Wiederholung:

Satz 4.8: Sei $g_3 = ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3 \in \mathbb{K}[x,y]_3$

Dann existiert $A \in Gl(2,\mathbb{K})$, so daß für

$\phi_A(x,y) = A\cdot(x,y)^{tr} \in g_2$ gilt:

$$\phi_A^* g_3 \in \left\{ \begin{matrix} 0 \\ x^3 \\ x^2y \\ x^3 - xy^2 \\ x^3+y^3 \end{matrix} \right\} \leftarrow$$

diese Keime sind linear inäquivalent falls $\mathcal{R} = \mathcal{E}_n$, für $\mathcal{R} = \mathcal{O}_n$ sind nur x^3-xy^2 und x^3+y^3 äquivalent

Korollar 4.9: Seien $f,g \in \{0, x^3, x^2y, x^3+y^3, x^3-xy^2\} \subset \mathcal{R}_2$, $f \neq g \Rightarrow \begin{cases} f \not\sim_{\mathcal{R}} g, & \mathcal{R}=\mathcal{E}_n \\ x^3+y^3 \sim_{\mathcal{R}} x^3-xy^3 & \mathcal{R}=\mathcal{O}_n \\ f \not\sim_{\mathcal{R}} g & \text{sonst} \end{cases}$ Außerdem gilt

$f\in\{0,x^3,x^2y\}\subset\mathcal{R}_2 \Longrightarrow \mu(f)=\infty$, f nicht endlich best.

$f \in \{x^3+y^3, x^3-xy^2\} \Longrightarrow \mu(f)=4$, Bestimmtheit $=3$.

Beweis: Sei $f \underset{R}{\sim} g$, d.h. $\exists \varphi \in \mathcal{G}_2 : \varphi^* f = g$

Schreibe $\varphi = \varphi_1 + \varphi_{\geq 1}$ mit $\varphi_1 \in Gl(2, \mathbb{K})$ und so daß $\varphi_{\geq 1} \in (m_2^2)^{\oplus 2}$, dann ist $\varphi_1^* f = g$ $\Big\{$ + andere Fälle Satz 4.8

Klar $\mu(0) = \mu(x^3) = \mu(x^2 y) = \infty$ und auch $\mu(x^3+y^3) = \mu(x^3 \pm xy^2) = 4$, schon gesehen (Bsp 4. und 5. nach Lemma 3.8.), daß Bestimmtheit $= 3$ für $f \in \{x^3+y^3, x^3 \pm xy^2\}$ $\square$

Jetzt können wir den ersten „echten" Schritt der Klassifikation beginnen.

Satz 4.10: Sei $f \in m^2_{R_n}$, Korang$(f) = 2$, $\mu(f) = 4$, dann ist f stabil äquivalent zu $x^3 - xy^2$ oder zu x^3+y^3:

Beweis: Wegen des Spaltungslemmas (Satz 4.2.) ist f stabil äquivalent zu $g(x,y) \in m^3_{R_2}$ und es ist $\mu(g) = 4$. Wir zeigen zunächst, das die Bestimmtheit von g auch gleich 3 ist:

Wegen $g \in m_{R_2}^3 \Rightarrow J_g \subset m_{R_2}^2$ und daher $m_{R_2} J_g \subset m_{R_2}^3$

Dann hat man $\dim_{K} R_2/m_{R_2} J_g = \dim_{K} R_2/m_{R_2}^3 + \dim m_{R_2}^3 / m_{R_2} J_g$

Außerdem ist $R_2/m_{R_2}^3 = \bigoplus_{i+j<3} K x^i y^j \Rightarrow \dim_{K} R_2/m_{R_2}^3 = 6$

Andererseits sagt Lemma 4.6, daß $J_g =$ $m_{R_2} J_g \oplus K \partial_x g \oplus K \partial_y g$, also ist $\dim_{K} R_2/m_{R_2} J_g =$ $\dim R_2/J_g + 2 = \mu + 2 = 6 \Rightarrow \dim_{K} R_2/m_{R_2} J_g = \dim R_2/m_{R_2}^3$

also $\dim m_{R_2}^3 / m_{R_2} J_g = 0 \Rightarrow m_{R_2}^3 = m_{R_2} J_g$

$(m^k \subset m J_f \Rightarrow m^{k+1} \subset m^2 J_f)$

$\Rightarrow g$ ist 3-bestimmt und daher $g \underset{R}{\sim} T_g^3$

aber wegen $g \in m_{R_2}^3$ ist $T_g^3 \in K[x,y]_3$ und

daher folgt aus 4.8 und 4.9: $T_g^3 \sim x^3 + y^3$ oder $T_g \sim x^3 - xy^2$

$\square$

Wir behandeln als Nächstes die Klassifikation im Fall $\mu = 5$.

Satz 4.11: Sei $f \in m^2_{\mathcal{R}_n}$, Korang$(f) = 2$, $\mu(f) = 5$. Dann ist f stabil äquivalent zu $x^2y + y^4$ oder $-x^2y - y^4$. (und im Fall $\mathcal{R} = \mathcal{O}_n$ ist $x^2y + y^4 \underset{\mathcal{R}}{\sim} -x^2y - y^4$)

Beweis: Wieder folgt aus dem Spaltungslemma, daß f stabil äquivalent zu $g \in m^3_{\mathcal{R}_2}$ mit $\mu(g) = 5$ ist. Wir zeigen zunächst: die Bestimmtheit von g ist 4. Wir haben wieder $J_g \subset m^2_{\mathcal{R}_2}$ und $m_{\mathcal{R}_2} J_g \subset m^3_{\mathcal{R}_2}$, $\dim \mathcal{R}_2 / m_{\mathcal{R}_2} J_g = \dim \mathcal{R}_2 / m^3_{\mathcal{R}_2} + \dim \dfrac{m^3_{\mathcal{R}_2}}{m_{\mathcal{R}_2} J_g}$

Wieder wegen Lemma 4.6 ist $\dim \mathcal{R}_2 / m_{\mathcal{R}_2} J_g = \mu(g) + 2 = 7$

also $\dim \dfrac{m^3}{m_{\mathcal{R}_2} J_g} = 7 - \dim \mathcal{R}_2 / m^3_{\mathcal{R}_2} = 7 - 6 = 1$

Jetzt ist wie im Beweis von Lemma 3.5,

$$\mathfrak{m}_{\mathcal{R}_2}^3 / \mathfrak{m}_{\mathcal{R}_2} J_g = \frac{\mathfrak{m}_{\mathcal{R}_2}^3 + \mathfrak{m}_{\mathcal{R}_2} J_g}{\mathfrak{m}_{\mathcal{R}_2} J_g} \supsetneq \frac{\mathfrak{m}_{\mathcal{R}_2}^4 + \mathfrak{m}_{\mathcal{R}_2} J_g}{\mathfrak{m}_{\mathcal{R}_2} J_g}$$

$$\Rightarrow \underset{\overset{\shortparallel}{0}}{\dim \frac{\mathfrak{m}_{\mathcal{R}_2}^4 + \mathfrak{m}_{\mathcal{R}_2} J_g}{\mathfrak{m}_{\mathcal{R}_2} J_g}} < \dim \frac{\mathfrak{m}_{\mathcal{R}_2}^3}{\mathfrak{m}_{\mathcal{R}_2} J_g} = 1$$

$$\Rightarrow \mathfrak{m}_{\mathcal{R}_2}^4 \subset \mathfrak{m}_{\mathcal{R}_2}^4 + \mathfrak{m}_{\mathcal{R}_2} J_g \overset{!}{\subset} \mathfrak{m}_{\mathcal{R}_2} J_g \text{, d.h.,}$$

g ist 4-bestimmt. Natürlich ist g nicht 3-bestimmt, denn dann wäre $g \sim \begin{cases} x^3+y^3 \\ x^2-xy^2 \end{cases}$ und dann $\mu(g) = 4$ ↯. Daher ist die Bestimmtheit von g gleich 4. Also ist wegen $g \in \mathfrak{m}_{\mathcal{E}_2}^3$

$g \underset{R}{\sim} g' := p + h$ mit $p \in \mathbb{K}[x,y]_3$ und $h \in \mathbb{K}[x,y]_4$.

Wegen $\phi_A^*(p+h) = \underset{\in \mathbb{K}[x,y]_3}{p'} + \underset{\in \mathbb{K}[x,y]_4}{h'}$ für $A \in Gl(2,\mathbb{K})$

und $\phi_A(x,y) = A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ wie in Satz 4.8

können wir $p \in \{0, x^3, x^2y, x^3+y^3, x^3-xy^2\}$ annehmen.

Zeige: $p = x^2y$:

Sei $p=0$ $\Rightarrow g' \in m_{\mathcal{E}_2}^4 \Rightarrow J_{g'} \subset m_{\mathcal{E}_2}^3 \Rightarrow \mu(f) = \mu(g')$

$= \dim \mathcal{E}_2/J_{g'} \geq \dim \mathcal{E}_2/m_{\mathcal{E}_2}^3 = 6$ ↯

Sei $p = x^3 - xy^2$ oder $p = x^3+y^3$ $\Rightarrow g' \sim p$, da 3-bestimmt

ist, also $\mu(f) = \mu(g') = \mu(p) = 4$ ↯

Sei $p = x^3$: Schreibe $h(x,y) = ay^4 + bxy^3 + x^2 \cdot q(x,y)$ mit

$q \in \mathbb{K}[x,y]_2$. Setze: $\varphi(x,y) = (x - \frac{1}{3}q(x,y), y)$, dann

ist $D\varphi(0,0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, also $\varphi \in \mathcal{G}_2$ und es

ist $(\varphi)^* g' = (\varphi)^*(x^3 + x^2 q + ay^4 + bxy^3) \in x^3 + ay^4 + bxy^3 + m_{\mathcal{E}_2}^5$

f 4-bestimmt $\Rightarrow g'$ 4-bestimmt $\Rightarrow g' \sim g'' :=$

$x^3 + ay^4 + bxy^2$. Behauptung: $\mu(g'') > 5$:

Sei $b = 0 \Rightarrow J_{g''} = (x^2, ay^3)$. Dann wird

$\overline{1}, \overline{x}, \overline{y}, \overline{xy}, \overline{y}^2$ und $\overline{xy}^2$ in R_2/J_f linear unabhängig $\Rightarrow \mu(g'') > 5$.

Sei $b \neq 0$ und eine Relation:

$$v + \alpha x + \beta y + \gamma xy + \delta y^2 + \varepsilon y^3 + \underbrace{\overbrace{(3x^2 + by^2)}^{\partial_x g''}}_{\in m^2} k_1(x,y)$$

$$+ \underbrace{\overbrace{(4ay^3 + 2bxy)}^{\partial_y g''}}_{\in m^2} k_2(x,y) = 0$$ in R_2 gegeben, hier $k_1, k_2 \in R_2$

$\xRightarrow{\text{Taylorkoeff.}} \underbrace{v = 0}_{T^0};\ \underbrace{\alpha = \beta = 0}_{T^1};\ \underbrace{\gamma = \delta = k_1(0,0) = k_2(0,0) = 0}_{T^2}$

Wegen $k_2(0,0)$ ist der Taylorkoeff. von y^3 gleich $\varepsilon \Rightarrow \varepsilon = 0$

also $\alpha = \beta = \gamma = \delta = \varepsilon = 0 \Rightarrow$ lin. unabh.

Also $\mu(g'') > 5$ ↯, da $\mu(f) = 5$

Hiermit ist $p = x^2 y$ gezeigt.

Also haben wir $g' = x^2y + h(x,y)$ mit

$h(x,y) = ay^4 + bxy^3 + x^2 q(x,y) \in \mathbb{k}[x,y]_4$, $q \in \mathbb{k}[x,y]_2$

Setze jetzt $\psi(x,y) = \left(x + \frac{b}{2}y^2, y + q\right)$, dann

ist $(\psi^{-1})^* g' \in x^2y + ay^4 + m_{\mathbb{R}^2}^5$, denn

$$\psi^*(x^2y + ay^4) = \left(x + \frac{b}{2}y^2\right)^2 (y+q) + a(y+q)^4$$

$$\in \underbrace{(x^2 + bxy^2)(y+q) + ay^4}_{x^2y + bxy^3 + qx^2 + ay^4 = g'} + m_{\mathbb{R}_2}^5$$

Da g' 4-bestimmt ist, folgt: $g' \sim x^2y + ay^4$, $a \in \mathbb{k} \setminus \{0\}$

Sei jetzt $a > 0 \rightsquigarrow A := \mathrm{diag}(a^{1/8}, a^{-1/4})$, $a < 0$

$\rightsquigarrow A := \mathrm{diag}(|a|^{1/8}, -|a|^{-1/4})$

$$\rightsquigarrow \phi_A^*(x^2y + ay^4) = \begin{cases} y^4 + x^2y & a > 0 \\ -y^4 - x^2y & a < 0 \end{cases}$$

$\square$

Lemma 4.12: $\mathcal{R}=\mathcal{E}_n$: $y^4+x^2y \not\sim_{\mathcal{R}} -y^4-x^2y$

Beweis: Übung

Hiermit ist der erste Teil der Klassifikation abgeschlossen. Zur Zusammenfassung noch einmal der folgende Satz

Satz 4.13: Sei $f\in m^2_{\mathcal{E}_n}$, $1<\mu(f)\leq 5$ ($\Leftrightarrow$ $1\leq \operatorname{Kodim}(f):=\mu(f)-1\leq 4$). Dann ist f stabil äquivalent zu einem Keim in der folgenden Liste. Alle diese Keime sind untereinander paarweise nicht stabil äquivalent falls $\mathcal{R}=\mathcal{E}_n$, falls $\mathcal{R}=\mathcal{O}_n$ sind die Äquivalenzen wie angegeben

f	$k: f \in \ell_k = \text{Korang}(f)$	$\mu(f)$	Bestb. von f
x^3	1	2	3
$x^4, -x^4$ äqu σ_n	1	3	4
x^5	1	4	5
$x^6, -x^6$ äqu σ_n	1	5	6
$x^3 - xy^2$ — äqu. für σ_n	2	4	3
$x^3 + y^3$	2	4	3
$x^2y + y^4, -x^2y - y^4$ äqu. für σ_n	2	5	4

Beweis: Dies ist eine Zusammenfassung der bisherigen Ergebnisse. Sei $f \in m^2_{R_n}$, $1 < \mu(f) \leq 5$. Dann ist wegen $\mu(f) > \frac{1}{2}k \cdot (k+1)$ (Lemma 4.7.) der Korang höchstens 2, aber wegen der Bemerkung nach Def. 4.1 ist Korang $(f) > 0$. Falls Korang $(f) = 1$, folgt aus Lemma 4.5, daß f stabil äquivalent zu εx^k ist, $\varepsilon \in \begin{cases} \{1,-1\} \\ \{1\} \end{cases}$. Natürlich ist für $\mathcal{R} = \mathcal{E}_1$ $\forall k$ x^k und $-x^k$ rechtsäquivalent genau dann, wenn k ungerade ist. Falls Korang$(f) = 2$ ist, folgt erneut wegen 4.7, daß $\mu(f) \in \{4,5\}$ ist, und für $\mu(f) = 4$ ist f stab. äquivalent zu $x^3 - xy^2$ oder $x^3 + y^3$ (Satz 4.10) und diese 2 Keime sind nach Korollar 4.9. in $\mathcal{E}_2$ inäquivalent. Falls $\mu(f) = 5$ ist, dann ist f nach Satz 4.11. stabil äquivalent zu $\pm(x^2 y + y^4)$, und diese beiden Keime sind in $\mathcal{E}_2$ nach Lemma 4.12. (Übung) inäquivalent. $\square$

Hiermit ist die Klassifikation der elementaren Katastrophen bis Kodimension 4 ($\Leftrightarrow \mu = 5$) nach R. Thom abgeschlossen. Tatsächlich kann man diese Klassifikation noch wesentlich weiter treiben, dies wurde vor allem von Arnold und seinen Studenten ausgearbeitet.