Hausaufgaben zur Linearen Algebra

1. *(4 points)* Let V, W be finite-dimensional vector spaces over a field K and let $F : V \to W$ be a homomorphism. Moreover, let $U \subset W$ be a linear subspace. Recall that $F^* \in \mathrm{Hom}_K(W^*, V^*)$ denotes the dual map of F, and $U^0 \subset W^*$ denotes the annihilator of $U \subset W$ inside W^* (and similarly, for any linear subspace $\widetilde{U} \subset V$, we write $\widetilde{U}^0 \subset V^*$ for the annihilator of $\widetilde{U}$ inside V^*). Show that

$$F^*(U^0) = (F^{-1}(U))^0$$

2. *(4 Punkte)* Sei

$$U := \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix}2\\3\\1\\4\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\5\\1\\-1\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\0\\1\\1\\-2\end{pmatrix}\right) \subset \mathbb{R}^5$$

gegeben. Bestimmen Sie eine Basis von $U^0 \subset (\mathbb{R}^5)^*$.

3. *(6 Punkte)* Ermittlen Sie die Eigenwerte und Eigenräume der folgenden Matrizen, welche Endomorphismen von $\mathbb{R}^n$ darstellen:

$$\left(\pi^2\right), \begin{pmatrix}1 & 2\\2 & 4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\0 & 1 & 1\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & -2 & -2\\-4 & -2 & -5\\4 & 4 & 7\end{pmatrix}.$$

4. *(6 Punkte)*

   (a) Eine Matrix $A \in \mathrm{M}(n \times n, K)$ heißt nilpotent, falls es ein $n \in \mathbb{N}_0$ mit $A^n = 0$ gibt. Zeigen Sie: Eine nilpotente Matrix hat Null als einzigen Eigenwert.

   (b) Eine Matrix $A \in \mathrm{M}(n \times n, K)$ heißt idempotent, wenn $A^2 = A$ gilt. Zeigen Sie, dass das charakteristische Polynom einer idempotenten Matrix A von der Form

   $$(1-t)^r \cdot t^{n-r}$$

   ist mit $r = \mathrm{rk}(A)$ ist.

   Hinweis: A ist ähnlich zur Matrix $\begin{pmatrix}E_r & 0\\0 & 0\end{pmatrix}$.

Bitte wenden !!!

Hinweise

Begleitend zur Vorlesung wird es jede Woche ein Übungsblatt sowie ein Hausaufgabenblatt geben. Das Übungsblatt sollen Sie unter Anleitung in der Übung lösen, das Hausaufgabenblatt soll bis zur nächsten Woche selbstständig bearbeitet werden. Natürlich können und sollen Sie sich dabei mit Ihren Kommilitonen austauschen. Die Bearbeitung der Hausaufgaben und der Übungen ist integraler Bestandteil der Vorlesung und zum Bestehen der Prüfung unerlässlich. Eine formale Voraussetzung, um an der Prüfung teilnehmen zu können, ist, dass Sie bei den Hausaufgaben mindestens 40% der Punkte erreicht haben.
Die Hausaufgaben werden korrigiert und die Lösungen werden, soweit dafür Erklärungsbedarf besteht, jeweils einmal pro Woche in den Übungen besprochen. Dabei sollen die Lösungen, soweit dies möglich ist, hauptsächlich von Ihnen selbst an der Tafel vorgerechnet werden. Dies hilft Ihnen die gefundene Lösung noch einmal zu durchdenken und trainiert Sie dabei Ihre Ideen auch vor Publikum vorzutragen.

Bei jeglichen Fragen zur Vorlesung (Stoff, Übungen, Organisatorisches, etc.) können Sie uns jederzeit per E-Mail unter

{christian.sevenheck, fgoering}@mathematik.tu-chemnitz.de

erreichen. Nach Terminvereinbarung sind wir natürlich auch persönlich zu sprechen.

Alle Informationen zur Vorlesung (Termine, Hausaufgaben- und Übungsblätter, etc.) sind unter

`https://www.tu-chemnitz.de/mathematik/algebra/LinAlg2-SS17/linalg2.php`

zu finden.

Abgabe bis Dienstag, den 11. April 2017, in den Übungen