integraldarstellung

$$\begin{aligned} r(z, y, t) &:= f(z, y, t) - q(z, y, t) \cdot p_k(y, t) \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|t|=\delta} \frac{f(z, y, \tau)}{\tau - t} d\tau - \frac{1}{2\pi i} \int_{|t|=\delta} \frac{f(z, y, \tau) \cdot p_k(y, t)}{p_k(y, \tau) \cdot (\tau - t)} d\tau \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|t|=\delta} \frac{f(z, y, \tau)}{p_k(y, \tau)} \cdot \left(\frac{p_k(y, \tau) - p_k(y, t)}{\tau - t}\right) d\tau \end{aligned}$$

Wir berechnen nun

$$\begin{aligned} \frac{p_k(y, \tau) - p_k(y, t)}{\tau - t} &= \frac{(\tau^k - t^k) + y_1(\tau^{k-1} - t^{k-1}) + \ldots + y_{k-1}(\tau - t)}{\tau - t} \\ &= s_1(y, \tau) t^{k-1} + \ldots + s_k(y, \tau) \end{aligned}$$

mit $s_j \in \mathbb{C}\{y\}[\tau]$ (Man beachte die Formel $(\tau^j - t^j)/(\tau - t) = \tau^{j-1} + t\tau^{j-2} + \ldots + t^{j-2}\tau + t^{j-1}$ für alle $j \in \{1, \ldots, k\}$). Zusammenfassend bekommen wir

$$r(z,y,t) = \sum_{j=1}^{k} \left(\underbrace{\frac{1}{2\pi i} \int_{|t|=\delta} \frac{f(z,y,\tau)}{p_k(y,\tau)} \cdot s_j(y,t) d\tau}_{=:A_k(z,y)} \right) t^{k-j}$$

Damit ist $A_k \in \mathbb{C}\{z,y\}$, und wir haben $r = \sum_{j=1}^{k} A_k(z,y)t^{k-j} \in \mathbb{C}\{z,y\}[t]$ mit $\deg_t(r) < k$, und damit ist die spezielle Form des Divisionssatzes von Weierstraß bewiesen. $\square$

5.2 Der verallgemeinerte Vorbereitungssatz für Moduln

In diesem Abschnitt wollen wir aus dem Divisionssatz eine andere Variante des Vorbereitungssatzes beweisen, welche wir später zur Konstruktion einer unversellen Entfaltung eines Keimes in $\mathcal{O}_n$ benutzen werden. Wir müssen dazu einige algebraische Begriffe wiederholen. Dazu führen wir zunächst die folgende Sprechweise ein.

Definition-Lemma 5.8. *Eine $\mathbb{C}$-Algebra A heißt* analytisch, *falls es ein $n \in \mathbb{N}$ sowie ein $I \subset \mathbb{C}\{z_1, \ldots, z_n\}$ mit $A \cong \mathbb{C}\{z_1, \ldots, z_n\}/I$ gibt. Dann ist A eine lokale Algebra, d.h., A ist ein lokaler Ring, so dass die Komposition*

$$\mathbb{C} \cdot 1_A \hookrightarrow A \twoheadrightarrow A/\mathbf{m}_A \cong \mathbb{C}$$

ein Isomorphismus ist. Man hat dann eine Zerlegung von $\mathbb{C}$-Vektorräumen (welche i.A. unendlich-dimensional sein können)

$$A \cong \mathbb{C} \oplus \mathbf{m}_A$$

Diese Aussage ist klar: Das maximale Ideal von A ist das Bild unter $\pi : \mathbb{C}\{z_1, \ldots, z_n\} \twoheadrightarrow A$ des maximalen Ideals $\mathbf{m}_{\mathbb{C}\{z_1,\ldots,z_n\}}$, und die Zerlegung $A \cong \mathbb{C} \oplus \mathbf{m}_A$ ist das Bild unter π der (Vektorraum-)Zerlegung $\mathbb{C}\{z_1, \ldots, z_n\} \cong \mathbb{C} \oplus \mathbf{m}_{\mathbb{C}\{z_1,\ldots,z_n\}}$ und dann ist die Komposition $\mathbb{C} \cdot 1_A \hookrightarrow A \twoheadrightarrow A/\mathbf{m}_A \cong \mathbb{C}$ sogar die Identität. Die verallgemeinerte Form des Vorbereitungssatzes von Weierstraß ist eine Endlichkeitsaussage für Moduln über analytischen Algebren. Insbesondere werden wir folgende Situation betrachten: Seien A, B analytische Algebren, und $\varphi : A \to B$ ein Homomorphismus analytischer Algebren. Wegen $\varphi(1_A) = 1_B$ und der Vektorraumzerlegungen $A = \mathbb{C}1_A \oplus \mathbf{m}_A$ und $B = \mathbb{C}1_B \oplus \mathbf{m}_B$ folgt, dass φ *lokal* ist, d.h., $\varphi(\mathbf{m}_A) \subset \mathbf{m}_A$ gilt. Sei nun M ein Modul über der analytischen Algebra B (d.h., M ist ein Modul über dem Ring B). Dann wird durch

$$\begin{array}{ccc} A \times M & \longrightarrow & M \\ (a,x) & \longmapsto & \varphi(a) \cdot x \end{array}$$

die Struktur eines A-Moduls auf M definiert. Dies kann man natürlich insbesondere auf den B-Modul B selbst anwenden, d.h., falls $\varphi : A \to B$ ein Algebrenhomomorphismus ist, dann ist B automatisch ein A-Modul.

Satz 5.9 (Verallgemeinerter Vorbereitungssatz von Weierstraß)**.** *Seien die Potenzreihenringe in m bzw. n Unbekannten $A = \mathbb{C}\{z_1, \ldots, z_n\}$ bzw. $B = \mathbb{C}\{w_1, \ldots, w_m\}$ gegeben. Sei $\varphi : A \to B$ ein Homomorphismus analytischer Algebren, und sei M ein B-Modul. Dann gilt:*

1. *M ist genau dann endlich erzeugt als A-Modul, wenn $M/\varphi(\mathbf{m}_A)M$ als $A/\mathbf{m}_A \cong \mathbb{C}$-Vektorraum endlich dimensional ist.*

2. *Seien $e_1, \ldots, e_p$ Elemente von A derart, dass die Restklassen $\overline{e}_1, \ldots, \overline{e}_p$ ein Erzeugendensystem von $M/\varphi(\mathbf{m}_A)M$ sind. Dann wird M als A-Modul von $e_1, \ldots, e_p$ erzeugt.*

Es sei bemerkt, dass der Satz allgemeiner für beliebige Morphismen $\varphi : A \to B$ von analytischen Algebren A und B gilt, also in dem Fall, wo A bzw. B keine Potenzreihenringe, sondern Quotienten davon nach Idealen sind. Der Beweis ist allerdings etwas komplizierter, und dieser allgemeinere Fall wird im weiteren Verlauf hier nicht benötigt.

Beweis. 1. Die Richtung $\Rightarrow$ ist klar: Falls M als A-Modul von Elementen $e_1, \ldots, e_p$ erzeugt wird, dann erzeugen die Restklassen $\overline{e}_1, \ldots, \overline{e}_p$ den Quotienten $M/\varphi(\mathbf{m}_A)M$. Wesentlich ist die andere Richtung. Wir beweisen dies in mehreren Schritten:

(a) Zunächst betrachten wir den Fall $n = m - 1$, bei dem π durch Projektion gegeben ist, d.h., $A = \mathbb{C}\{z_1, \ldots, z_{m-1}\}$ und $B = \mathbb{C}\{z_1, \ldots, z_m\}$ und $\pi : \mathbb{C}^m \to \mathbb{C}^{m-1}$, $(z_1, \ldots, z_m) \mapsto (z_1, \ldots, z_{m-1})$, so dass $\pi^* : A \hookrightarrow B$ die natürliche Inklusion ist. Seien $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_q$ Erzeuger von M als B-Modul und seien $\eta_1, \ldots, \eta_r \in M$ derart, dass die Klassen $\overline{\eta}_1, \ldots, \overline{\eta}_r$ den Quotienten $M/\varphi(\mathbf{m}_A)M$ über $\mathbb{C} \cong A/\mathbf{m}_A$ erzeugen. Dann gibt es also für alle $x \in M$ Zahlen $\gamma_1, \ldots, \gamma_r \in \mathbb{C}$ mit $\overline{x} = \sum_{j=1}^r \gamma_j \overline{\eta}_j$ in $M/\varphi(\mathbf{m}_A)M$, aber das bedeutet nichts anderes, als

$$x - \sum_{j=1}^{r} \gamma_j \eta_j \in \varphi(\mathbf{m}_A)M,$$

d.h., es gibt Elemente $b_1, \ldots, b_k \in \varphi(\mathbf{m}_A)B$, so dass

$$x - \sum_{j=1}^{r} \gamma_j \eta_j = \sum_{i=1}^{q} b_i \varepsilon_i$$

gilt. Wenn wir jetzt $p := r + q$ sowie $(e_1, \ldots, e_p) := (\eta_1, \ldots, \eta_r, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_q)$ setzen, dann haben wir gezeigt: Es gibt $e_1, \ldots, e_p \in M$, so dass für alle $x \in M$ eine Darstellung

$$x = \sum_{i=1}^{p} b_i e_i$$

mit $b_i \in \varphi(A) + \varphi(\mathbf{m}_A)B$ existiert. Wir wenden dies jetzt sukzessive für die Elemente $(z_m \cdot e_i)_{i=1,\ldots,p}$ an. Es existieren also Darstellungen

$$z_m e_j = \sum_{k=1}^{p} \nu_{jk} e_k$$

wobei $\nu_{jk} \in \varphi(A) + \varphi(\mathbf{m}_A)B$ ist. Dies kann man umformulieren: Wir betrachten die Matrix

$$N := (z_m \delta_{jk} - \nu_{jk})_{j,k=1,\ldots,p} \in M(p \times p, B)$$

sowie ihre Determinante $\Delta := \det(N) \in B$. Sei außerdem N_j die Matrix, welche aus N durch Nullsetzen der j-ten Spalte entsteht. Da $N \cdot e_j = 0$ für alle $j \in \{1, \ldots, p\}$ gilt, schlußfolgern wir aus der verallgemeinerten Cramerschen Regel für Matrizen über Ringen (genauer, aus der Gleichung $\Delta e_j = \det(N_j) = 0$), dass $\Delta e_j = 0$ für alle $j \in \{1, \ldots, p\}$, also $\Delta \cdot M = 0$ gilt (d.h. $\Delta \cdot x = 0$ für alle $x \in M$). Dies bedeutet nichts anderes, als dass M die Struktur eines $B/(\Delta)$-Moduls hat, und natürlich ist M als $B/(\Delta)$-Modul endlich erzeugt, nämlich z.B. von den Klassen der Elemente $e_1, \ldots, e_p$. Da andererseits auch $B/(\Delta)$ als B-Modul und daher (wie oben erläutert wurde), als A-Modul aufgefasst werden kann, reicht es, zu zeigen, dass $B/(\Delta)$ als A-Modul endlich erzeugt ist.

Die Aussage $\nu_{jk} \in \varphi(A) + \varphi(\mathbf{m}_A)B$ bedeutet, dass wir schreiben können

$$\nu_{jk}(z_1, \ldots, z_m) = f_{jk}(z_1, \ldots, z_{m-1}) + b_{jk}(z_1, \ldots, z_m) \cdot g_{jk}(z_1, \ldots, z_{m-1})$$

mit $g_{jk}(0) = 0$. Es folgt, dass $\nu_{jk}(0,\dots,0,z_m) = f_{jk}(0,\dots,0) = \text{const}$ ist. Damit muss

$$\Delta(0,\dots,0,z_m) = \det\left[(z_m\delta_{jk} - \nu_{jk}(0,\dots,0,z_m)_{jk}\right]$$

ein normiertes Polynom in z_m vom Grad p sein. Man beachte, dass die Ordnung von $\Delta(0,\dots,0,z_m)$ i.A. kleiner als p sein wird, wesentlich ist, dass der Koeffizient von z_m^p gleich 1 ist. Wir erhalten damit, dass Δ eine in z_m reguläre Potenzreihe der Ordnung $l \le p$ ist. Wir können nun zeigen, dass $B/(\Delta)$ endlich über A erzeugt wird, nämlich von den Potenzen $1, z_m, z_m^2, \dots, z_m^l$: Sei $f \in B$ beliebig gegeben, dann wenden wir den Divisionssatz von Weierstraß (Satz 5.5) auf f und Δ an und erhalten, dass es eine Darstellung

$$f = q \cdot \Delta + \sum_{j=1}^{l} a_j z_m^l - j$$

gibt, wobei $a_j \in A = \mathbb{C}\{z_1,\dots,z_{m-1}\}$ ist. Dies liefert, dass in $B/(\Delta)$ die Gleichheit

$$\overline{f} = \sum_{j=1}^{l} a_j \overline{z_m}^l - j$$

gilt, und damit ist $B/(\Delta)$ als A-Modul endlich erzeugt.

(b) Ist jetzt $A = \mathbb{C}\{z_1,\dots,z_k\}$, $B = \mathbb{C}\{z_1,\dots,z_k,z_{k+1},\dots,z_m\}$, und $\pi^* : A \hookrightarrow B$ die kanonische Inklusion, so können wir die gewünschte Aussage einfach per Induktion unter Verwendung des Schritts (a) beweisen.

(c) Sei nun wir im Satz $A = \mathbb{C}\{z_1,\dots,z_n\}$ bzw. $B = \mathbb{C}\{w_1,\dots,w_m\}$ mit n und m beliebig. Wir betrachten folgendes kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "\iota"'] & & B \\
& \mathbb{C}\{z_1,\dots,z_n,w_1,\dots,w_m\} \arrow[ur, "\Phi"'] &
\end{tikzcd}$$

wobei $\iota : A = \mathbb{C}\{z_1,\dots,z_n\} \hookrightarrow \mathbb{C}\{z_1,\dots,z_n,w_1,\dots,w_m\}$ die kanonische Inklusion und $\Phi : \mathbb{C}\{z_1,\dots,z_n,w_1,\dots,w_m\} \twoheadrightarrow B = \mathbb{C}\{w_1,\dots,w_m\}$ die kanonische Projektion ist. Da der Algebrenhomorphismus Φ surjektiv ist, ist jeder endlich erzeugte B-Modul automatisch auch über $\mathbb{C}\{z_1,\dots,z_n,w_1,\dots,w_m\}$ endlich erzeugt. Im Punkt (b) haben wir aber gerade gesehen, dass jeder über $\mathbb{C}\{z_1,\dots,z_n,w_1,\dots,w_m\}$ endlich erzeugte Modul auch über $A = \mathbb{C}\{z_1,\dots,z_n\}$ endlich erzeugt ist.

2. Sei N der von $e_1,\dots,e_p$ erzeugte Untermodul von M. Da $M/\varphi(\mathbf{m}_A)M$ von $\overline{e}_1,\dots,\overline{e}_p$ erzeugt wird, gilt

$$M = N + \varphi(\mathbf{m}_A)M$$

Wenn wir nun wie vor dem Satz erläutert sowohl M als auch N mittels $\varphi : A \to B$ als A-Moduln auffassen, dann steht hier

$$M = N + \mathbf{m}_A M.$$

Nach Teil 1. wissen wir, dass N ein endlich erzeugter A-Modul ist. Dann liefert uns das Lemma von Nakayama (es sei daran erinnert, dass sowohl A als auch B lokale $\mathbb{C}$-Algebren, also insbesondere lokale Ringe sind), dass $M = N$ ist. Somit wird M als A-Modul von den Elemente $e_1,\dots,e_p$ erzeugt.

$\square$

Kapitel 6

Mannigfaltigkeiten, Vektorfelder und Differentialgleichungen

In diesem Kapitel wollen wir einige zentrale Begriffe und Ergebnisse der Differentialtopologie erläutern, welche für das weitere Studium von Singularitäten fundamental sind. Obwohl wir uns bei Entfaltungen nur für den komplexen Fall interessieren, beginnen wir zunächst mit dem Begriff der reellen Mannigfaltigkeit.

6.1 Karten, Atlanten und Manigfaltigkeiten

Wir wiederholen zunächst einige Begriffe der elementaren Topologie.

Definition-Lemma 6.1. *1. Ein topologischer Raum ist eine Menge M sowie eine Teilmenge X der Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$, genannt Menge der offenen Teilmengen von M mit folgenden Eigenschaften:*

(a) $\emptyset, X \in X$,

(b) sei $(U_i)_{i\in I}$, $U_i \in X$ dann ist $\bigcup_{i\in I} U_i \in X$,

(c) $\forall U_1, \ldots, U_k \in X$ ist $U_1 \cap \ldots \cap U_k \in X$.

2. Eine Abbildung f zwischen topologischen Räumen A und B heißt stetig, falls für alle offenen Mengen $U \subset B$ auch das Urbild $f^{-1}(U)$ eine in A offene Menge ist.

3. Eine Homöomorphismus zwischen topologischen Räumen M und N ist eine bijektive stetige Abbildung, so dass ihre Inverse auch stetig ist.

4. Sei $n \in \mathbb{N}$. Eine n-dimensionale topologische Mannigfaltigkeit ist ein topologischer Raum M, welcher Hausdorff *ist und eine* abzählbare Basis *besitzt und so dass jeder Punkt $x \in U$ eine offene Umgebung U_x besitzt (d.h., es gibt eine offene Menge U_x von M, so dass $x \in U_x$ gilt), welche zu einer offenen Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ homöomorph ist. Ein Homöomorphismus $\varphi : U \to V$ mit $U \subset M$ offen und $V \subset \mathbb{R}^n$ offen heißt Karte von M. Ein Atlas von M ist eine Überdeckung $M = \bigcup_{i\in I} U_i$ von M durch Karten U_i. Für zwei Karten $\varphi_1 : U_1 \to V_1$ und $\varphi_2 : U_2 \to V_2$ heißt die Komposition*

$$\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} : \varphi_1(U_1 \cap U_2) \to \varphi_2(U_1 \cap U_2)$$

ein Kartenwechsel.

5. Sei M eine n-dimensionale topologische Mannigfaltigkeit, dann heißt ein Atlas $\mathcal{A}$ von M differentierbar, falls alle Kartenwechsel beliebig oft differentierbar sind. Atlanten $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ heißen äquivalent, wenn auch $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ differentierbar ist, und eine Äquivalenzklasse solcher Atlanten heißt differentierbare Struktur. Eine differentierbare Mannigfaltigkeit ist eine topologische Mannigfaltigkeit mit einer differentierbaren Struktur.

6. *Eine stetige Abbildung $f : M \to N$ zwischen differentierbaren Mannigfaltigkeiten heißt (beliebig oft) differentierbar, wenn für jeden Punkt $x \in M$, jede Karte $\varphi : U \to U'$ von M mit $x \in U$ und jede Karte $\psi : V \to V'$ von N mit $f(x) \in V$ gilt, dass die Komposition*

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(f^{-1}(V) \cap U) \to V'$$

(beliebig oft) differentierbar ist. Ist f bijektiv und ist auch die Umkehrung f^{-1} differentierbar, so heißt f ein Diffeomorphismus.

Wie man sich leicht überlegt, sind Niveaumengen $f^{-1}(t)$ von $\mathbb{R}^n$ differentierbare Mannigfaltigkeiten, falls $f : U \to \mathbb{R}$ eine differentierbare oder sogar glatte Funktion und falls t kein kritischer Wert von f ist. Dies folgt insbesondere daraus, dass man f durch einen lokalen Diffeorphismus (Koordinatenwechsel) in eine Koordinatenfunktion überführen kann (siehe Lemma **??**).
Man beachte noch die folgende übliche Sprechweise: Falls $\varphi : U \to V$ eine Karte einer differentierbaren Mannigfaltigkeit ist, dann schreibt sich φ in Komponenten als $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n) : U \to V \subset \mathbb{R}^n$. Für einen gegebenen Punkt $a \in M$ sei U eine Umgebung von a und wir nehmen an (dies lässt sich durch Translation immer erreichen, dass $\varphi(a) = 0$ ist. Schreiben wir $x_1, \ldots, x_n$ für die Koordinaten in $\mathbb{R}^n$, dann ist φ durch $x_i = \varphi(x)$ für alle $x \in U$ gegeben, und wir nennen $(x_1, \ldots, x_n)$ auch die Koordinaten von $x \in U$. Jeder Punkt in U ist dann eindeutig durch seine Koordinaten $(x_1, \ldots, x_n)$ gegeben.

6.2 Tangentialräume

Wir wollen nun den Tangentialraum einer Mannigfaltigkeit an einem Punkt einführen. Dazu benötigen wir folgende Begriffe.

Definition 6.2. *Sei M eine n-dimensionale differentierbare Mannigfaltigkeit, und sei $x \in M$ ein Punkt aus M.*

1. *Sei $\varepsilon > 0$ und sei $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ eine differentierbare Abbildung mit $\gamma(0) = x$, dann heißt γ ein differentierbarer Weg durch x.*

2. *Zwei differentierbare Wege γ_1 und γ_2 durch x heißen äquivalent, falls es eine Karte $\varphi : U \to U' \subset \mathbb{R}^n$ mit $x \in U$ gibt, so dass*
$$\frac{d}{dt}(\varphi \circ \gamma_1)(0) = \frac{d}{dt}(\varphi \circ \gamma_2)(0)$$
gilt. Man beachte dass diese Bedingung nicht von der Wahl der Karte abhängt, da Kartenabbildungen differentierbar sind, ist die Bedingung für jede Karte erfüllt, wenn sie nur für eine Karte erfülllt ist. Sei $[\gamma]$ die Äquivalenzklasse eines Wegen γ durch x.

3. *Wir nennen eine Klasse $[\gamma]$ einen Tangentialvektor an M in x. Die Menge alle Äquivalenzklassen*
$$T_xM := \{[\gamma] \,|\, \gamma \text{ ist Weg durch } x\}$$
heißt Tangentialraum von M an x.

Um mit Tangentialvektoren und dem Tangentialraum wirklich arbeiten zu können, benötigen wir eine mehr algebraische Beschreibung. Hierzu führen wir zunächst eine Bezeichnung ein: Sei M eine differentiebare Mannigfaltigkeit, und $x \in M$. Dann können wir analog zum Fall $M = \mathbb{R}^n$ alle Keime bei X von (beliebig oft) differentierbaren Funktionen betrachten, und diese bezeichnen wir mit $\mathcal{E}_{M,x}$. Wie im Fall $M = \mathbb{R}^n$ ist $\mathcal{E}_{M,x}$ eine lokale $\mathbb{R}$-Algebra, wobei das maximale Ideal alle die Keime F sind, für die $f(x) = 0$ gilt. Dann haben wir die folgende Definition.

Definition 6.3. *Eine Abbildung $\delta : \mathcal{E}_{M,x} \to \mathbb{R}$ heißt eine Derivation, falls gilt:*

1. *δ ist $\mathbb{R}$-linear.*

2. Für alle $f, g \in R$ gilt

$$\delta(f \cdot g) = f(x) \cdot \delta(g) + \delta(f) \cdot g(x).$$

Die Menge aller Derivationen von $\mathcal{E}_{M,x}$ heiße Der($\mathcal{E}_{M,x}$).

Man sieht leicht, dass $\mathrm{Der}(\mathcal{E}_{M,x})$ ein $\mathbb{R}$-Vektorraum ist. Diesen wollen wir nun konkret beschreiben, sei dazu zunächst $M = \mathbb{R}^n$, und $x = 0$. Dann haben wir spezielle Derivationen

$$\begin{array}{rcl} \frac{\partial}{\partial_{x_i}} : \mathcal{E}_{\mathbb{R}^n,0} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f & \longmapsto & \frac{\partial f}{\partial x_i}(0). \end{array}$$

Es gilt nun die folgende Aussage.

Lemma 6.4. *Die Derivationen $\partial/\partial x_i$ bilden eine Basis von $\mathcal{E}_{n,0}$.*

Beweis. Aus dem Darstellungslemma (siehe Lemma **??**) folgt, dass wir alle $f \in \mathcal{E}_{n,0}$ als

$$f = f(0) + \sum_{i=1}^{n} x_i f_i$$

mit Keimen $f_i \in \mathcal{E}_{n,0}$ schreiben können. Sei $\delta \in \mathrm{Der}(\mathcal{E}_{n,0})$. Dann ist

$$\begin{array}{rcl} \delta(f) & = & \delta(f(0)) + \sum_{i=1}^{n} \delta(x_i) \cdot f_i(0) \\ 0 & \sum_{i=1}^{\delta}(x_i) \cdot \frac{\partial f}{x_i}, & \end{array}$$

man beachte hierbei, dass nach Definition $f_i(0) = \partial f/\partial x_i$ gilt. Da $\delta(x_i) \in \mathbb{R}$ ist, haben wir also bewiesen, dass $\delta(f) \in \mathrm{Span}_{\mathbb{R}}(\partial f/\partial x_i)_{i=1,\ldots,n}$ gilt.
Es bleibt, die lineare Unabhängigkeit der Derivationen $\partial/\partial x_1, \ldots, \partial/\partial x_n$ zu zeigen. Seien also $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ mit

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial}{\partial x_i} = 0$$

vorgegeben. Dann folgt insbesondere für alle $j \in \{1, \ldots, n\}$, dass

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \underbrace{\frac{\partial x_j}{\partial x_i}}_{=\delta_{ij}} = a_j = 0.$$

Also haben wir $a_1 = \ldots = a_n = 0$, und damit ist gezeigt, dass $\partial/\partial x_1, \ldots, \partial/\partial x_n$ eine Basis von $\mathcal{E}_{n,0}$ sind. $\square$

Daraus erhalten wir eine neue algebraische Beschreibung des Tangentialraumes an einen Punkt einer Mannigfaltigkeit.

Satz 6.5. *Sei M eine differentierbare Mannigfaltigkeit, und $x \in M$. Dann gibt es einen Vektorraumisomorphismus*

$$\begin{array}{rcl} T_x M & \longrightarrow & Der(\mathcal{E}_{M,x}) \\ [\gamma] & \longmapsto & \left(f \mapsto \frac{\partial(f\circ\gamma)}{\partial t}(0)\right). \end{array}$$

Insbesondere sehen wir, dass $T_x M$ ein n-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum ist.

Beweis. Es ist klar, dass diese Abbildung linear ist (nachrechnen!), wir haben also Injektivität und Surjektivität zu zeigen. Seien γ, γ' Wege durch $x \in M$, so dass $\frac{\partial(f\circ\gamma)}{\partial t}(0) = \frac{\partial(f\circ\gamma')}{\partial t}(0)$ für alle $f \in \mathcal{E}_{M,0}$ gilt. Insbesondere können wir für f die Komponenten φ_i, $i = 1, \ldots, n$ einer Karte $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n) : U \to U' \subset \mathbb{R}^n$ mit $x \in U$ einsetzen, und wir erhalten

$$\frac{\partial(\varphi_i \circ \gamma)}{\partial t}(0) = \frac{\partial(\varphi_i \circ \gamma')}{\partial t}(0)$$

Es ist dann also

$$\frac{\partial(\varphi\circ\gamma)}{\partial t}(0)=\frac{\partial(\varphi\circ\gamma')}{\partial t}(0)$$

(Gleichheit von Vektoren in $\mathbb{R}^n$), und damit nach Definition $[\gamma]=[\gamma']$.
Die Abbildung ist aber auch surjektiv, denn für $\delta\in\mathrm{Der}(\mathcal{E}_{M,x})$ können wir in lokalen Koordinaten $(x_1,\dots,x_n)$ von x schreiben:

$$\delta=\sum_{i=1}^{n}a_i\frac{\partial}{\partial x_i}$$

für $a_i\in\mathbb{R}$. Dann ist

$$\begin{array}{rcl}\gamma:(-\varepsilon,\varepsilon) & \longrightarrow & M\\ t & \longmapsto & (a_1t,\dots,a_nt)\end{array}$$

eine Kurve, so dass $[\gamma]$ ein Urbild für δ ergibt. $\square$

Eine Abbildung zwischen differentierbaren Mannigfaltigkeiten induziert eine Abbildung zwischen den entsprechenden Tangentialräumen. Dies wird in der folgenden Aussage präzisiert.

Definition-Lemma 6.6. *Seien M und N differentierbare Mannigfaltigkeiten, und sei $f:M\to N$ eine differentierbare Abbildung. Sei $x\in M$ und $y:=f(x)$ in N. Dann gilt das folgende.*

1. *f induziert einen $\mathbb{R}$-Algebrenhomomorphismus*

$$\begin{array}{rcl}f^*:\mathcal{E}_{N,y} & \longrightarrow & \mathcal{E}_{M,x}\\ g & \longmapsto & g\circ f\end{array}$$

2. *f induziert die folgende Abbildung zwischen den Tangentialräumen*

$$\begin{array}{rcl}T_af:T_xM & \longrightarrow & T_yN\\ \delta & \longmapsto & \delta\circ f^*\end{array}$$

genannt die Tangentialabbildung von f (am Punkt $x\,\mathrm{Im}\,M$).

3. *T_af ist $\mathbb{R}$-linear.*

Alle drei Aussagen sind elementar zu verifizieren, man setze einfach jeweils die Definitionen ein.
Schließlich wollen wir noch spezielle Teilmengen von Mannigfaltigkeiten betrachten, welche mit der Mannigfaltigkeitsstruktur in bestmöglicher Weise verträglich sind.

Definition 6.7. *Sei M eine n-dimensionale differentierbare Mannigfaltigkeit, sei $k\in\{0,\dots,n\}$, und sei $N\subset M$ eine Teilmenge. Dann heißt N eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit, falls für alle $x\in N$ eine Karte $\varphi:U\to U'\subset\mathbb{R}^n=\mathbb{R}^k\times\mathbb{R}^{n-k}$ von M mit $x\in U$ existiert, so dass*

$$\varphi(U\cap N)=U'\cap\left(\mathbb{R}^k\times\{0\}\right)$$

gilt. Dann heißt die Zahl $n-k$ die Kodimension der Untermannigfaltigkeit N.

Man sieht sofort, dass eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit selbst eine differentierbare Mannigfaltigkeit der Dimension k ist, denn ein differentierbarer Atlas ist durch die Menge der Karten

$$\varphi_{|U\cap N}:U\cap N\to U'\cap\mathbb{R}^k$$

gegeben, wobei $\varphi:U\to U'$ eine Karte von M wie in der Definition oben ist. Ebenfalls sieht man, dass der Tangentialraum T_xN an einen Punkt $x\in N$ in natürlicher Weise ein k-dimensionaler Untervektorraum von T_xM ist.

6.3 Tangentialbündel und Vektorfelder

Wir werden hier in aller Kürze den fundamentalen Begriff des Vektorbündels und dann spezieller des Tangentialbündels einführen. Damit kommen wir dann zu Vektorfeldern und den dadurch definierten Flüssen. Wir starten mit dem allgemeineren Begriff des differentierbaren Faserbündels.

Definition 6.8. *Seien E, B und F differentierbare Mannigfaltigkeiten, sei $\pi : E \to B$ eine surjektive differentierbare Abbildung, so dass folgendes „‘Axiom der lokalen Trivialität“ gelte: Für alle $b \in B$ gibt es eine Umgebung U sowie einen Diffeomorphismus*

$$\psi : \pi^{-1}(U) \longrightarrow U \times F$$

derart, dass das Diagram

$$\begin{tikzcd} \pi^{-1}(U) \arrow[rr, "\psi"] \arrow[dr, "\pi"'] & & U \times F \arrow[dl, "pr_1"] \\ & U & \end{tikzcd}$$

kommutiert. Dann heißt (E, π, B, F) ein (lokal triviales) differentierbares Faserbündel.

Man nennt manchmal auch einfach E das differentierbare Faserbündel, F die Faser und B die Basis. Der Diffeomorphismus $\psi : \pi^{-1}(U) \longrightarrow U \times F$ heißt auch eine Bündelkarte von E.
Das einfachste Beispeil eines Faserbündels bekommt man, wenn man zwei differentierbare Mannigfaltigkeiten M_1 und M_2 betrachtet. Dann ist das kartesische Produkt $M_1 \times M_2$ in natürlicher Weise wieder eine differentierbare Mannigfaltigkeit (hat man Karten $\varphi_i : U_i \to U_i'$ mit $I \in \{1, 2\}$, dann ist $\varphi_1 \times \varphi_2 : U_1 \times U_2 \to U_1' \times U_2'$ eine Karte von $M_1 \times M_2$). Dann wird durch $E := M_1 \times M_2$, $B := M_2$ und $\pi := pr_2$ ein differentierbares Faserbündel mit Faser $F = M_1$ definiert (und analog durch $E := M_1 \times M_2$, $B := M_1$ und $\pi := pr_1$ ein differentierbares Faserbündel mit Faser $F = M_2$). In diesem Beispiel ist das Bündel also global trivial.
Im folgenden interessieren wir uns für spezielle Bündel, bei denen die Faser die Struktur eines Vektorraumes hat.

Definition 6.9. *Ein n-dimensionales differentierbares Vektorbündel ist ein differentierbares Faserbündel (E, π, B, F), bei welchem $F = \mathbb{R}^n$ ist, bei dem jede Faser $\pi^{-1}(b)$ (für $b \in B$) ein n-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum ist und so, dass für jede Bündelkarte $\psi : \pi^{-1}(U) \longrightarrow U \times F$ gilt: Für alle $B \in U$ ist die Einschränkung*

$$\psi_b := \psi_{|E_b} : E_b \longrightarrow \{b\} \times F$$

ein Isomorphismus von Vektorräumen (insbesondere also eine lineare Abbildung).

Wir kommen nun zum für uns wichtigesten Beispiel.

Definition-Lemma 6.10. *Sei M eine n-dimensionale differentierbare Mannigfaltigkeit. Definiere*

$$TM := \bigcup_{x \in M} T_x M$$

sowie

$$\begin{array}{rcl} \pi : TM & \longrightarrow & M \\ v \in T_x M & \longmapsto & x. \end{array}$$

Dann ist $(TM, \pi, M, \mathbb{R}^n)$ ein n-dimensionales differentierbares Vektorbündel, genannt das Tangentialbündel von M.

Beweis. Sei ein Atlas $\{\varphi_\alpha : U_\alpha \to U_\alpha'\}_\alpha$ mit $U_\alpha \subset M$ und $U_\alpha' \subset \mathbb{R}^n$ gegeben. Für jede Karte $\varphi_\alpha : U_\alpha \to U_\alpha'$ konstruieren wir eine Bündelkarte $\psi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times \mathbb{R}^n$ auf folgende Weise: Sei $x \in U_\alpha$ und $v \in$

$T_xM \subset \pi^{-1}(U)$. Dann betrachten wir die Tangentialabbildung der Kartenabbildung φ_α, d.h., wir haben $T_x\varphi_\alpha(v) \in T_{\varphi_\alpha(x)}\mathbb{R}^n$. Dann haben wir nach Lemma 6.4 eine Darstellung

$$T_x\varphi_\alpha(v) = \sum_{i=1}^n a_i \left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_{\varphi_\alpha(x)}$$

Wir definieren dann

$$\psi_\alpha(v) := (x, a_1, \ldots, a_n) \in U_\alpha \times \mathbb{R}^n.$$

Es gilt dann offensichtlich, dass $\pi = pr_1 \circ \psi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha$ ist, und außerdem ist die Abbildung bijektiv. Darüber hinaus ist für alle $b \in U_\alpha$ die Einschränkung

$$(\psi_\alpha)_{|T_bM} : T_bM \longrightarrow \{b\} \times \mathbb{R}^n$$

linear und ein Isomorphismus.
Wir wollen jetzt zeigen, dass TM mit den eben definierten Bündelkarten ein differentierbares Vektorbündel ist. Dazu müssen wir die Menge TM zunächst mit der Struktur einer differentierbaren Mannigfaltigkeit, und damit zuallererst einmal mit der Struktur eines topologischen Raumes versehen.
Eine Teilmenge $U \subset TM$ soll offen sein, genau dann, wenn für alle α die Menge $\psi_\alpha(U \cap \pi^{-1}(U_\alpha))$ offen in $U_\alpha \times \mathbb{R}^n$ ist. Mit dieser Definition ist klar, dass insbesondere die Mengen $\pi^{-1}(U_\alpha)$ offen sind.
Wir müssen zeigen, dass mit dieser Definition der topologische Raum TM (dass es tatsächlich einer ist, dass also die Axiome in Definition 6.1, 1. erfüllt sind, rechnet man leicht nach) zu einer differentierbaren Mannigfaltigkeit wird. Dazu betrachten wir eine weitere Karte $\varphi_\beta : U_\beta \to U'_\beta$, derart, dass x auch ein Punkt in U_β ist. Für einen beliebigen Punkt $y \in U_\beta$ mit $\varphi_\beta(y) = (y_1, \ldots, y_n)$ und für einen Vektor $w \in T_yM$ haben wir dann

$$\psi_\beta(w) = (y, b_1, \ldots, b_n),$$

wobei die Koeffizienten b_i durch die Gleichung

$$T_y\varphi_\beta(w) = \sum_{i=1}^n b_i \left.\frac{\partial}{\partial y_i}\right|_{\varphi_\beta(y)}$$

definiert sind. Dies liefert uns also eine Abbildung

$$\psi_\beta : \pi^{-1}(U_\beta) \longrightarrow U_\beta \times \mathbb{R}^n.$$

Sei nun ein Keim $g \in \mathcal{E}_{M,x}$ gegeben. Wir benutzen die äquivalente Beschreibung von Tangentialvektoren durch Derivationen aus Satz 6.5, und erhalten

$$\begin{aligned}
\left.\frac{\partial}{\partial y_k}\right|_{\varphi_\beta(y)} (g \circ \varphi_\beta^{-1}) &= \left.\frac{\partial}{\partial y_k}\right|_{\varphi_\beta(y)} (g \circ \varphi_\alpha^{-1} \circ \varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}) \\
&= \sum_{i=1}^n \left(\left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_{\varphi_\alpha(y)} (g \circ \varphi_\alpha^{-1}) \right) \cdot \left(\underbrace{\frac{\partial(\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1})_i}{\partial y_k}(\varphi_\beta(y))}_{=: c_{ik}(y)} \right) \\
&= \sum_{i=1}^n \left(\left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_{\varphi_\alpha(y)} (g \circ \varphi_\alpha^{-1}) \right) \cdot c_{ik}(y),
\end{aligned}$$

wobei die Abbildung $\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1} : \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \to \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ in Komponenten $((\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1})_1, \ldots, (\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1})_n)$ geschrieben wird. An jedem Punkt $y \in U_\alpha \cap U_\beta$ haben wir also den Basiswechsel

$$\left.\frac{\partial}{\partial y_k}\right|_{\varphi_\beta(y)} = \sum_{i=1}^n c_{ik}(y) \left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_{\varphi_\alpha(y)}.$$

und somit ist die Matrix $(c_{ik}(y))$ für alle $y \in U_\alpha \cap U_\beta$ invertierbar. Wir haben für die Abbildung

$$\psi_\alpha \circ \psi_\beta^{-1} : (U_\alpha \cap U_\beta) \times \mathbb{R}^n \longrightarrow (U_\alpha \cap U_\beta) \times \mathbb{R}^n$$

folgende Beschreibung:

$$(\psi_\alpha \circ \psi_\beta^{-1})(y, b_1, \ldots, b_n) = (y, \sum_{i=1}^n c_{1i} b_i, \ldots, \sum_{i=1}^n c_{ni} b_i),$$

d.h., $\psi_\alpha \circ \psi_\beta^{-1}$ ist ein Diffeomorphismus. Damit können wir mit den Karten

$$(\varphi_\alpha \times \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}) \circ \psi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \longrightarrow U'_\alpha \times \mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^{2n}$$

einen differentierbaren Atlas konstruieren, und damit ist TM eine $2n$-dimensionale differentierbare Mannigfaltigkeit. Mit der Projektion $\pi : TM \to M$ und der Faser $\mathbb{R}^n$ bekommen wir dann ein differentierbares Faserbündel $(TM, \pi, M, \mathbb{R}^n)$, und wie wir oben schon gesehen haben, sind die Einschränkungen $(\psi_\alpha)_{|T_bM} : T_bM \longrightarrow \{b\} \times \mathbb{R}^n$ der Bündelkarten ψ_α Isomorphismen von Vektorräumen, also ist das Tupel $(TM, \pi, M, \mathbb{R}^n)$ sogar ein (differentierbares) Vektorbündel. □

Wir können nun die Tangentialabbildung punktunabhängig definieren.

Definition 6.11. *Seien M, N differentierbare Mannigfaltigkeiten, und sei $f : M \to N$ differentierbar. Dann ist die Abbildung*

$$Tf : TM \longrightarrow TN$$

welche auf T_xM durch T_xf definiert ist die Tangentialabbildung von f.

Man überprüft leicht, dass Tf eine differentierbare Abbildung ist.
Nun kommen wir zu einer wesentlichen Konstruktion für Vektorbündel, welche dann zum Begriff des Vektorfelds führt. Wir führen sie allgemeiner für Faserbündel ein.

Definition 6.12. *Sei $\pi : E \to B$ ein differentierbares Faserbündel. Dann heißt eine differentierbare Abbildung $\sigma : B \to E$ ein Schnitt von E, falls $\pi \circ \sigma = \mathrm{id}_B$ gilt.*

Ein Schnitt wählt also (in stetiger und sogar differentierbarer Art und Weise) zu jedem Punkt $b \in B$ einen Punkt in der Faser $\pi^{-1}(b)$ aus.
Falls $E \to B$ ein Vektorbündel ist, gibt es immer einen kanonisch definerten Schnitt $\sigma_0 : B \to E$, genannt den Nullschnitt: Man setzt einfach $\sigma_0(b) := 0 \in E_b = \pi^{-1}(b)$.
Im Allgemeinen können Schnitte von Vektor- oder Faserbündeln nicht auf ganz B definiert sein, sondern nur auf einer offenen Teilmenge $U \subset B$, man spricht dann von lokalen Schnitten.
Nun kommen wir zum zentralen Begriff dieses Abschnitts.

Definition 6.13. *Sei M eine differentierbare Mannigfaltigkeit. Dann heißt ein Schnitt $X : M \to TM$ des Tangentialbündels ein (differentierbares) Vektorfeld.*

Die anschauliche Vorstellung eines Vektorfeldes ist, dass zu jedem Punkt der Mannigfaltigkeit ein Tangentialvektor zugeordnet wird, und zwar in stetiger und differentierbarer Art und Weise. Anschaulich gibt dies das Bild eines Igels.
Die nächste zentrale Aussage ist, dass man ein Vektorfeld „integrieren“ kann, d.h., man kann für einen vorgegebenen Punkt eine Kurve durch diesen Punkt finden, dessen Ableitungsvektor überall dem durch das Vektorfeld vorgegebenen Vektor entspricht. Um dies präzise formulieren und beweisen zu können, führen wir zunächst einige Definitionen ein.

Definition 6.14. *Sei M eine differentierbare Mannigfaltigkeit, und sei $U \subset M$ offen. Sei $\varepsilon > 0$ und setze $I := (-\varepsilon, \varepsilon)$. Dann ist eine lokaler Fluß (oder auch eine lokale einparametrige Gruppe von Diffeomorphismen) eine differentierbare Abbildung*

$$g : I \times U \longrightarrow M$$

mit den folgenden Eigenschaften:

1. *Für jedes $t \in I$ ist $g_t : U \to U$, $x \mapsto g(t,x)$ ein Diffeomorphismus von U auf eine offene Teilmenge von M.*

2. *Für alle $s, t \in I$, so dass auch $s + t \in I$ und $g_s(x) \in U$ für alle $x \in U$ gilt, haben wir*

$$g_{t+s} = g_t \circ g_s.$$

3. $g_0 = \mathrm{id}$.

Jedem Fluß können wir folgendermaßen ein Vektorfeld auf U zuordnen, dabei benutzen wir die Beschreibung von Tangentialvektoren durch Derivationen aus Satz 6.5: Sei $x \in U$ und ein Keim $f \in \mathcal{E}_{U,x} = \mathcal{E}_{M,x}$ gegeben. Dann definieren wir

$$X_x(f) := \frac{d}{dt}\left(f \circ g_t(x)\right)(0)$$

Wie man leicht nachrechnet, ist X_x ein Element von $\mathrm{Der}(\mathcal{E}_{U,x})$, also ein Tangentialvektor in $T_xU = T_xM$. Es ist auch klar, dass die Abbildung $x \mapsto X_x$ differentierbar (und natürlich ist die Komposition mit der Projektion $\pi : TM \to M$ die Identität) also ein Schnitt in TM ist. Wir nennen X das durch den Fluß g induzierte Vektorfeld auf U. Unser Ziel ist es jetzt, den entgegengesetzen Weg zu gehen: Für ein gegebenes Vektorfeld wollen wir einen Fluß konstruieren, welcher dieses Vektorfeld induziert. Hierzu betrachten wir zunächst für gegebenes $g : I \times U \to U$ und für einen festen Punkt $x \in U$ die Abbildung

$$\begin{array}{rcl} \varphi_x : I & \longrightarrow & M \\ t & \longmapsto & g_t(x), \end{array}$$

dies ist wegen der Differentierbarkeit von g ein differentierbarer Weg im Sinne von Definition 6.2. Man nennt diesen Weg die Phasenkurve des Flusses g durch den Punkt x. Das durch g induzierte Vektorfeld X auf U hat dann als Wert bei x gerade den Tangentialvektor $[\varphi_x]$.
Das Hauptergebis dieses Abschnitts ist die folgende Aussage.

Satz 6.15 (Integration von Vektorfeldern)**.** *Sei M eine differentierbare Mannigfaltigkeit, sei X ein Vektorfeld auf M und $a \in M$ ein Punkt. Dann existiert eine offene Umgebung U von a in M, ein Intervall $I = (-\varepsilon, \varepsilon)$ mit $\varepsilon > 0$ sowie ein eindeutig bestimmter differentierbarer Fluß*

$$g : I \times U \longrightarrow U,$$

welcher das vorgegebene Vektorfeld X auf U induziert.

Beweis. Da die Aussage des Satzes lokaler Natur ist (es existiert eine Umgebung U, so dass dies und das gilt), kann man von vornherein annehmen, dass M eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ ist, wobei wieder $(x_1, \ldots, x_n)$ die Koordinaten sein sollen. Dann haben wir für X gemäß Lemma 6.4 eine Darstellung

$$X_x = \sum_{i=1}^{n} f_i(x) \cdot \left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_x$$

für alle $x \in M$, wobei $f_i : M \to \mathbb{R}$ auf M differentierbare Funktionen sind. Sei

$$f := (f_1, \ldots, f_n) : M \to \mathbb{R}^n.$$

Falls es einen Fluß $g : I \times U \to M$ gibt, welcher X induziert, und falls $\varphi : I \to M$ die Phasenkurve von g durch x ist, dann muss gelten

$$\begin{array}{rcl} \varphi'(t) & = & f(\varphi(t)) \\ \varphi(0) & = & a. \end{array}$$

Schreiben wir $y = \varphi(t)$, mit $y \in \mathbb{R}^n$, dann ist φ die Lösung der vektorwertigen Differentialgleichung

$$y' = f(y)$$

mit der Anfangsbedingung $\varphi(0) = a$. Die Theorie der Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen, präziser, der Satz von Picard-Lindelöf liefert dann die Existenz von $\delta > 0$, einer Umgebung U_0 von und einer Abbildung (mit $I_0 := (-\delta, \delta)$)

$$g : I_0 \times U \longrightarrow M$$

so dass

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} g(t,x) &= f(g(t,x)) \\ g(0,x) &= x \end{aligned}$$

für alle $t \in I_0$ und alle $x \in U_0$ gilt. Darüber hinaus liefert die differentierbare Abhängigkeit vom Anfangswert, dass g eine differentierbare Abbildung von $I_0 \times U$ nach M ist. Wenn wir nun $g_t(x) := g(t,x)$ schreiben, dann können wir das Intervall $\varepsilon > 0$ mit $I := (-\varepsilon, \varepsilon) \subset I_0$ sowie eine eventuell kleinere Umgebung $U \subset U_0$ von a so wählen, dass für alle $s, t \in I$ gilt, dass $s + t \in I$ und $g_{s+t}(U) \subset U$ gilt.
Wir müssen nun noch beweisen, dass durch die eingeschränkte Abbildung $g : I \times U \to M$ ein Fluß gegeben ist. Dazu wählen wir $x \in U$ und $s \in I$ fest. Wir betrachten die Abbildungen

$$\begin{aligned} \widetilde{\varphi} : I &\longrightarrow M \\ t &\longmapsto \varphi_{t+s}(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \psi : I &\longrightarrow M \\ t &\longmapsto (g_t \circ g_s)(x) \end{aligned}$$

Beide sind Lösung der Differentialgleichung $y' = f(y)$, und für beide gilt $\widetilde{\varphi}(0) = \psi(0) = g_s(x)$. Nach der Eindeutigkeitsaussage im Satz von Picard-Lindelöf sind beide Funktionen dann gleich, d.h., es gilt

$$g_{t+s} = g_t \circ g_s$$

für alle $s, t \in I$. Speziell erhalten wir für $s = -t$, dass $g_t \circ g_{-t} = g_0 = \mathrm{id}$ ist für alle $t \in I$. Damit ist jedes g_t ein Diffeomorphismus von U in eine offene Teilmenge von M.
Es ist klar (durch die Konstruktion von g), dass das Vektorfeld X durch g induziert wird. Wieder wegen der Eindeutigkeit der durch den Satz von Picard-Lindelöf konstruierten Lösung des obigen Differentialgleichungssystems ist der Fluß g eindeutig bestimmt. $\square$

6.4 Komplexe Mannigfaltigkeiten

In den Anwendungen weiter unten über Entfaltungen von Singularitäten benötigen wir den Begriff der *komplexen Mannigfaltigkeit*. Viele der eben eingeführten und bewiesenen Tatsachen über differentierbare Mannigfaltigkeiten lassen sich ins Komplexe übertragen. Dies wollen wir in diesem Abschnitt diskutieren.

Definition 6.16. *Sei M eine topologische Mannigfaltigkeit der Dimension $2n$.*

1. *Ein Atlas von M heißt komplex oder holomorph, falls alle Kartenwechsel holomorphe Abbildungen sind, wobei wir offenen Mengen in $\mathbb{R}^{2n}$ mit offenen Mengen in $\mathbb{C}^n$ identifizieren. Komplexe Atlanten $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ heißen äquivalent, wenn auch $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ ein komplexer Atlas ist. Eine komplexe Struktur auf M ist eine Äquivalenzklasse komplexer Atlanten, und M heißt eine komplexe Mannigfaltigkeit, falls es eine komplexe Struktur auf M gibt. Dann nennt man die Zahl n (nicht $2n$) die komplexe Dimension von M.*

2. *Seien M und N komplexe Mannigfaltigkeiten, $x \in M$ und $f : M \to N$ eine Abbildung. Dann heißt f komplex differentierbar in x, wenn für jede Karte $\varphi : U \to U' \subset \mathbb{C}^n$ mit $x \in U$ und jede Karte $\psi : V \to V' \subset \mathbb{C}^m$ mit $f(x) \in V$ gilt, dass die Abbildung*

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(f^{-1}(V) \cap U) \to \mathbb{C}^m$$

in $\varphi(x)$ komplex differentierbar ist. Die Abbildung f heißt holomorph, wenn sie komplex differentierbar für alle $x \in M$ ist. Sie heißt biholomorph, falls sie darüber hinaus auch bijektiv und ihre Umkehrung auch holomorph ist.

3. *Wie im reellen Fall (also im Fall differentierbarer Mannigfaltigkeiten) bezeichnen wir die Komponentenfunktionen $x_i = \varphi_i$ einer Karte $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n) : U \to U' \subset \mathbb{C}^n$ mit $\varphi(x) = 0$ als Koordinaten des Punktes $x \in U$. Jeder Punkt aus U wird dann eindeutig durch seine Koordinaten beschrieben, und jede Funktion auf $f : U \to \mathbb{C}$ kann in den Koordinaten ausgedrückt werden. So eine Funktion ist dann holomorph genau dann, wenn als Funktion der Koordinaten holomorph ist.*

4. *Für $x \in M$ sei*
$$\mathcal{O}_{M,x} := \{[f]_x \mid f : U \to \mathbb{C} \text{ holomorph in Umgebung } U \text{ von } x\}$$
die Menge der Keime bei x von holomorphen Funktionen auf M. Insbesondere bezeichnen wir für $M = \mathbb{C}^n$ den Raum der Keime holomorpher Funktionen bei $0 \in \mathbb{C}^n$ mit $\mathcal{O}_{n,0}$ oder kürzer $\mathcal{O}_n$.

Wir wollen nun gewisse Aspekte von differentierbaren Mannigfaltigkeiten, wie wir sie bis jetzt entwickelt haben, auf komplexe Mannigfaltigkeiten übertragen.

Definition 6.17. *Sei M eine komplexe Mannigfaltigkeit und $x \in M$. Dann ist eine Derivation von $\mathcal{O}_{M,x}$ mit Werten in $\mathbb{C}$ eine Abbildung $\delta : \mathcal{O}_{M,x}$, welche $\mathbb{C}$-linear ist und welche der Leibniz-Regel*
$$\delta(f \cdot g) = \delta(f) \cdot g(x) + f(x) \cdot \delta(g)$$
genügt. Wir bezeichnen mit $Der(\mathcal{O}_{M,a})$ den $\mathbb{C}$-Vektorraum aller Derivationen von $\mathcal{O}_{M,x}$ mit Werten in $\mathbb{C}$.

Wie im reellen Fall haben wir die folgende Aussage, die genauso bewiesen wird (siehe Lemma 6.4)

Definition-Lemma 6.18. *Sei für $i = 1, \ldots, n$ die Derivation*
$$\frac{\partial}{\partial z_i} : \mathcal{O}_n \longrightarrow \mathbb{C}$$
durch $f \mapsto (\partial f / \partial z_i)(0)$ definiert. Dann bilden $\partial/\partial x_1, \ldots, \partial/\partial x_n$ eine $\mathbb{C}$-Basis von $Der(\mathcal{O}_n)$.

Nun definieren wir den Tangentialraum einer komplexen Mannigfaltigkeit.

Definition 6.19.

1. *Sei M eine n-dimensionale komplexe Mannigfaltigkeit, und $x \in M$, dann heißt der komplexe Vektorraum $Der(\mathcal{O}_{M,x})$ der Tangentialraum von M an X und wird mit T_xM bezeichnet. Es ist $\dim_{\mathbb{C}}(T_xM) = n$.*

2. *Seien M und N komplexe Mannigfaltigkeiten, und sei $f : M \to N$ eine holomorphe Abbildung, dann ist für jedes $x \in M$ ein Algebrenhomomorphismus*
$$\begin{array}{rcl} f^* : \mathcal{O}_{N,f(x)} & \longrightarrow & \mathcal{O}_{M,x} \\ g & \longmapsto & g \circ f \end{array}$$
gegeben. Dann definieren wir die Abbildung
$$\begin{array}{rcl} T_xf : T_xM & \longrightarrow & T_{f(x)}N \\ \delta & \longmapsto & \delta \circ f^* \end{array}$$
und man sieht leicht, dass T_xM eine $\mathbb{C}$-lineare Abbildung ist.

3. *Wie im Falle differentierbarer Mannigfaltigkeiten sei*
$$TM := \bigcup_{x \in M} T_xM$$
das holomorphe Tangentialbündel von M, und ein Schnitt $X : M \to TM$ heißt holomorphes Vektorbündel auf X.

Eine komplexe Mannigfaltigkeit M der (komplexen) Dimension n hat eine zugrunde liegende reelle (differentierbare) Mannigfaltigkeit der reellen Dimension $2n$, welche wir mit $M^{\mathbb{R}}$ bezeichnen. Wir wollen die Tangentialräume an M und an $M^{\mathbb{R}}$ vergleichen. Hierzu benötigen wir zunächst einige Begriffe der linearen Algebra.
Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum. Dann heißt ein Endomorphismus $J \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(V)$, so dass $J^2 := J \circ J = -\mathrm{id}_V$ gilt (natürlich ist J dann automatisch ein Automorphismus) eine *komplexe Struktur* auf V. Wir haben dann die folgende elementare Aussage, bei der wir verwenden, dass jeder komplexe Vektorraum in natürlicher Weise die Struktur eines reellen Vektorraums trägt (indem reelle Zahlen einfach als komplexe Zahlen aufgefasst werden, und daher die Skalarmultiplikation mit Elementen aus $\mathbb{C}$ automatisch eine Skalarmultiplikation mit Elementen aus $\mathbb{R}$ definiert).

Lemma 6.20. *Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum mit komplexer Struktur. Dann ist V natürlicherweise ein $\mathbb{C}$-Vektorraum. Ist andererseits ein $\mathbb{C}$-Vektorraum W gegeben, so existiert für den unterliegenden $\mathbb{R}$-Vektorraum (bezeichnet mit $W^{\mathbb{R}}$) eine natürliche komplexe Struktur.*

Beweis. Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum und $J \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(V)$ mit $J^2 = -\mathrm{id}_V$. Dann definieren wir eine Skalarmultiplikation

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{C} \times V & \longrightarrow & V \\ (x+iy, v) & \longmapsto & x \cdot v + y \cdot J(v). \end{array}$$

Dann ist leicht zu sehen, dass dies V die Struktur eines $\mathbb{C}$-Vektorraumes gibt.
Sei nun W ein $\mathbb{C}$-Vektorraum und sei $J \in \mathrm{End}\,(W^{\mathbb{R}})$ der durch die Multiplikation mit i gegebene Endomorphismus. Wegen $i^2 = -1$ ist dann $J^2 = -\mathrm{id}_{W^{\mathbb{R}}}$, also ist J eine komplexe Struktur auf $W^{\mathbb{R}}$. □

Falls der komplexe Vektorraum W endlich-dimensional ist mit Basis $v_1, \ldots, v_n$, so ist $v_1, Jv_1, \ldots, v_n, Jv_n$ eine $\mathbb{R}$-Basis von $W^{\mathbb{R}}$ (insbesondere ist $\dim_{\mathbb{R}}(W^{\mathbb{R}}) = 2n$). Insbesondere haben wir für $W = \mathbb{C}^n$ die induzierte komplexe Struktur auf $\mathbb{R}^{2n}$, welche durch Multiplikation mit der Matrix

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ -1 & 0 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 0 & 1 \\ & & & -1 & 0 \end{pmatrix} \tag{6.1}$$

gegeben ist.
Wir kommen nun zum angesprochenen Vergleich der komplexen und reellen Tangentialräumen.

Lemma 6.21. *Sei M eine komplexe Mannigfaltigkeit und $M^{\mathbb{R}}$ die zugrunde liegende differentierbare Mannigfaltigkeit. Sei $x \in M$, dann ist der (reelle) Tangentialraum $T_xM^{\mathbb{R}}$ kanonisch isomorph zum dem komplexen Tangentialraum T_xM zugrunde liegenden rellen Vektorraum. Außerdem wird durch diesen Isomorphismus eine komplexe Struktur auf $T_xM^{\mathbb{R}}$ induziert.*

Beweis. Sei $\varphi : U \to U' \subset \mathbb{C}^n$ eine Karte von M mit $x \in U$ und $\varphi(x) = 0$. Dann definiert

$$\begin{array}{rcl} \widetilde{\varphi} : U & \longrightarrow & U' \subset \mathbb{R}^{2n} \\ y & \longmapsto & (\Re(\varphi_1)(y), \Im(\varphi_1)(y), \ldots, \Re(\varphi_n)(y), \Im(\varphi_n)(y)) \end{array}$$

eine Karte der differentierbaren Mannigfaltigkeit $M^{\mathbb{R}}$. Dann betrachten wir die Tangentialabbildungen

$$T_x\varphi : T_xM \longrightarrow T_0\mathbb{C}^n$$

und

$$T_x\widetilde{\varphi} : T_xM^{\mathbb{R}} \longrightarrow T_0\mathbb{R}^{2n}.$$

Jetzt haben wir in Lemma 6.4 sowie in Lemma 6.18 gesehen, dass

$$T_0\mathbb{R}^{2n} = \bigoplus_{i=1}^{n} \left(\mathbb{R}\frac{\partial}{\partial x_i} \oplus \mathbb{R}\frac{\partial}{\partial y_i} \right) \cong \mathbb{R}^{2n}$$

und

$$T_0\mathbb{C}^n = \bigoplus_{i=1}^{n} \left(\mathbb{C}\frac{\partial}{\partial z_i} \right) \cong \mathbb{C}^n.$$

Dann ergibt sich aus der Identifizierung $\mathbb{C}^n \cong \mathbb{R}^{2n}$ (als $\mathbb{R}$-Vektorräume) ein Isomorphismus von $\mathbb{R}$-Vektorräumen zwischen dem T_xM zugrunde liegenden $\mathbb{R}$-Vektorraum und $T_xM^{\mathbb{R}}$, außerdem induziert die Multiplikation mit i eine komplexe Struktur auf $T_xM^{\mathbb{R}}$.
Wir müssen nun noch zeigen, dass die derart auf $T_xM^{\mathbb{R}}$ induzierte komplexe Struktur unabhängig von der Wahl der Karte φ ist. Sei daher $\psi : V \to V' \subset \mathbb{C}^n$ eine weitere Karte mit $x \in V$ und $\psi(x) = 0$. Sei $W := \varphi(U \cap V) \subset \mathbb{C}^n$, dann ist $f := \psi \circ \varphi^{-1}(W) \to \mathbb{C}^n$ der (holomorphe) Kartenwechsel zwischen den Karten φ und ψ. Insbesondere ist f ein Biholomorphismus von W auf eine offene Menge in $\mathbb{C}^n$. Seien

$$u := Re(f) \qquad \text{und} \qquad v := \Im(f),$$

mit $u, v : W \to \mathbb{R}^n$, dann gilt für die (reelle) Ableitung von $f = (u, v)$:

$$Df = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial u_1}{\partial x_n} & \frac{\partial u_1}{\partial y_n} \\ \frac{\partial v_1}{\partial x_1} & \frac{\partial v_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial v_1}{\partial x_n} & \frac{\partial v_1}{\partial y_n} \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \frac{\partial u_n}{\partial x_1} & \frac{\partial u_n}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial u_n}{\partial x_n} & \frac{\partial u_n}{\partial y_n} \\ \frac{\partial v_n}{\partial x_1} & \frac{\partial v_n}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial v_n}{\partial x_n} & \frac{\partial v_n}{\partial y_n} \end{pmatrix} \overset{(*)}{=} \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial u_1}{\partial x_n} & \frac{\partial u_1}{\partial y_n} \\ -\frac{\partial u_1}{\partial y_1} & \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \cdots & -\frac{\partial u_1}{\partial y_n} & \frac{\partial u_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \frac{\partial u_n}{\partial x_1} & \frac{\partial u_n}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial u_n}{\partial x_n} & \frac{\partial u_n}{\partial y_n} \\ -\frac{\partial u_n}{\partial y_1} & \frac{\partial u_n}{\partial x_1} & \cdots & -\frac{\partial u_n}{\partial y_n} & \frac{\partial u_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

□

wobei die Gleichheit (*) durch die Holomorphie von φ, also die Gültigkeit der Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen für die Komponenten $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ gegeben ist. Man sieht nun leicht, dass die Gleichung

$$(Df) \cdot J = J \cdot (Df)$$

gilt, wobei J der durch Multiplikation mit i (unter der Identifizierung $\mathbb{R}^{2n} = \mathbb{C}^n$) gegebene Endomorphismus in End $(\mathbb{R}^{2n})$ ist (siehe Gleichung (6.1)). Hieraus schließen wir, dass die durch φ und ψ induzierten komplexen Strukturen auf $T_xM^{\mathbb{R}}$ übereinstimmen.
Analog zu Definition 6.7 haben wir den Begriff einer Untermannigfaltigkeit einer komplexen Mannigfaltigkeit, welcher genauso eingeführt wird.

Definition 6.22. *Sei M eine komplexe Mannigfaltigkeit der Dimension n und sei $k \in \{0, \ldots, n\}$. Dann heißt eine Teilmenge $N \subset M$ eine (komplexe) Untermannigfaltigkeit der Dimension k, falls für alle $x \in N$ eine Karte $\varphi : U \to U' \subset \mathbb{C}^n = \mathbb{C}^k \times \mathbb{C}^{n-k}$ mit $x \in U$ existiert, so dass*

$$\varphi(U \cap N) = U' \cap (\mathbb{C}^k \times \{0\})$$

gilt. Wir nennen dann die Zahl $n - k$ die Kodimension *der Untermannigfaltigkeit N.*

Wir können nun alle Resultate über Vektorfelder und Flüsse, welche wir vorher für differentierbare Mannigfaltigkeiten erarbeitet haben, auf komplexe Mannigfaltigkeiten verallgemeinern. Konkret gilt: Ist X ein holomorphes Vektorfeld auf einer komplexen Mannigfaltigkeit M (d.h., ein Schnitt des holomorphem Tangentialbündels TM) dann entspricht für jeden Punkt $x \in M$ das Vektorfeld X einem lokalen Fluss, d.h., einer holomorphen Abbildung $g : \Delta_\varepsilon \times U \to U$ mit $U \subset M$ offen, so dass $x \in U$ gilt und $\Delta_\varepsilon := \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| < \varepsilon\}$ mit den Eigenschaften aus Definition 6.14. Wir werden dieses Ergebnis im nächsten Kapitel verwenden.