Hausaufgaben zur Linearen Algebra

1. *(1+1 points)*

   (a) Let $A, B \in M(3 \times 3, \mathbb{C})$ such that $P_A(t) = P_B(t)$ and $M_A(t) = M_B(t)$. Show that the Jordan normal forms of A and B coincide up to reordering of the Jordan blocks.

   (b) Find an example of two matrices $A, B \in M(4 \times 4, \mathbb{C})$ with $P_A(t) = P_B(t)$ and $M_A(t) = M_B(t)$ such that there is no $T \in \mathrm{GL}(4, \mathbb{C})$ with $A = T^{-1} \cdot B \cdot T$.

2. *(4 Punkte)* Berechnen Sie das charakteristische und das Minimalpolynom der folgenden Matrizen.

   (a)
$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -4 & -2 & -4 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

   (b)
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

   (c) $A, A^2, A^3, \ldots$ für
$$A := \begin{pmatrix} 0 & e^{\pi} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \pi^e & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 25^{130} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3. *(4 points)* Consider the $(n \times n)$-matrix (each entry that is left out is equal to zero)
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ 0 & & 0 & 1 \\ -a_0 & \dots & \dots & -a_{n-1} \end{pmatrix},$$
   where $a_0, ..., a_{n-1} \in K$. Show

   (a) $\lambda \in K$ is an eigenvalue of $A \iff \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + ... + a_1\lambda + a_0 = 0$,

   (b) $\dim \mathrm{Eig}(A, \lambda) = 1$ if λ is an eigenvalue of A,

   and determine for each eigenvalue an eigenvector.

Bitte wenden !!!

4. *(11 Punkte)*

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen richtig oder falsch sind und begründen Sie jeweils Ihre Aussage.

(a) Zu jedem Endomorphismus eines endlich-dimensionalen k-Vektorraums existiert eine Basis, bezüglich derer die darstellende Matrix des Endomorphismus in Jordanscher Normalform ist.

(b) Sei F ein Endomorphismus des K-Vektorraumes V. Existiert eine F-invariante Fahne in V, so existiert eine Basis von V, bezüglich derer die darstellende Matrix von F in Jordanscher Normalform ist.

(c) Die darstellende Matrix eines diagonalisierbaren Endomorphismus ist bezüglich einer beliebigen Basis in Jordanscher Normalform.

(d) Ein Endomorphismus ist genau dann diagonalisierbar, wenn das Minimalpolynom von der Form $(t-\lambda_1)\cdot\ldots\cdot(t-\lambda_k)$ für paarweise verschiedene λ_i ist.

(e) Jeder Unterring U eines Ringes R ist auch Ideal in R.

(f) Jedes Ideal im Ring $\mathbb{R}^2$ (mit der durch $(a,b)*(c,d) := (a\cdot c, b\cdot d)$ definierten Multiplikation) ist ein Untervektorraum des $\mathbb{R}$-Vektorraumes $\mathbb{R}^2$.

(g) Zwei Automorphismen von Vektorräumen sind genau dann ähnlich, wenn sie äquivalent sind.

(h) Die Äquivalenzklasse eines Vektorraumendomorphismus bezüglich Ähnlichkeit ist in der bezüglich Äquivalenz enthalten.

(i) Der Matrizenring ist nullteilerfrei.

(j) Jeder Endomorphismus hat einen Eigenwert.

(k) Sei P_A das charakteristische Polynom der Matrix A. Es gilt $P_A({}^{tr}A) = 0$.

5. *(5 Punkte)* In welchen der folgenden Fälle ist die Teilmenge I des Ringes R ein Ideal in R?

(a) $R = \mathbb{Z}$, $I = (n) := \{k\cdot n \mid k \in \mathbb{Z}\}$ für festes $n \in \mathbb{Z}$

(b) $R = \mathbb{Z}$, $I = \{1 + k\cdot n \mid k \in \mathbb{Z}\}$ für festes $n \in \mathbb{Z}$

(c) $R = K[x]$, $I = \{\lambda_1\cdot(x^2+1) + \lambda_2\cdot(x^3+x) \mid \lambda_1, \lambda_2 \in K\}$ für einen Körper K.

(d) $R = K[x]$, $I = \{\sum_{i=1}^n \lambda_i f_i \mid \lambda_i \in K[x]\}$ für einen Körper K und fest vorgegebene $f_1, \ldots, f_n \in K[x]$.

(e) Sei K ein Körper, $R = K[x]$ und $f \in K[x]$ ein beliebiges, aber fest gewähltes Polynom und

$$I = \{1, f, f^2, f^3, \ldots\} = \{f^i \mid i \in \mathbb{N}\}.$$

(f) $I = \ker(\varphi)$ für einen Ringhomomorphismus $\varphi : R \to S$.

(g) Sei $A \subset \mathbb{R}$ und $I = \{f \in \mathbb{R}[X] \mid f_{|A} = 0\}$.

6. *(4 Punkte)* Sei K ein Körper und

$$A = \begin{pmatrix} 0 & c & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix} \in M(4\times 4, K).$$

Bestimmen Sie in Abhängigkeit von den drei Parametern $a, b, c \in K$ die Jordanblockstruktur und das Minimalpolynom von A.

Hinweis zur Jordanblockstruktur: Es reicht, irgendwie die Eigenwerte und Größen der Jordanblöcke einer Jordannormalform zu bestimmen. Es ist dafür nicht nötig, eine Basiswechselmatrix T, so dass $T^{-1}AT$ in Jordannormalform ist, auszurechnen.

Alle Informationen zur Vorlesung (Termine, Hausaufgaben- und Übungsblätter, etc.) sind unter

`https://www.tu-chemnitz.de/mathematik/algebra/LinAlg2-WS1617/linalg2.php`

zu finden.

Abgabe bis Dienstag, den 9. Mai 2017, in den Übungen