Singularitätentheorie

1. Vorlesung
9.10.2017

§0. Einleitung

Singularität $\hat{=}$ Ausnahmesituation eines mathematischen Modells
$\hat{=}$ besonderer Ort / Zeitpunkt, an/in dem sich das Modell anders verhält als an "gewöhnlichen" Punkten/Zeiten

Singularitäten in der Mathematik (Beispiele)

1.) Lineare Algebra: Eine Matrix $A \in M(n \times n, k)$ (k Körper) heißt singulär, falls $\det(A) = 0$ ist, d.h. $A \notin Gl(n,k)$.

2.) Analysis (1): $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar heißt singulär bei $x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow f'(x) = 0$

3.) Analysis (2): $f = (f_1, \dots, f_m): \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ heißt singulär bei $\underline{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \Leftrightarrow J_f = (\partial_{x_i} f_j)_{\substack{i=1..n \\ j=1..m}}$ hat Rang $< \min(n, m)$.

4.) **Differentialgleichungen**: Sei $I \subset \mathbb{R}$ Intervall mit $0 \in I$ und $a: I \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ bel. oft differenzierbar, dann heißt $0 \in I$ ein singulärer Punkt der DGL

$$y'(t) = a(t) \cdot y(t)$$

Bsp.: $a(t) = \frac{k}{t}, k \in \mathbb{Z}$, Lsg von $y' = \frac{k}{t} y$ ist $y(t) = t^k$

d.h. $y(t)$ ist bei 0 definiert, falls $k \geq 0$, sonst nicht. Also: Singularität tritt bei $k \geq 0$ gar nicht auf.

Bemerkung: für $a(t) = \frac{k}{t}$ heißt $y' = a \cdot y$ DGL mit **regulärer Singularität** bei $t = 0$

falls z.B. $a(t) = -\frac{k}{t^2}$ ist, dann ist Lsg gegeben durch $y(t) = e^{\frac{k}{t}}$, also für alle $k \in \mathbb{Z}$ nicht bei 0 definiert. Solche DGL heißen irregulär.

ABER: In dieser Vorlesung geht es NICHT um Singularitäten von Differentialgleichungen.

Wir werden uns (fast) ausschließlich mit Singularitäten von Funktionen (Bsp. 2 und 3 oben) beschäftigen. Hierzu einige Grundbegriffe und Beispiele.

Definition 0.1: Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f: U \to \mathbb{R}$ stetig.

a) f heißt beliebig oft differenzierbar oder glatt oder aus der Klasse C^∞ falls alle partiellen Ableitungen beliebig hoher Ordnung existieren.

b) Für eine glatte Funktion $f: U \to \mathbb{R}$ schreiben wir

$$\left(\partial_{x_{i_1}}\cdots\partial_{x_{i_k}}\right)(f) = \frac{\partial^k}{\partial_{x_{i_1}}\cdots\partial_{x_{i_k}}} f = \frac{\partial}{\partial x_{i_1}}\left(\frac{\partial}{\partial x_{i_2}}\left(\cdots\left(\frac{\partial}{\partial x_{i_k}}(f)\right)\right)\cdots\right)$$

für beliebige Tupel $i_1, \dots, i_k \in \{1, \dots, n\}$. Falls $n=1$ ist, schreibt man natürlich $f^{(k)} = \partial_x^{(k)}(f)$.

Die erste Ableitung schreibt man als Vektor (Gradient) $Df : U \to \mathrm{Mat}(1 \times n, \mathbb{R})$ d.h. $\forall p \in U$ ist $Df(p)$ ein Zeilenvektor im $\mathbb{R}^n$.

Die 2. Ableitung ist die <u>Hesse-Matrix</u>

$$D^2 f = \mathrm{Hess}(f) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial_{x_i}\partial_{x_j}}\right)_{i,j \in \{1..n\}} : U \to \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{R})$$

<u>Erinnerung</u>: Die partiellen Ableitungen vertauschen, $\partial_{x_i}\partial_{x_j} f = \partial_{x_i}\partial_{x_j} f \Rightarrow D^2 f$ ist eine symmetrische Matrix.

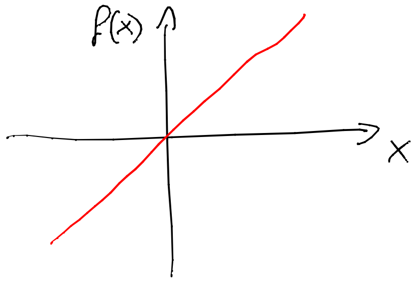
Die vielleicht wichtigste Definition der Vorlesung ist:

<u>Definition 0.2:</u> a) Ein Punkt $p \in U$ heißt kritisch oder singulär bezüglich f, falls $Df(p) = 0$ ist ($\Leftrightarrow \forall i \in \{1, .., n\}$ ist $(\partial_{x_i} f)(p) = 0$).

b) Ein singulärer Punkt p von f heißt entartet, falls $D^2(f)(p)$ singulär ist, d.h., falls $\det D^2(f)(p)=0$ gilt.

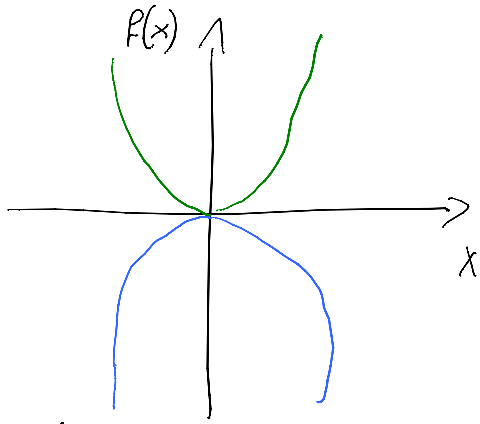
Beispiele: zunächst $U=\mathbb{R}$ d.h. $n=1$

1.) $f(x)=x \rightsquigarrow \text{Graph}(f)=$



keine kritischen Punkte

2.) $f(x)=\pm x^2 \rightsquigarrow \text{Graph}(f)=$



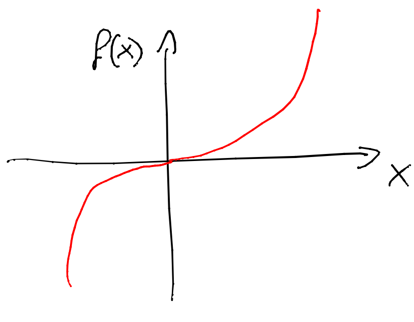
$f'(0)=0$

$f''(0)=\pm 2$

0 kritischer Punkt ist lokales $\begin{cases} \text{Minimum falls } f=x^2 \\ \text{Maximum falls } f=-x^2 \end{cases}$

nicht-entartet

3.) $f(x)=x^3 \rightsquigarrow \text{Graph}(f)=$



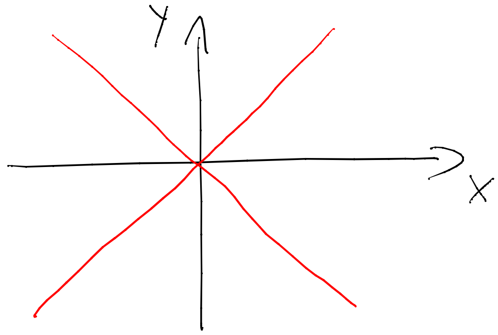
$f''(0)=0$

0 kritischer Punkt ist Sattelpunkt und entartet

Sei jetzt $U = \mathbb{R}^2$, $n = 2$

4.) $f(x,y) = x^2 - y^2$. Jetzt zeichnen wir lieber

$f^{-1}(0) \subset \mathbb{R}^2$:



$Df = (2x \;\; -2y)$ $\quad D^2 f = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$

0 ist kritischer Punkt von f (der einzige) und nicht-entartet

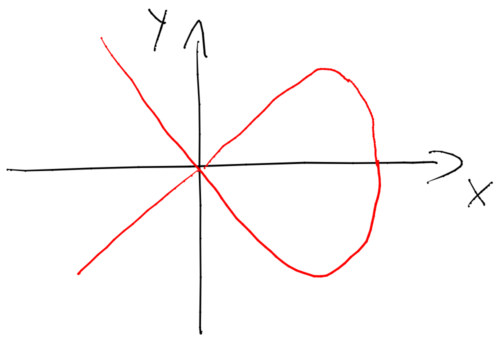
5) $f(x,y) = y^2 - x^2(1-x)$; $Df = (3x^2 - 2x, \; 2y)$; $D^2 f = \begin{pmatrix} 6x-2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

kritische Punkte: $(0,0) \in \mathbb{R}^2$

$(\frac{2}{3}, 0) \in \mathbb{R}^2$, aber $f(\frac{2}{3}, 0) \neq 0$

beide krit. Pkt nicht-entartet

$f^{-1}(0)$:



Wichtige Bemerkung: Wenn wir die Fkt. f aus 4.) und 5.) auf kleine offene Mengen $U \subset \mathbb{R}^2$, welche $(0,0)$ enthalten, einschränken, dann sind $f^{-1}(0)$ beide Male „fast" gleich (z.B. diffeomorph)

MORAL: Untersuche Funktionen lokal um kritische Punkte!

<u>Definition 0.3.</u>: Sei $f: U \to \mathbb{R}$ glatt, und p ein kritischer Punkt von f. Dann heißt p isoliert, falls es eine Umgebung V von p gibt (d.h. eine offene Menge $V \subset U$ mit $p \in V$) sodaß p der einzige kritische Punkt von f in V ist.

<u>Beispiele</u>: 1.) alle obigen Beispiele sind isolierte kritische Punkte

2.) Sei $U = \mathbb{R}$ und $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & \forall x > 0 \\ 0 & \forall x \leq 0 \end{cases}$

Behauptung: f ist glatt.

Idee $\lim\limits_{x \downarrow 0} e^{-\frac{1}{x}} = 0$ $\left(\text{aber } \lim\limits_{x \downarrow 0} e^{\frac{1}{x}} \to \infty\right)$

$\Rightarrow f$ ist stetig, andererseits gilt

$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$ und $\lim\limits_{x \downarrow 0} \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}} = \lim\limits_{y \to \infty} y^2 e^{-y} = 0$

und $f''(x) = \begin{cases} -\left(\frac{2}{x^3} + \frac{1}{x^4}\right) e^{-\frac{1}{x}} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$ $\lim\limits_{x \downarrow 0} \left(\ldots \right) e^{-\frac{1}{x}} = 0$

allgemein $f^{(k)}(x) = g(x) \cdot e^{-\frac{1}{x}}$ $x>0$ wobei $g \in \mathbb{R}[\frac{1}{x}]$

$\Rightarrow \lim\limits_{x \searrow 0} f^{(k)}(x) = 0 \Rightarrow f$ ist glatt

Aber offensichtlich: Alle $x \leq 0$ sind kritisch, d.h. 0 (oder alle $x \leq 0$) sind nicht-isolierte kritische Punkte.

3.) (nicht-isolierter kritischer Punkt eines Polynoms)

Sei $U = \mathbb{R}^3$ und $f(x,y,z) = x \cdot y \cdot z$

$$\Rightarrow Df = \begin{pmatrix} \partial_x f & \partial_y f & \partial_z f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} yz & xz & xy \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \{(0,0,z) \mid z \in \mathbb{R}\} \cup \{(0,y,0) \mid y \in \mathbb{R}\} \cup \{(x,0,0) \mid x \in \mathbb{R}\}$$

sind kritische Punkte $\Rightarrow$ 0 ist nicht-isolierter kritischer Punkt.

<u>Definition 0.4:</u> (René Thoms elementare Katastrophen)

Die folgenden glatten Funktionen $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $n \in \{1,2\}$ mit isolierten kritischen Punkten heißen elementare Katastrophen:

$A_2: f(x) = x^3$; $D_{+4}: f(x,y) = x^3 + y^3$

$A_3: f(x) = x^4$; $D_{-4}: f(x,y) = x^3 - xy^2$

$A_4: f(x) = x^5$; $D_5: f(x,y) = x^2y + y^4$

$A_5: f(x) = x^6$

<u>Aufgabe</u>: Zeige, daß dies tatsächlich isolierte Singularitäten bei $0 \in \mathbb{R}^n$ sind.

<u>Erstes Ziel der Vorlesung</u>: Alle Singularitäten (von glatten Funktionen $f: U \to \mathbb{R}$, wobei U eine kleine Umgebung von $0 \in \mathbb{R}^n$ ist) sind bis auf Koordinatenwechsel äquivalent zu den elementaren Katastrophen, falls ihre Milnorzahl ≤ 5 ist ($\Leftrightarrow$ Kodimension ≤ 4, siehe Castrigiano-Hayes).

<u>Wichtiger Aspekt der Katastrophen-/Singularitätentheorie:</u>

Deformationen oder Entfaltungen von Singularitäten

Definition 0.5. (Entfaltung)

Sei $f: U \to \mathbb{R}$ glatt und $V \subset \mathbb{R}^m$ offen mit $0 \in V$. Eine glatte Funktion $F: U \times V \to \mathbb{R}$ heißt Entfaltung von f, falls $F(x_1, \ldots, x_n, \underbrace{0, \ldots, 0}_{m\text{-mal}}) = f(x_1, \ldots, x_n)$ $\forall (x_1, \ldots, x_n) \in U$ gilt.

Zweites Ziel der Vorlesung: Für Singularitäten mit endlicher Milnorzahl (dies sind genau die isolierten Singularitäten) existiert eine „universelle" Entfaltung, d.h. eine, welche „alle möglichen anderen Entfaltungen enthält.