Hausaufgaben zur Linearen Algebra

1. *(2 points)*

   (a) Let K be a field such that $1+1 \neq 0$ (this is called a field of characteristic different from 2). Let V be a finite dimensional vector space over K, and let $s : V \times V \to K$ be a symmetric bilinear form with associated quadratic form q. Prove that for all $v, w \in V$ we have

   $$s(v,w) = \frac{1}{2}\left(q(v+w) - q(v) - q(w)\right).$$

   (b) Similarly, let V be a complex vector space, let be s a sesquilinear form on V and let $q : V \to \mathbb{C}$, $v \mapsto s(v,v)$ be its associated quadratic form. Then show that for all $v, w \in V$ we have:

   $$s(v,w) = \frac{1}{4}\left(q(v+w) - q(v-w) + iq(v+iw) - iq(v-iw)\right).$$

   This shows that a symmetric bilinear resp. a sesquilinear form can be reconstructed from its quadratic form.

2. *(8 Punkte)*

   (a) Sei

   $$A := \begin{pmatrix} 7 & 6 & 4 & 0 \\ 6 & 15 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

   und durch $\langle x, y \rangle := {}^t x A y$ ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^4$ definiert. Bestimmen Sie eine Orthogonalbasis des durch

   $$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

   gegebenen Untervektorraumes von $\mathbb{R}^4$.

   (b) Die folgenden Polynome $p(x,y,z)$ definieren quadratische Formen auf $\mathbb{R}^3$. Bestimmen Sie die darstellenden Matrizen der zugehörigen Bilinearformen bezüglich der Standardbasis.

   i. $x^2 + y^2 + 3xy + 2zx + z^2$
   ii. $3x^2 + 7y^2 + z^2 + 8xy + 2xz + 4yz$

   (c) Versuchen Sie, für die quadratischen Formen

   i. $p(x,y) := 5x^2 + y^2 + 4xy$
   ii. $p(x,y) := y^2 - x^2 - 4xy$

   Niveaukurven zu zeichnen, d.h., bestimmen Sie (für einige $c \in \mathbb{R}$ nahe bei 0) die Menge

   $$p_c := p^{-1}(c) = \{(x,y) \mid p(x,y) = c\}$$

   Versuchen Sie zu entscheiden, ob die Formen positiv definit sind oder nicht.

Bitte wenden !!!

3. *(4 Punkte)* Sei V ein endlich dimensionaler Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ und $(v_1, \dots, v_r)$ eine orthonormale Familie in V. Beweisen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

   i) $(v_1, \dots, v_r)$ ist eine Basis von V.
   ii) Ist $v \in V$, so folgt aus $\langle v, v_i \rangle = 0$ für alle i, dass $v = 0$.
   iii) Ist $v \in V$, so gilt $v = \sum_{i=1}^{r} \langle v, v_i \rangle \cdot v_i$.
   iv) Für alle $v, w \in V$ gilt: $\langle v, w \rangle = \sum_{i=1}^{r} \langle v, v_i \rangle \langle w, w_i \rangle$.
   v) Für alle $v \in V$ gilt: $\|v\|^2 = \sum_{i=1}^{r} |\langle v, v_i \rangle|^2$.

4. *(4 Punkte)* Wir betrachten $\mathbb{C}$ als $\mathbb{R}$-Vektorraum. Für $\alpha \in \mathbb{C}$ sei $F_\alpha : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ die Abbildung $z \mapsto \alpha z$.

   (a) Zeigen Sie, dass F_α ein Endomorphismus ist.
   (b) Zeigen Sie, dass $\langle w, z \rangle = \mathrm{Re}(w\bar{z})$ ein Skalarprodukt definiert. Erkennen Sie es wieder?
   (c) Für welche α ist F_α bezüglich dieses Skalarproduktes orthogonal? Erklären Sie Ihr Ergebnis geometrisch!
   (d) Wie sieht die darstellende Matrix $M_{(1,i)}(F_\alpha)$ von F bezüglich der Basis $(1, i)$ des $\mathbb{R}$-Vektorraums $\mathbb{C}$ aus?

5. *(4 Punkte)* Eine Abbildung

$$\| \cdot \| : \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$$

   heißt Matrixnorm, falls sie eine Norm ist, d.h.,

   - $\|A\| \geq 0$ für alle $A \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{R})$ und $\|A\| = 0$ genau dann, wenn $A = 0$
   - $\|\lambda A\| = |\lambda| \|A\|$ für alle $A \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{R})$ und $\lambda \in \mathbb{R}$
   - $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$ für alle $A, B \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{R})$

   und falls zusätzlich $\|A \cdot B\| \leq \|A\| \|B\|$ für alle $A, B \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{R})$ gilt. Zeigen Sie, dass die folgenden Abbildungen Matrixnormen sind.

   (a) $A = (A_{ij})$, $\|A\| := \max_j \sum_{i=1}^{n} |A_{ij}|$
   (b) $A = (A_{ij})$, $\|A\| := \max_i \sum_{j=1}^{n} |A_{ij}|$

6. *(4 points)* Consider the Euclidean vector space $\mathbb{R}[t]_{\leq 2}$ with the scalar product ϕ_{int} with

$$\phi_{int}(f, g) = \int_0^1 f(t)g(t) \mathrm{d}\, t$$

   and with the base $(a_1, a_2, a_3) = (1, t, t^2)$.
   Apply the Gram-Schmidt orthogonalization method to determine an orthogonal base (b_1, b_2, b_3). Determine the orthonormal base $(c_1, c_2, c_3) = (b_1/\|b_1\|, b_2/\|b_2\|, b_3\|b_3\|)$.

7. *(4 points)* Consider the following map (“trace”=„Spur“)

$$\begin{aligned} (\ ,\ ) : M(n \times n, \mathbb{R}) \times M(n \times n, \mathbb{R}) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ A\ ,\ B &\longmapsto \mathrm{trace}(A^{tr} \cdot B). \end{aligned}$$

   Show that

   (a) $(\ ,\ )$ defines a scalar product on $M(n \times n, \mathbb{R})$.
   (b) Consider the subspace of symmetric resp. anti-symmetric matrices, i.e.:

$$U := \{A \in M(n \times n, \mathbb{R}) \,|\, A^{tr} = A\} \qquad V := \{A \in M(n \times n, \mathbb{R}) \,|\, A^{tr} = -A\}.$$

   Show that $V = U^{\perp}$.

Alle Informationen zur Vorlesung (Termine, Hausaufgaben- und Übungsblätter, etc.) sind unter

`https://www.tu-chemnitz.de/mathematik/algebra/LinAlg2-WS1617/linalg2.php`

zu finden.

Abgabe bis Dienstag, den 30. Mai 2017, in den Übungen