Hausaufgaben zur Linearen Algebra

1. *(6 Punkte)*

   (a) Berechnen Sie alle möglichen Produkte $M_i \cdot M_j$ der folgenden Matrizen:

$$M_1 := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 4 & -1 & -1 \\ 1 & 4 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_2 := \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad M_3 := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad M_4 := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

   (b) Wir betrachten die folgende Matrix aus $M \in \mathrm{Mat}(3 \times 3, \mathbb{R})$.

$$M := \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

   Berechnen Sie A^2 und A^3 und finden Sie eine lineare Relation zwischen A, A^2, A^3 und der Einheitsmatrix $E \in \mathrm{Mat}(3 \times 3, \mathbb{R})$, d.h., Koeffizienten $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ mit $aA^3 + bA^2 + cA + dE = 0 \in \mathrm{Mat}(3 \times 3, \mathbb{R})$.

2. *(6 Punkte)*

   (a) Sei U der von $e_1 := \sin(t)$ und $e_2 := \cos(t)$ erzeugte Untervektorraum von $\mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Sei $D : U \to U$ die Ableitung eines Elementes $v \in U$. Bestimmen Sie die Matrizen, welche die linearen Abbildungen D und D^n von U nach U bezüglich der Basis $\mathcal{A} = (e_1, e_2)$ von U repräsentieren, d.h., berechnen Sie $M^{\mathcal{A}}_{\mathcal{A}}(D)$ und $M^{\mathcal{A}}_{\mathcal{A}}(D^n)$.

   (b) Sei $V := \mathbb{R}[X]_{\leq 5} \subset \mathbb{R}[X]$ der Vektorraum aller Polynome vom Grad kleiner oder gleich fünf. Zeigen Sie, dass das Ableiten von Polynomen eine lineare Abbildung D von V nach V ist geben Sie die Matrix $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(D)$ dieser Abbildung bezüglich der Basis $\mathcal{B} = \{1, X, X^2, X^3, X^4, X^5\}$ an.

3. *(4 Punkte)* Seien W_1 und W_2 zwei endlich-dimensionale k-Vektorräume. Zeigen Sie, dass das direkte Produkt $V := W_1 \times W_2$ ebenfalls die Struktur eines k-Vektorraums hat. Zeigen Sie außerdem, dass sich V als direkte Summe $V = V_1 \oplus V_2$ von Untervektorräumen V_1 bzw. V_2 schreiben läßt, die zu W_1 bzw. W_2 isomorph sind.

4. *(6 Punkte)* Sei $\mathbb{F}_q$ ein Körper mit $q \in \mathbb{N}$ Elementen. Sei $n \in \mathbb{N}$.

   (a) Wieviele Elemente hat der Vektorraum $\mathbb{F}_q^n$?

   (b) Wieviele Untervektorräume von $\mathbb{F}_q^n$ der Gestalt $\mathrm{span}_{\mathbb{F}_q}(v)$ mit $v \in \mathbb{F}_q^n \setminus \{0\}$ gibt es? (Hinweise: Wieviele Elemente haben die Mengen $\mathrm{span}_{\mathbb{F}_q}(v) \setminus \{0\}$? Wie sehen ihre Schnittmengen aus?)

Alle Informationen zur Vorlesung (Termine, Übungsblätter, etc.) sind unter

`https://www.tu-chemnitz.de/mathematik/algebra/LinAlg1-WS1617/linalg1.php`

zu finden.

Abgabe bis 2./3. Januar 2017, in den Übungen