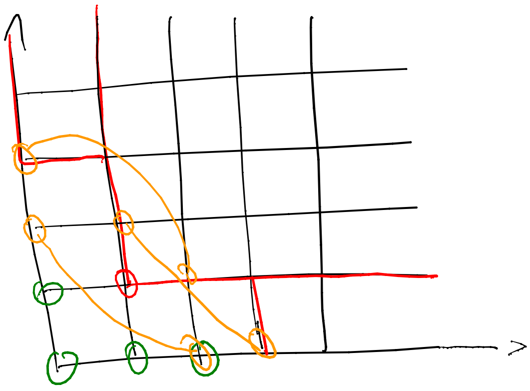
10. Vorlesung
13.11.2017

5.) $f = x^3 - xy^2 \in \mathcal{R}_2 \quad J_f = (3x^2 - y^2, xy)$



Wir haben:

$-3x^3 - xy^2 \in J_f \Rightarrow x^3 \in J_f$

$-3x^2y - y^3 \in J_f \Rightarrow y^3 \in J_f$

$$\Rightarrow \mathcal{R}_2 / J_f \simeq \left(\mathbb{K}1 \oplus \mathbb{K}x \oplus \mathbb{K}x^2 \oplus \mathbb{K}y \oplus y^2\right) \Big/ {3x^2 - y^2}$$

$$\simeq \mathbb{K}1 \oplus \mathbb{K}x \oplus \mathbb{K}x^2 \oplus \mathbb{K}y,$$

$\mu(f) = 4 \Rightarrow f$ ist 5-bestimmt, nicht 2-bestimmt

<u>Bestimmtheit</u>: $m J_f = (x,y)(3x^2 - y^2, xy)$

$= (3x^3 - xy^2, 3x^2y - y^3, x^2y, xy^2)$

$= (3x^3, -y^3, x^2y, xy^2) = m^3$

$m^3 \subset m J_f \Rightarrow m^4 \subset m^2 J_f \Rightarrow f$ 3-bestimmt

$\Rightarrow$ Bestimmtheit $= 3$

6.) $f = x^4 + y^4 \in \mathcal{R}_2 \Rightarrow \mu(f) = 9$, also 10-best.

Aber sogar: f ist 4-bestimmt, Bestimmtheit $= 4$

Bew.: $m \cdot J_f = (x, y) \cdot (x^3, y^3) = (x^4, xy^3, y^4, yx^3)$

$\Rightarrow m J_f \not\supset m^4 \quad (x^2y^2 \notin m J_f)$

Aber: $m^2 J_f = (x^2, xy, y^2)(x^3, y^3)$

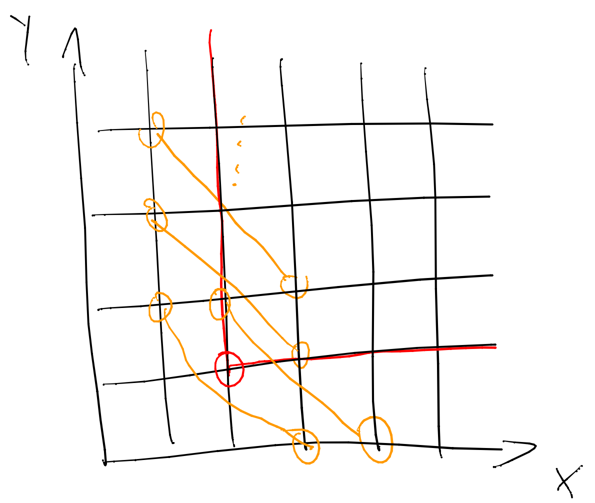
$= (x^5, x^4y, x^3y^2, x^2y^3, xy^4, y^5) = m^5$

$\Rightarrow m^5 \subset m^2 J_f \Rightarrow f$ ist 4-bestimmt

Also hier: f ist k-bestimmt, aber $m^k \not\subset m J_f$

(aber $m^{k+1} \subset m^2 J_f$ und natürlich $m^{k+1} \subset m J_f$)

7.) $f = x^2 \cdot (x^2 - y^2) \in R_2$, $J_f = (4x^3 - 2xy^2, x^2y)$



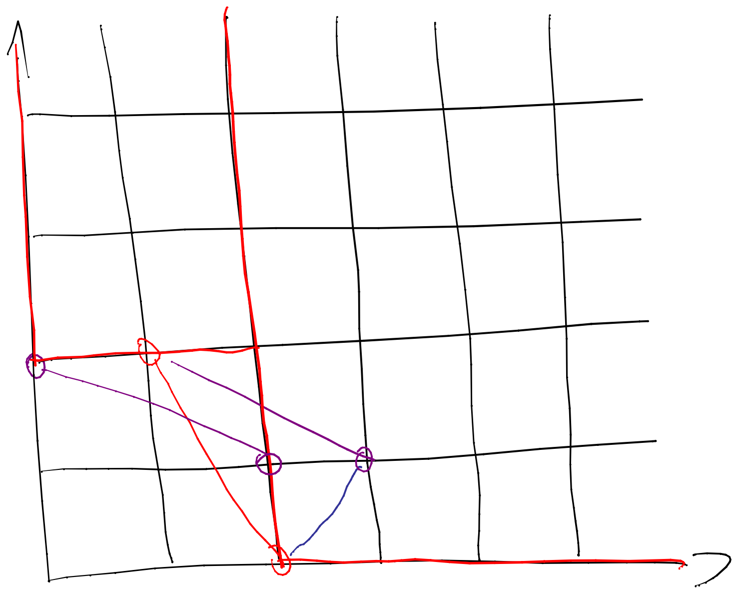
Hier: $y^k \notin J_f \quad \forall k \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow \mu(f) = \dim_{\mathbb{K}} R_2 / J_f = \infty$

später: f ist nicht endlich bestimmt

8.) $f = x^3 + y^3 + x^2y^2 \in R_2 \Rightarrow$

$J_f = (3x^2 + 2xy^2,\ 3y^2 + 2x^2y) \Rightarrow x \cdot \partial_y f = 3xy^2 + 2x^3y \in J_f$



$\Rightarrow \partial_x f - \frac{2}{3} x \partial_y f =$

$3x^2 + 2xy^2 - \frac{2}{3}(3xy^2 + 2x^3y)$

$= 3x^2 - \frac{4}{3}x^3y$

$= x^2\left(3 - \frac{4}{3}xy\right)$

$= 3x^2 \underbrace{\left(1 - \frac{4}{9}xy\right)}_{\in R_n^*}$

Klar: R Ring, $c \in R^\times$ Einheit, $h \in R$, $I \subset R$ Ideal

$\Rightarrow h \in I \Leftrightarrow c \cdot h \in I$

$\Rightarrow 3x^2 \in J_f \Rightarrow x^2 \in J_f$ analog. $y^2 \in J_f$

$\Rightarrow J_f = (x^2, y^2) \Rightarrow \mu(f) = 4$

$\mathfrak{m}J_f = (x,y)(x^2,y^2) = (x^3, xy^2, x^2y, y^3) = \mathfrak{m}^3 \Rightarrow$

$\mathfrak{m}^4 \subset \mathfrak{m}^2 J_f \Rightarrow f$ ist 3 bestimmt, also erhalten wir $f \underset{R}{\sim} x^3+y^3$. Natürlich ist f nicht 2-bestimmt, also ist die Bestimmtheit $=3$.

Um effektiv die Bestimmtheit eines Keimes berechnen zu können, benötigt man eine Umkehrung zu Satz 3.6, d.h., ein notwendiges Kriterium für k-Bestimmtheit.

Satz 3.10: Sei $f \in \mathcal{R}_n$ k-bestimmt, dann ist $\mathfrak{m}^{k+1} \subset \mathfrak{m}J_f$

Also insgesamt: $\mathfrak{m}^k \subset \mathfrak{m}J_f \Rightarrow \mathfrak{m}^{k+1} \subset \mathfrak{m}^2 J_f \overset{3.6.}{\Longrightarrow} f$ k-best. $\overset{3.10}{\Longrightarrow} \mathfrak{m}^{k+1} \subset \mathfrak{m}J_f$

klar

klar.

Ich gebe keinen vollständigen Beweis, sondern mache eine vereinfachende Annahme.

„Beweis": Sei $S \in \mathfrak{m}^{k+1} \Rightarrow \forall t \in \mathbb{K}: f + t\cdot S \underset{R}{\sim} f$

d.h. $\exists \varphi(x,t): f(\varphi(x,t)) = f + t\cdot S, \quad \varphi(x,0) = x$

<u>Annahme:</u> $\varphi \in \mathcal{R}_{n+1}^{\oplus n}$, d.h. φ ist auch in t beliebig oft differenzierbar bzw. holomorph

Dies ist richtig, aber nicht so leicht zu zeigen.

Aus $f(\varphi(x,t)) = f + tS \Longrightarrow \sum_{i=1}^{n} (\partial_{x_i} f)(\varphi(x,t)) \cdot \frac{\partial \varphi_i}{\partial t}(x,t) = S(x)$

Setze $t=0 \Longrightarrow \sum_{i=1}^{n} (\partial_{x_i} f)(x) \cdot \overbrace{\partial_t \varphi_i(x,0)}^{\in m_{\mathcal{R}_n}} = S(x)$

$\Longrightarrow S \in m \cdot J_f \Longrightarrow m^{k+1} \subset m J_f$ $\square$

<u>Korollar 3.11.:</u> 1.) Sei k minimal mit $m^k \subset m J_f$

$\Longrightarrow \det(f) \in \{k, k-1\}$

2.) $f \in \mathcal{R}_n$, $\mu(f) = \infty \Longrightarrow f$ ist nicht-endlich bestimmt

<u>Beweis:</u> 1.) $m^k \subset m J_f \Rightarrow m^{k+1} \subset m^2 J_f \overset{3.6.}{\Longrightarrow} k\text{-best.} \Longrightarrow \det(f) \leq k$

Sei f $k-2$-best. $\overset{3.10}{\Longrightarrow} m^{k-1} \subset m J_f$ $\lightning$ k min mit $m^k \subset m J_f$

2.) f endl. best. $\overset{3.10}{\Longrightarrow} \exists k: m^{k+1} \subset m J_f \subset J_f$

$\Longrightarrow \mathcal{R}/m^{k+1} \twoheadrightarrow \mathcal{R}/J_f \Rightarrow \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{R}/m^{k+1} < \infty \Longrightarrow \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{R}/J_f = \mu < \infty$

Insbesondere: Bsp. 7.) $f = x^2(x^2 - y^2)$ ist nicht endlich best.

§4. Klassifikation

<u>Ziel</u>: Klassifikation von Keimen $f \in \mathcal{R}_n$ mit $\mu(f) \leq 5$.

<u>Hilfsmittel</u>: Korank eines Keimes

<u>Definition 4.1</u>: Sei $f \in m^2_{\mathcal{R}_n} \subset \mathcal{R}_n$. Dann heißt die Zahl $n - \mathrm{Rang}(D^2 f)(0)$ der Korang von f.

<u>Bemerkung</u>: Aus Lemma 3.9 und Satz 1.8 (Morse-Lemma) folgt: Korang $(f) = 0 \Leftrightarrow f$ nicht-entartet $\Longleftrightarrow \mu(f) = 1$

Falls Korang $(f) > 0$ ist, kann f nicht zu einer quadratischen Form äquivalent sein. Aber es gilt das sogenannte „Spaltungslemma", welches das Morse-Lemma verallgemeinert.

Satz 4.2: Sei $f \in m^2_{\mathcal{R}_n}$, $k = \text{Korang}(f)$,

dann existiert $g \in m^3_{\mathcal{R}_k}$, $g(x_1, \dots x_k)$ & $a_{k+1}, \dots, a_n \in \{-1, 1\}$

& $a_{k+1}, \dots, a_n \in \begin{cases} \{-1,1\} & \mathcal{R} = \mathcal{E}_n \\ \{1\} & \mathcal{R} = \mathcal{O}_n \end{cases}$, s.d. $f \underset{\mathcal{R}}{\sim} g + a_{k+1}x_{k+1}^2 + \dots + a_n x_n^2$

Beweis: Zur Vereinfachung nehmen wir an, daß f endlich bestimmt ist, mit Bestimmtheit N. Der Satz gilt aber allgemein!

Wir wissen: $f \sim f_3(x_1, \dots, x_n) + \underbrace{a_{k+1}x_{k+1}^2 + \dots + a_n x_n^2}_{\overset{!!}{=} q}$

$a_i \in \begin{cases} \{1,-1\} \\ \{1\} \end{cases}$, $f_3 \in m^3_{\mathcal{R}_n}$. Also gilt:

$$f_3 = g_3(x_1, \dots x_k) + \sum_{j=k+1}^{n} x_j \cdot h_j^{(2)} \quad \text{mit } g_3 \in m^3_{\mathcal{R}_k}, \; h_j^{(2)} \in m^2_{\mathcal{R}_n}$$

denn $m^3_{\mathcal{R}_n} = \left(x_i x_j x_l \right)_{i,j,l = 1, \dots, n}$

also $f \sim q + \sum_{j=k+1}^{n} x_j \cdot h_j^{(2)} + g_3$

$$= \sum_{j=k+1}^{n} \left[a_j \left(x_j + \frac{a_j}{2} h_j^{(2)} \right)^2 - \frac{1}{4} \left(h_j^{(2)} \right)^2 \right] + g_3$$

Definiere Koordinatentransformation $\phi \in G_n$

durch : $y_i := \phi^*(x_i) = \begin{cases} x_i & i \in \{1, .., k\} \\ x_i + \frac{a_i}{2} h_i^{(2)} & i \in \{k+1, ..., n\} \end{cases}$

$\Rightarrow \phi \in G_n \ , \ \Psi := \phi^{-1}$

$$\rightsquigarrow \Psi^* \left(q + \sum_{j=k+1}^{n} x_j \cdot h_j^{(2)} + g \right) = g_3(y_1, .., y_k)$$

$$+ \sum_{j=k+1}^{n} a_j y_j^2 \underbrace{- \frac{1}{4} \sum_{j=k+1}^{n} \left(h_j^{(2)} \right)^2 \circ \Psi}_{= f_4 \in m_n^4} \ \underset{R}{\sim} f$$

analog $f_4 = g_4(y_1 .., y_k) + \sum_{j=k+1}^{n} y_j h_j^{(3)}$, neue Transformation

$$f \underset{R}{\sim} g_3 + g_4 + g + \underbrace{f_5}_{\in m^5} \ - - - - -$$

$$f \underset{R}{\sim} \underbrace{\sum_{i=3}^{N} g_i + q}_{=:g} + f_{N+1} \text{ mit } g_i \in m^i_{\mathcal{R}_k},\ f_{N+1} \in m^{N+1}_{\mathcal{R}_n}.$$

Es sei f N-bestimmt, also $f \underset{R}{\sim} g + q$ mit

$$g = g(x_1, \dots, x_k) \in m^3_{\mathcal{R}_k},\quad q = \sum_{j=k+1}^{n} a_j x_j^2,\quad a_j \in \begin{cases} \{1,-1\} \\ \{1\} \end{cases}$$ $\square$

<u>Definition 4.3:</u> Sei $f \in \mathcal{R}_n$ und $g \in \mathcal{R}_k$, $k \leq n$. f und g heißen stabil äquivalent, falls

$$g(x_1, \dots, x_k) + a_{k+1} x_{k+1}^2 + \dots + a_n x_n^2 \underset{R}{\sim} f(x_1, \dots, x_n) \text{ \& } a_i \in \begin{cases} \{1,-1\} & R = \mathcal{E}_n \\ \{1\} & R = \mathcal{O}_n \end{cases}$$