Übungen zur Linearen Algebra

1. Zeigen Sie, dass die Menge M von Funktionen $f_i : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$, gegeben durch $f_1(t) = t$, $f_2(t) = \frac{1}{t}$, $f_3(t) = -t$, $f_4(t) = -\frac{1}{t}$ bezüglich der Komposition eine abelsche Gruppe der Ordnung 4 bildet.

2. Geben Sie eine Bijektion zwischen den Mengen $[a, b]$ und $[c, d]$ an, wobei $a < b$ und $c < d$!

3. Zeigen Sie mithilfe der vollständigen Induktion die Gültigkeit der folgenden Aussagen für alle $n \in \mathbb{N}_0$:

   (a) $2^n > n$,

   (b) $\sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a}$ $(a \neq 1)$.

4. Beweisen Sie durch vollständige Induktion, dass
$$S_n := 1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \cdots + (-1)^{n-1} n^2$$
für jedes natürliche n den Wert
$$S_n = (-1)^{n-1} \frac{n(n+1)}{2}$$
annimmt.

5. Beweisen Sie, dass für $N \in \mathbb{N}$ gilt
$$\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2N - 1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2N} < \frac{1}{\sqrt{N}}.$$

6. Zeigen Sie: Für jedes $n \in \mathbb{N},\ n \geq 2$, gilt $(1+x)^n > 1+nx$, für alle $x > -1,\ x \neq 0$ (Bernoullische Ungleichung)!

7. Die Tschebyscheff-Polynome 1. Art T_n sind über die Rekursionsvorschrift
$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x),\ n \in \mathbb{N},\ T_0(x) \equiv 1,\ T_1(x) = x,$$
definiert. Zeigen Sie, dass dann für $n \in \mathbb{N}_0$ und $\vartheta \in [0, \pi]$ gilt
$$T_n(\cos \vartheta) = \cos(n\vartheta).$$

8. Zeigen Sie, dass jede nichtleere Teilmenge der natürlichen Zahlen ein kleinstes Element besitzt.

9. Zeigen Sie, dass jede natürliche Zahl größer oder gleich 2 als Produkt von Primzahlen darstellbar ist.

Alle Informationen zur Vorlesung (Termine, Hausaufgaben- und Übungsblätter, etc.) sind unter

`https://www.tu-chemnitz.de/mathematik/algebra/LinAlg1-WS1617/linalg1.php`

zu finden.