Lineare Algebra I
Wintersemester 2019/2020
Ausgabe: 22.10.2019

TU Chemnitz, Fakultät für Mathematik
Christian Sevenheck, Thomas Jahn

Übung 2

A2.1. Geben Sie folgende Mengen durch Angabe ihrer Elemente an:

$$\begin{aligned} M_1 &= \{x \in \mathbb{Z} \mid \exists\, g_1, g_2 \in \mathbb{Z} : x = 2g_1 \text{ und } x = 3g_2\}\,, \\ M_2 &= \{x \in \mathbb{Z} \mid \exists\, g_1, g_2 \in \mathbb{Z} : x = 2g_1 \text{ oder } x = 3g_2\}\,, \\ M_3 &= \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, (x+1)^3 = x^3 + 1\right\}, \\ M_4 &= \left\{x \in \mathbb{Q} \,\middle|\, x^2 = 3\right\}. \end{aligned}$$

A2.2. Wieviel verschiedene Teilmengen hat eine endliche Menge M?

A2.3. Bilden Sie für die Mengen $M = \{a, b\}$ und $I = \{1, 2, 3\}$ die Mengen $I \times M$, $M \times I$ und M^2.

A2.4. Für zwei Mengen A und B definieren wir $A \,\Delta\, B := (A \cup B) \setminus (A \cap B)$. Beweisen Sie:

(a) $A \,\Delta\, B = B \,\Delta\, A$

(b) $A \,\Delta\, A = \emptyset$,

(c) $A \,\Delta\, \emptyset = A$,

(d) $(A \,\Delta\, B) \,\Delta\, C = A \,\Delta\, (B \,\Delta\, C)$.

A2.5. Welche der folgenden Relationen auf der Menge X sind reflexiv, symmetrisch, transitiv?

(a) $X = \mathbb{Z}$, $a \sim b \Leftrightarrow 4 | (a - b)$,
(b) $X =$ Menge aller Schüler einer Stadt, $a \sim b \Leftrightarrow a$ besucht die gleiche Schule wie b,
(c) $X =$ beliebiges Mengensystem, $a \sim b \Leftrightarrow a$ ist echte Teilmenge von b,
(d) $X = \mathbb{N}$, $a \sim b \Leftrightarrow a \cdot b$ ungerade,
(e) $X = \mathbb{N}$, $a \sim b \Leftrightarrow a \cdot b$ gerade,
(f) $X =$ Menge aller Geraden im $\mathbb{R}^2$, $g \sim h \Leftrightarrow g \parallel h$,
(g) $X =$ Menge aller Geraden im $\mathbb{R}^3$, $g \sim h \Leftrightarrow g \perp h$.

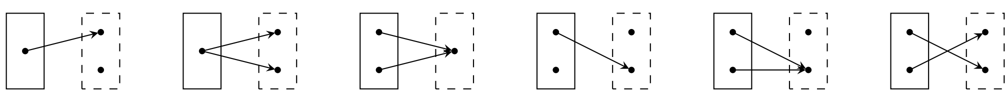
A2.6. Welche der Relationen aus Aufgabe 2.5 sind Äquivalenzrelationen? Wie sehen die Äquivalenzklassen aus?

A2.7. Zeigen Sie, dass folgende Relationen auf $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ eine Äquivalenzrelation ist:

$$(a_1, b_1) \sim (a_2, b_2) \Leftrightarrow a_1 b_2 = b_1 a_2.$$

Jede Äquivalenzklasse kann dabei mit einer rationalen Zahl identifiziert werden.

A2.8. Welche der folgenden Abbildungen stellen Funktionen dar? Sind diese injektiv, surjektiv, bijektiv?



Alle Informationen zur Vorlesung (Termine, Aufgabenblätter, etc.) sind unter

`https://www.tu-chemnitz.de/mathematik/algebra/LinAlg1-WS1920/linalg1.php`

zu finden.