Hausaufgaben zur Linearen Algebra

1. *(6 Punkte)*

   (a) Modifizieren Sie das Verfahren zur Orthogonalisierung von symmetrischen Matrizen (nach Korollar 9.48 in der Vorlesung) so, dass es auch auf hermitsche Matrizen anwendbar ist. Finden Sie damit für die beiden hermiteschen Matrizen

   $$H_1 := \begin{pmatrix} 1 & a \\ \overline{a} & b \end{pmatrix} \quad (\text{mit } b \in \mathbb{R}, a \in \mathbb{C}) \quad \text{und} \quad H_2 := \begin{pmatrix} 1 & \zeta & \zeta^2 \\ \zeta^2 & 1 & \zeta \\ \zeta & \zeta^2 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{mit } \zeta := e^{2\pi i/3})$$

   Matrizen $T_1 \in GL(2,\mathbb{C})$ und $T_2 \in GL(3,\mathbb{C})$, so daß $T_i^{tr} \cdot H_i \cdot \overline{T}_i$ Diagonalgestalt hat. Geben Sie die Signatur der Matrizen H_1 und H_2 an (bei H_1 ist eine Fallunterscheidung nötig).

   (b) Bestimmen Sie, ob die folgenden beiden hermiteschen Matrizen positiv definit sind,

   $$H_3 := \begin{pmatrix} 1 & 1+i & 0 \\ 1-i & 3 & 1-2i \\ 0 & 1+2i & 4 \end{pmatrix}, \quad H_4 := \begin{pmatrix} 1 & \xi & \xi^3 \\ \xi^6 & 2 & i \\ \xi^4 & -i & 3 \end{pmatrix} \quad (\text{mit } \xi := e^{2\pi i/7}).$$

2. *(4 Punkte)* Die drei symmetrischen Matrizen

   $$A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   definieren symmetrische Bilinearformen $\phi_i(x,y) := {}^{tr}x \cdot A_i \cdot y$ auf $\mathbb{R}^3$.

   (a) Machen Sie für $i = 1,2,3$ je eine Skizze, die in einer Umgebung von 0 im $\mathbb{R}^3$ die Mengen

   $$\begin{aligned} M_{i,+} &:= \{x \in M(3\times 1,\mathbb{R}) \mid \phi_i(x,x) > 0\}, \\ M_{i,0} &:= \{x \in M(3\times 1,\mathbb{R}) \mid \phi_i(x,x) = 0\}, \\ M_{i,-} &:= \{x \in M(3\times 1,\mathbb{R}) \mid \phi_i(x,x) < 0\} \end{aligned}$$

   zeigt.

   (b) Beantworten Sie mit Hilfe von (a) die folgenden neun Fragen ($i = 1,2,3$) mit ja oder nein. Geben Sie dazu eine kurze pauschale Begründung, die zeigt, wie Sie die Antworten mit (a) gefunden haben (Rechnungen oder Beispiele sind nicht nötig).

   (i,+) Gibt es eine Basis $\mathcal{B}$ von $\mathbb{R}^3$, so daß alle Diagonaleinträge von $M_{\mathcal{B}}(\phi_i)$ *positiv* sind?
   (i,0) .... *gleich Null* sind?
   (i,-) .... *negativ* sind?

3. *(4 points)*

   (a) Let V_1 be a $\mathbb{C}$-vector space and let $\psi : V_1 \times V_1 \to \mathbb{C}$ a symmetric sesquilinear form. Show that $\psi = 0$.

   (b) Let V_2 be an $\mathbb{R}$-vector space and $\phi_1 : V_2 \times V_2 \to \mathbb{R}$ a bilinear form. Show that there exist a symmetric bilinear form $\phi_2 : V_2 \times V_2 \to \mathbb{R}$ and a skew-symmetric bilinear form $\phi_3 : V_2 \times V_2 \to \mathbb{R}$ such that $\phi_1 = \phi_2 + \phi_3$, i.e. $\phi_1(x,y) = \phi_2(x,y) + \phi_3(x,y)$ for all $x, y \in V_2$.

Bitte wenden !!!

4. *(4 Punkte)*

   (a) Finden Sie eine sinnvolle Definition *negativer Definitheit* analog zur Definition positiver Definitheit von symmetrischen Bilinearformen und symmetrischen Matrizen. Zeigen Sie damit: A ist genau dann negativ definit, wenn $-A$ positiv definit ist.

   (b) Überprüfe die folgenden Matrizen auf Definitheit:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & 2 \\ -8 & 2 & 17 \end{pmatrix}.$$

5. *(4 Punkte)* Betrachten Sie den reellen Vektorraum V der reellen symmetrischen 2×2 Matrizen.

   (a) Zeigen Sie, dass die Determinante eine quadratische Form auf V ist.

   (b) Sei W der Untervektorraum von V der Matrizen, deren Spur gleich 0 ist. Zeigen Sie, dass die zur Determinante gehörige Bilinearform auf W negativ definit ist.

6. *(2 points)*

   Let V be a finite dimensional K-vector space. Consider the isomorphism

$$\beta : V^* \otimes V \longrightarrow \mathrm{Hom}\,(V, V)$$

   Describe the element $\beta^{-1}(\mathrm{id}_V)$.

7. *(6 points)* Es sei V ein Vektorraum über einen Körper K und $L \supset K$ ein Erweiterungskörper von L, d.h. L ist ein Körper und die Addition und Multiplikation in K und in L sind miteinander verträglich.

   (a) Zeigen Sie, dass L eine Struktur als K-Vektorraum trägt.

   (b) Für Elemente $\sum \lambda_i \otimes v_i \in L \otimes_K V$ $\lambda \in L$ definieren wir eine skalare Multiplikation durch

$$\lambda \left(\sum \lambda_i \otimes v_i \right) = \sum \lambda\lambda_i \otimes v_i.$$

   Zeigen Sie, dass $L \otimes_K V$ mit der üblichen Addition und dieser skalaren Multiplikation zu einem L-Vektorraum wird.

   (c) Ist die Familie $(v_i)_{i\in I}$ eine Basis von V über K, so ist die Familie $(1 \otimes v_i)_{i\in I}$ eine Basis von $L \otimes_K V$ über L. Insbesondere gilt $\dim_K V = \dim_L(L \otimes_K V)$.

   (d) Durch die Abbildung

$$\begin{array}{rcl} \varphi : V & \longrightarrow & K \otimes_K V \\ v & \longmapsto & 1 \otimes v \end{array}$$

   ist ein Isomorphismus von K-Vektorräumen gegeben.

Alle Informationen zur Vorlesung (Termine, Hausaufgaben- und Übungsblätter, etc.) sind unter

`https://www.tu-chemnitz.de/mathematik/algebra/LinAlg2-WS1617/linalg2.php`

zu finden.

Abgabe bis Dienstag, den 04. Juli 2017, in den Übungen