Hausaufgaben zur Linearen Algebra

1. *(8 Punkte)*

   (a) Welche der folgenden Abbildungen sind Gruppenhomomorphismen? Hierbei soll die Verknüpfung auf $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{R}$ die übliche Addition sein.

   i. $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$, $k \mapsto 8k$

   ii. $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, $k \mapsto [2k]$

   iii. $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $k \mapsto k + 8$

   (b) Sei G eine beliebige Gruppe und $g \in G$. Ist dann die Abbildung $\varphi_g : G \to G, h \mapsto gh$ ein Gruppenhomomorphismus ?

   (c) Sei G eine Gruppe. Wie in der Vorlesung bezeichne $S(G)$ die Gruppe der Bijektionen der Menge G in sich selbst, mit der Komposition von Abbildungen als Verknüpfung. Zeigen Sie, dass die Abbildung

   $$\begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & S(G) \\ g & \longmapsto & \varphi_g \end{array}$$

   ein injektiver Gruppenhomomorphismus ist (hierbei ist φ_g die in (b) definierte Abbildung).

2. *(8 points)* Let X be a set and G a group. By an *operation* or *action* of G on X we shall mean a mapping $\Phi : G \times X \to X$ with the following property: Denote for all $g \in G$ and $x \in X$ by gx the image $\Phi(g, x) \in X$. Then we require that for all $g, h \in G$ and all $x \in X$:

   $$(gh)x = g(hx) \text{ and } 1x = x.$$

   The subset Gx of X, consisting of all elements gx, $g \in G$ is called *orbit of x under G.*

   (a) Show that $x \sim_G y :\Leftrightarrow x \in Gy$ defines an equivalence relation on X. The set of all equivalence classes is called *orbit space.*

   (b) Show that S_n acts on $\{1, \ldots, n\}$ by $(\sigma, k) \mapsto \sigma(k)$ (this means that $G = S_n$ and $X = \{1, \ldots, n\}$). Describe the orbits and the orbit space.

   (c) Consider the action of S_2 on $\mathbb{R}^2$ by $(\sigma, (x_1, x_2)) \mapsto (x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)})$. What are the orbits? Describe the orbit space.

   (d) Consider the mapping

   $$\begin{array}{ccc} (\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot) \times \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \\ (r, (x, y)) & \longmapsto & (rx, ry) \end{array}.$$

   i. Does it define a group action? What are the orbits?

   ii. Show that there exists a bijection from the real intervall $[0, \pi) \subset \mathbb{R}$ to the orbit space. (Hint: consider the following map $[0, \pi) \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto (\cos t, \sin t)$.)

Bitte wenden !!!

3. *(4 Punkte)*

   (a) Es sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe. Zeigen Sie, dass auch $(G, *)$ mit der Verknüpfung

   $$g * h := h \cdot g$$

   eine Gruppe ist.

   (b) Es sei G eine Gruppe. Für alle $a \in G$ gelte $a^2 = 1$. Beweisen Sie, dass G abelsch ist.

4. *(Zusatzaufgabe: 2 Extra-Punkte)* Bestimmen Sie alle Gruppenhomomorphismen der Gruppe $(\mathbb{Q}, +)$ in die Gruppe $(\mathbb{Z}, +)$. Hinweis: Untersuchen Sie für einen gegebenen Gruppenhomomorphismus $\varphi : \mathbb{Q} \to \mathbb{Z}$ das Element

$$\varphi\Bigg(\underbrace{\frac{1}{n} + \ldots + \frac{1}{n}}_{n\text{-mal}}\Bigg) \in \mathbb{Z}$$

Alle Informationen zur Vorlesung (Termine, Übungsblätter, etc.) sind unter

`https://www.tu-chemnitz.de/mathematik/algebra/LinAlg1-WS1617/linalg1.php`

zu finden.

Abgabe bis 7./8. November 2016, in den Übungen